Handreichung

VERA 8 Mathematik 2009

Testheft B

Liebe Kollegin, lieber Kollege,

die vorliegende „Handreichung Vergleichsarbeiten – VERA-8 (2009)“, enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der „Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse (2009)“, Testheft I, wie sie vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) für die Länder erstellt wurden. Ergänzend finden Sie zudem kurz gefasst allgemeinere Erläuterungen zu den Zielen, den Verwendungsmöglichkeiten und der Konstruktionsweise von Vergleichsarbeiten.

Diese „Handreichung Vergleichsarbeiten“ soll auf diese Weise nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden Kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie soll vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen.

Die Handreichung wendet sich daher nicht ausschließlich an diejenigen unter Ihnen, die im März 2009 mit ihren Klassen diese Arbeiten (als „Lernstandserhebung“, „Kompetenztest“ o. ä.) geschrieben haben, sondern an alle interessierten Kolleginnen und Kollegen. Auch Eltern sowie Schülerinnen und Schüler oder an Unterrichtsqualität interessierte Dritte finden hierin möglicherweise nützliche Anregungen. Denn es kommt Ihnen als Lehrkraft im Unterricht zwar eine zentrale Rolle bei der Umsetzung der Bildungsstandards zu, doch ohne entsprechende Rahmensetzungen durch Schulpolitik und Schulverwaltung wie auch ohne eine breite Unterstützung durch Eltern, Schüler und Bevölkerung ist eine solche Aufgabe nicht zu bewältigen.

Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung zunächst fachübergreifend Ziele, Möglichkeiten, Konstruktion und Abläufe von VERA erläutert.[1] In einem folgenden fachbezogenen Teil werden das fachspezifische Kompetenzmodell und Charakteristika eines kompetenzorientierten Unterrichts erläutert. In einem dritten Teil werden die im VERA-8-Durchgang 2009, Testheft I eingesetzten Aufgaben mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben. Ein abschließender vierter Teil widmet sich exemplarisch der Kompetenzentwicklung im Unterricht. Die Handreichung enthält somit keine Ergebnisse aus der eigentlichen Testdurchführung im März 2009; diese liegen ausschließlich den Ländern bzw. deren Behörden und Schulen vor.

Sie können diese Handreichung für Ihre persönlichen (Unterrichts-) Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben. Die Aufgaben enthalten teilweise urheberrechtlich geschütztes Material (Fotografien, Grafiken, Texte etc.). Das IQB hat für die Länder bzw. deren Behörden, Schulen, Lehrkräfte, Schüler und Eltern für April 2009 bis März 2010 die

---

[1] Weitere grundsätzliche Informationen zu VERA finden sich auch unter http://www.iqb.hu-berlin.de/vera; dort auch Links zu den Informationsangeboten der Länder.

nicht-kommerziellen, räumlich und medial unbeschränkten Nutzungsrechte erworben.[2] Ab April 2010 dürfen die Aufgaben der Testhefte 2009 nicht mehr für den allgemeinen Gebrauch vervielfältigt oder elektronisch verteilt werden.[3]

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und auch viel Spaß im Unterricht mit unserer „Handreichung Vergleichsarbeiten VERA-8 (2009)“

Ihr
Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

[2] Trotz intensiver Bemühungen war es leider nicht für alle Materialquellen möglich, die Rechteinhaber ausfindig zu machen und zu kontaktieren, um erforderliche Veröffentlichungsrechte einzuholen. Wir bitten um Verständnis und bitten die Rechteinhaber sowie die Verlage, deren Rechte berührt sind, sich ggf. mit uns in Verbindung zu setzen. In einigen Fällen haben Rechteinhaber und Verlage nicht auf unsere Kontaktbemühungen reagiert. Auch in diesen Fällen bitten wir freundlich darum, sich mit uns in Verbindung zu setzen.

[3] Eine kommerzielle Verwendung der Aufgaben – etwa im Rahmen von Verlagspublikationen – muss bei den Rechteinhabern gesondert vereinbart werden. Kontakt über das IQB.

1. Fächerübergreifende Erläuterungen

VERA-8 – Vergleichsarbeiten in 8. Klassen
(auch "Lernstandserhebung", "Kompetenztest", o.ä.)

Anfang März 2009 wurden in den meisten 8. Klassen der allgemein bildenden Schulen in Deutschland parallel Arbeiten in Mathematik, Deutsch und/oder Erster Fremdsprache (Englisch / Französisch) geschrieben. Dieses Vorhaben – übergreifend „VERA-8“ genannt – geht auf einen Beschluss der Kultusministerkonferenz zurück[4], schließt an ähnliche Erhebungen einzelner Bundesländer in den Vorjahren an und soll fortan jährlich durchgeführt werden.

Zuständig sind jeweils die Länder. Sie organisieren den Ablauf wie auch die Auswertung in je eigener Verantwortung und haben dabei teilweise unterschiedliche Regelungen getroffen: So werden zum einen die Arbeiten teilweise nicht in allen Fächern verpflichtend geschrieben; zum anderen unterscheidet sich die Form der Ergebnisrückmeldung und -berücksichtigung. Auch die Bezeichnung für VERA variiert - so z. B. als „Kompetenztest“ oder „Lernstandserhebung“.

Es gibt jedoch Rahmendaten, Materialien und Abläufe, die für alle Länder weitgehend gleich sind. Hier sind vorrangig die Testhefte und Ergänzungsmaterialien für die VERA-8-Arbeiten zu nennen, die die Länder zentral über das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) der Humboldt-Universität zu Berlin entwickeln lassen.

Die Testdurchführung und meist auch die erste Auswertung liegen bei den Lehrkräften; spezielle Testleiter kommen nicht zum Einsatz. Im Unterschied zu den Schulleistungsuntersuchungen „PISA“, „IGLU“ oder „TIMSS“ ist VERA *kein* Stichproben-gestütztes „*System Monitoring*“, mit dem die Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Teilen des Bildungssystems überwacht wird. VERA ist vielmehr ein Instrument der Unterrichtsentwicklung, mit dem die Lehrkräfte an allen Schulen die Leistungsfähigkeit ihrer Schülerinnen und Schüler über den Bezugsrahmen ihrer Klasse und Schule sowie des konkreten Lehrplans hinaus beurteilen können.

Diese vor allem klassenbezogenen kompetenzorientierten Diagnosen stellen den Lehrkräften in Ergänzung ihrer unterrichtspraktisch-professionellen Erfahrungen Ansatzpunkte für den Unterricht bereit. Zudem soll das zentrale Einbeziehen der Lehrkräfte den Anstoß für eine fachdidaktische Diskussion und Kooperation in den Kollegien und Fachkonferenzen geben, die im idealen Fall die Form einer internen Evaluation und eines kontinuierlichen Optimierungsprozesses annehmen.

Die hierfür hilfreiche Auswertung der Tests (s. u.) und die Rückmeldung der Ergebnisse an Schulen und Lehrkräfte übernehmen die Länder, wie oftmals auch eine zentrale schriftliche Unterrichtung der Schülerinnen und Schüler bzw. deren Eltern.

VERA-Testhefte und Bildungsstandards

Für jedes der vier Fächer wurden jeweils drei Testhefte erstellt, die zwar jeweils einige Aufgaben gemeinsam haben, sich untereinander aber in ihrem Gesamt-Schwierigkeitsgrad unterscheiden: Das Heft A (oder „1“) ist als „leicht“, das Heft B (bzw. „2“) als „mittel“ und das Heft C (bzw. „3“) als „schwer“ eingestuft. Die unterschiedliche Gesamtschwierigkeit der Hefte kommt durch die jeweilige Zusammenstellung aus unterschiedlich schweren Aufgaben zustande. In allen Heften sind jedoch sowohl einfache als auch mittlere und schwierige Aufgaben zu finden, so dass individuelle Leistungsunterschiede auch innerhalb von Klassen

[4] http://www.kmk.org/schul/Bildungsmonitoring_Brosch%FCre_Endf.pdf

angemessen berücksichtigt werden. Die Testhefte wurden jeweils für einen 2 x 40-minütigen Testdurchgang entwickelt.

Die Kompetenz-Orientierung des Tests ergibt sich durch die Entwicklung der einzelnen Testaufgaben auf Basis der länderübergreifenden Bildungsstandards, die von den Kultusministern als Zielvorgabe für Schülerleistungen und als Grundlage von Lehrplanentwicklung und Lehrerfortbildung ab dem Schuljahr 2004/2005 verbindlich eingeführt worden sind.

Bildungsstandards sind bekanntlich fachdidaktisch begründete und auf mittlerem Abstraktionsgrad formulierte Leistungserwartungen an die Schülerinnen und Schüler. Sie nehmen damit eine Mittelstellung zwischen sehr allgemeinen Bildungszielen einerseits und konkreten Aufgabenstellungen andererseits ein und setzen diese untereinander in Bezug. Sie sind dadurch sowohl zukunfts- und verwendungsoffen als auch gesellschaftlich konsensfähig. Die erwarteten Leistungen bestehen im Nachweis des Könnens seitens der Schülerinnen und Schüler, fachbezogene Problemaufgaben zu lösen.[5]

Bildungsstandards bestehen dreidimensional aus einer generalisierten inhaltsbezogenen Komponente („Leitidee“, „Basiskonzept“), die am ehesten den Inhalten traditioneller Lehrpläne entspricht, einer prozessual-formalen Komponente (allgemeine fachbezogene Kompetenzen) und einer eher kognitiven Komponente (Anforderungsbereiche, z. B. Anwendung / Übertragung / Kritik). Sie fokussieren auf den Kernbereich des jeweiligen Faches und zielen kumulatives, d.h. systematisch vernetztes Lernen an. Ihre Schwerpunkte legen sie stärker auf die prozessbezogenen und weniger auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen. Wie dies im Einzelnen aussieht, wird in Teil II dieser Handreichung fachbezogen ausgeführt.

Die Bildungsstandards im Fachbereich Mathematik sind aufgrund eines Beschlusses der Kultusministerkonferenz seit dem Schuljahr 2004/2005 bzw. 2005/2006 verbindliche Zielvorgaben für die Lehrplanentwicklung und die Lehrerbildung. Sie differenzieren nach angestrebtem Schulabschluss (HSA / MSA). Sie werden vom IQB in konkrete Testaufgaben umgesetzt („operationalisiert“).

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist damit *erstens*, dass diese zwar auf eine (kumulativ zu erweiternde) Basis des theoretischen Fachwissens aufbauen, aber – aufgrund ihres Fokus auf der Lösung von fachlichen Problemen – v. a. dem tatsächlichen Handeln (-Können) und dem reflexiv-kritischen Bewerten (-Können) den entscheidenden Stellenwert einräumen, angestrebt über einen langfristigen Kompetenzaufbau.

Entscheidend für das Konzept der Bildungsstandards ist *zweitens*, dass diese *Output*-orientiert sind, also Zielformulierungen enthalten und lediglich Hinweise für die Lehrkräfte geben, wie diese erreicht werden können. Jede Schule bzw. Fachkonferenz soll in Form eines Schul-Curriculums einen eigenen, den jeweiligen Schülern angepassten, fördernden und differenzierenden Weg zu diesem Ziel finden.

Die den VERA-8-Arbeiten zugrundeliegenden Bildungsstandards beziehen sich auf die neunte bzw. die zehnte Klasse. Der relativ frühe Testzeitpunkt – vier Monate vor Ende der achten Klasse – ist mit Absicht gewählt, da auf diese Weise den Schülern und Lehrkräften genügend Zeit bleibt, dem Standort der Klasse im Hinblick auf den Haupt- bzw. Mittleren Schulabschluss Rechnung tragen und rechtzeitig Fördermaßnahmen einleiten zu können.

[5] Das Kompetenz-Konzept der Bildungsstandards unterscheidet sich dementsprechend von den sog. „Schlüsselkompetenzen“ (fachliche, methodische, soziale und personale Kompetenz) der berufspädagogischen Diskussion. Zum Konzept der Bildungsstandards s. die sog. Klieme-Expertise, zugänglich u. a. beim BMBF (http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf).

Der Aufbau der VERA-8-Testaufgaben

Die Testaufgaben bestehen aus einer Anleitung, einem Text bzw. einer Abbildung (dem „Stimulus") und aus teilweise mehreren Aufgabenstellungen (den „Items"). Die Items sollen möglichst unabhängig voneinander lösbar sein. Die Lösung kann in Form einer Ankreuzaufgabe, als Lücken- bzw. Kurzantwort oder mit ausführlicher Darlegung des Lösungswegs abgefordert werden.

Die in den VERA-Testheften eingesetzten Aufgaben wurden von erfahrenen Lehrkräften aus allen Schulformen und allen Bundesländern entwickelt und erprobt, von mit den Bildungsstandards vertrauten Wissenschaftlern aus den jeweiligen Fachdidaktiken bewertet und überarbeitet sowie schließlich ein Jahr vor ihrem Einsatz an einer Stichprobe von ca. 3.000 Schülern erprobt und normiert.

Dieser aufwändige, statistisch ausgewertete Vortest soll zum einen sicherstellen, dass die auf ihre fachdidaktische Güte überprüften Aufgaben fair (also z. B. geschlechterneutral, Minderheiten nicht benachteiligend etc.) und „trennscharf" sind (d.h., dass schwierigere Aufgaben eher von stärkeren Schülern eher als von schwächeren gelöst werden). Zum anderen werden über diesen Vortest realistische „Schwierigkeitswerte" gewonnen, die die Grundlage für die Zusammenstellung der Testhefte und die Ergebniswertung der Vergleichsarbeiten bilden.

Die statistischen Berechnungen, die die Aufgabeneignung prüfen und den Schwierigkeitswert ergeben, erfordern eine für manche Lehrkräfte ungewohnte Auswertung: Es wird nur „richtig" oder „falsch" gewertet; eine Teilrichtigkeit ist ebenso wie eine Gewichtung mit unterschiedlich hohen Punktzahlen nicht vorgesehen, und es wird eine oft als eng empfundene zeitliche Taktung vorgegeben. Der Verzicht auf unterschiedliche Punktzahlen liegt in der Berücksichtigung der empirisch ermittelten Schwierigkeit begründet (s.o.). Bezüglich des „Alles-oder-Nichts-Prinzips" der Wertung der einzelnen Items sei darauf verwiesen, dass dieses zum einen durch die Kleinteiligkeit der Teilaufgaben und zum anderen durch deren Anordnung nach Schwierigkeit kompensiert wird (zu Beginn des Testheftes stehen tendenziell die eher leichten, zum Schluss die eher schwierigen Aufgaben). Auch erlaubt dieses Prinzip eine zeitökonomische Korrektur.

Bei den in VERA verwendeten Aufgaben ist schließlich zu beachten, dass es sich um *Test*aufgaben handelt; sie sollen für Überprüfungszwecke einzelne Aspekte der Bildungsstandards möglichst trennscharf, isoliert und kleinschrittig *abprüfen*. Für den Kompetenzerwerb im Hinblick auf die umfassenden Bildungsstandards sind spezifische *Lern*aufgaben jedoch grundsätzlich besser geeignet. Durch die hiermit vorliegende Handreichung soll es aber möglich werden, auch die Testaufgaben kompetenzfördernd und lernwirksam im Unterricht einzusetzen.

Testauswertung und Ergebnisinterpretation

Eine einfache Form der Ergebnisrückmeldung ist die Angabe, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler eine (Teil-) Aufgabe korrekt gelöst haben (Lösungshäufigkeit). Wenn die Lehrkräfte hierzu Vergleichswerte erhalten (z. B. Ergebnisse anderer Schulen des gleichen Typs), ist ihnen eine näherungsweise Einschätzung ihrer Klassen oder von Schülergruppen möglich.

Da jedoch von den meisten Aufgaben die Schwierigkeitsgrade bekannt sind, kann durch eine statistische Berechnung auch ein Punktwert zurückgemeldet werden. Diese Werte (wie sie auch von PISA bekannt sind) werden inhaltlich illustriert durch Beschreibungen der Kompetenzniveaus, die den Stand der Schülerinnen und Schüler verallgemeinernd charakterisieren.

Das Testergebnis bezogen auf einzelne Schüler/-innen bedarf ergänzender diagnostischer Informationen, z. B. zum individuellen Lernfortschritt. Klassenergebnisse sind hingegen als zuverlässig und von hohem Wert zu betrachten. Um diesen Wert, der den Ausgangspunkt für eine kompetenzorientierte Unterrichtsentwicklung bilden kann, nicht zu gefährden, sind verengende Vorbereitungsmaßnahmen („*teaching to the test*") sowie unzulässige Hilfestellungen bei der Testdurchführung zu vermeiden.

2. Fachallgemeine Erläuterungen

Kompetenzorientiertes Unterrichten von Mathematik

Zuerst werden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Danach werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

1. Die Bildungsstandards Mathematik

Wie – fächerübergreifend – in Abschnitt I ausgeführt worden ist, beschreiben Bildungsstandards die fachbezogenen *Kompetenzen,* die Schüler bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen *Fachinhalten* erworben werden können. Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch *Aufgaben*, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die *Qualität des Unterrichts* zu steigern (siehe II.3) und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine *Orientierung* über verbindliche Zielerwartungen bieten ebenso wie Möglichkeiten zur *Überprüfung*, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind.

Konkret werden bei den Bildungsstandards *Mathematik* für den mittleren Schulabschluss drei „Dimensionen“ unterschieden, die man als „Prozess“-, „Inhalts“- und „Anspruchs“-Dimension bezeichnen kann:

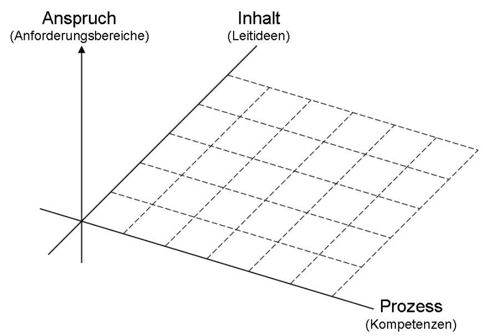


Abb. II.1: Kompetenzmodell

1) Die „*Prozess*“-Dimension besteht aus den allgemeinen mathematischen *Kompetenzen*, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind dies[6]:
   - Mathematisch argumentieren (K1),
   - Probleme mathematisch lösen (K2),
   - Mathematisch modellieren (K3),
   - Mathematische Darstellungen verwenden (K4),
   - Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),
   - Mathematisch kommunizieren (K6).

   Diese Aufschlüsselung von „mathematischer Kompetenz“ in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Parallel zum Erwerb von Kompetenzen sind im Unterricht auch mathematisches Grund*wissen* sowie Grund*vorstellungen* von mathematischen Begriffen und Methoden langfristig aufzubauen.

[6] Genauer werden die Kompetenzen im Buch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) beschrieben.

2) Die „*Inhalts*"-Dimension wird bestimmt von den inhaltsbezogenen *Leitideen,* anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind dies:
   - Leitidee Zahl (L1),
   - Leitidee Messen (L2),
   - Leitidee Raum und Form (L3),
   - Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
   - Leitidee Daten und Zufall (L5).

   Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen*, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und mit deren Hilfe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die – eher „phänomenologisch" orientierten – Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen *Stoffgebieten* der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll stärker als bisher die *Verbindungen* zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z.B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext).

3) Die „*Anspruchs*"-Dimension ergibt sich aus den *Anforderungsbereichen,* die den *kognitiven Anspruch* kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten – vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben – auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. Bei den Mathematik-Standards unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche (d.h. Anspruchsniveaus), die kurz mit
   - „Reproduzieren" (AB I),
   - „Zusammenhänge herstellen" (AB II),
   - „Verallgemeinern und reflektieren" (AB III)

   überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend.
   Je nachdem, wie viele Kompetenzen auf welchen dieser Anspruchsniveaus gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet[7]. Dieses *theoretische* Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der *empirischen* Schwierigkeit der Aufgabe verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch schwieriger sind; mehr dazu im folgenden Abschnitt).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen „Kompetenzmodells" ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter, 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik in ihrer Präambel ausdrücklich: Schüler sollen im Mathematikunterricht drei *Grunderfahrungen* kennenlernen, nämlich Mathematik
- als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- als geistige Schöpfung und Welt eigener Art,
- als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten.

Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u.a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein. Dies wird in Abschnitt IV exemplarisch deutlich, wenn es um die Förderung von Modellierungskompetenz geht.

2. Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik ist *theoretischer* Natur. Interessant ist nun natürlich zu wissen, wie schwierig einzelne Aufgaben tatsächlich sind und was Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge in Bezug auf diese Aufgaben tatsächlich „können"; hierfür braucht man *empirische* Daten. Damit kann man dann sowohl die Aufgaben – nach

[7] Siehe die Tabelle am Anfang des Abschnitts III.

Schwierigkeit – als auch die Schüler – nach Leistungsfähigkeit – gewissen „Stufen" zuordnen, was allen Beteiligten hilfreiche Orientierungen geben kann.

Wie bereits in Abschnitt I ausgeführt worden ist, ist der Vera-8-Test aus Aufgaben zusammengesetzt, die an einer repräsentativen Stichprobe von annähernd 3000 Achtklässlern getestet worden sind. Die Ergebnisse sind dann aus rein technischen Gründen mithilfe gängiger statistischer Verfahren auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert worden[8]. Jeder Aufgabe ist hierdurch also ein solcher Kennwert, der ein Maß für die relative *Schwierigkeit der Aufgaben* ist, zugeordnet. Leichte Aufgaben haben somit auf dieser Skala Kennwerte von 400 und darunter, schwierige Aufgaben Kennwerte von 600 und darüber. Selbstverständlich stellt das, was als „leicht" oder „schwer" eingestuft wird, nur eine Momentaufnahme dar, die zu einem späteren Zeitpunkt – je nach unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen – auch anders ausfallen kann.

Wie ebenfalls in Abschnitt I ausgeführt, kann man die mathematische *Kompetenz von Schülern* in direkte Beziehung zur Schwierigkeit von Aufgaben setzen und auf derselben Skala abbilden[9]. Auf diese Weise ist eine inhaltliche Beschreibung von bestimmten Intervallen auf dieser Skala, *Kompetenzstufen* genannt[10], und damit auch eine Setzung von Standards aufgrund inhaltlicher Kriterien möglich. Sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss ist die Skala – jeweils abschlussspezifisch – in fünf solche Intervalle eingeteilt worden (Kompetenzstufen I bis V), wobei das erste nach unten und das letzte nach oben offen sind. Die folgende Abbildung zeigt die Stufen, wie sie für den mittleren Schulabschluss definiert worden sind; die „Perzentile" geben dabei an, wie viel Prozent der Aufgaben bzw. der Schüler bei idealer Verteilung bis zu den entsprechenden Skalenwerten vorhanden sind.

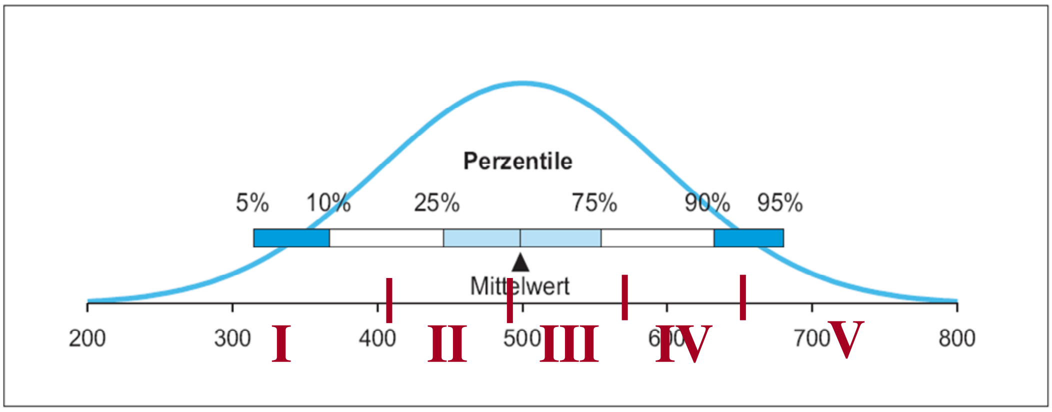


Abb. II.2: Zusammenhang der Perzentile und Kompetenzstufen

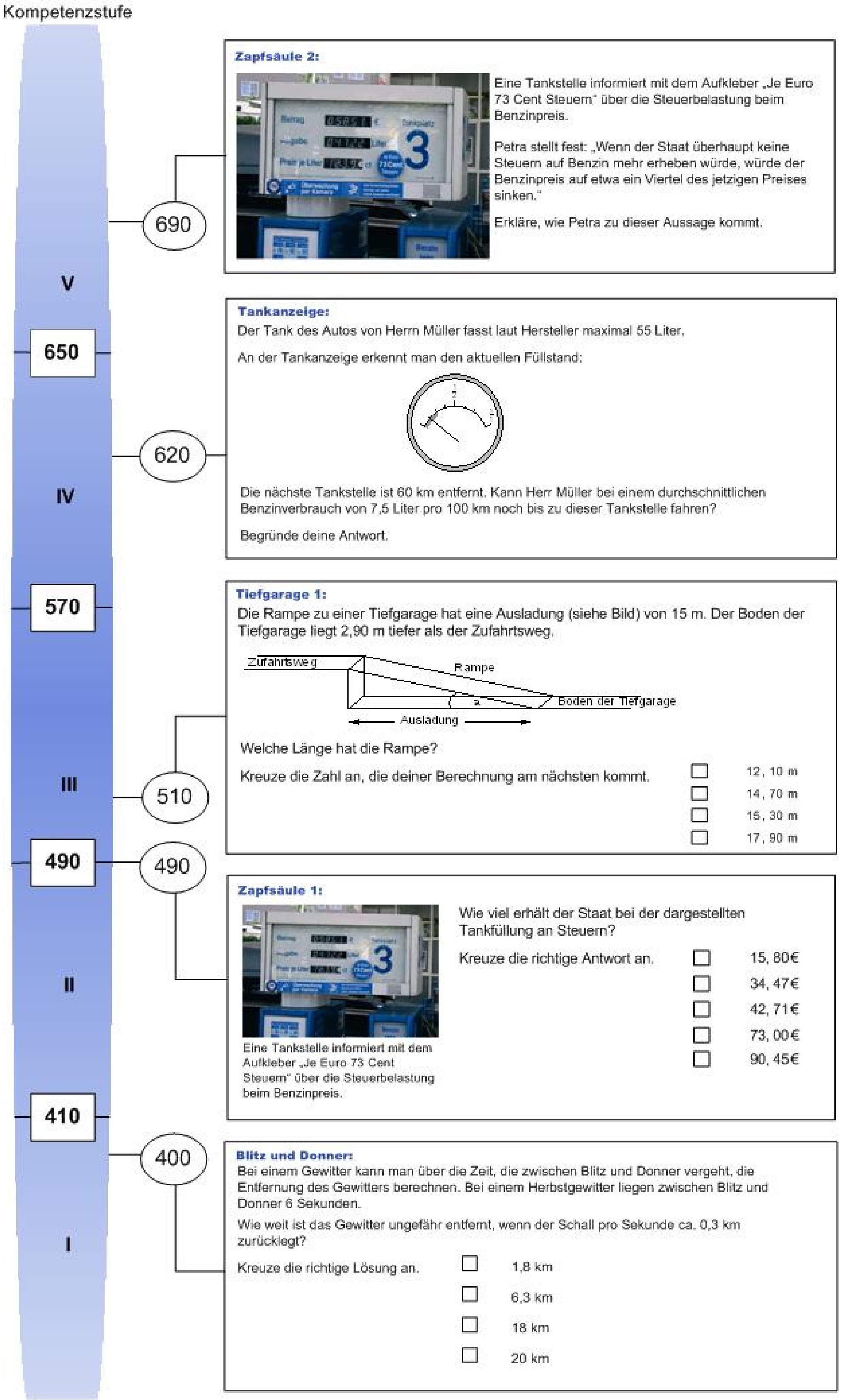
In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet worden (wieder für den mittleren Schulabschluss).

---

[8] Diese Transformation ist im Grunde willkürlich und wurde unter pragmatischen Gesichtspunkten gewählt (Anschlussfähigkeit an PISA).

[9] Genauer wurde die Skala der Bildungsstandards so normiert, dass ein Schüler mit einem bestimmten Personen-(Fähigkeits-)Kennwert eine Aufgabe mit demselben Aufgaben-(Schwierigkeits-)Kennwert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa zwei Drittel lösen kann.

[10] Dieser Begriff könnte insofern missverständlich sein, als Stufen der mathematischen Kompetenz von Schülern gemeint sind, nicht Stufungen der einzelnen Kompetenzen. Man könnte vielleicht besser – bezogen auf die Aufgaben – von „Schwierigkeitsstufen" sprechen. Genauere Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen zu den Kompetenzstufen für den Mittleren Schulabschluss einschließlich vieler illustrierender Beispiele finden sich im Buch „Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I" (Hrsg. M. Katzenbach u.a., Cornelsen-Scriptor 2009, Kap. 3.4, S. 15ff).



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abb. II.3: Kompetenzstufen mit Beispielaufgaben

Als Ausgangswert für diese Stufen-Einteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schüler, die diesen Mindeststandard nicht erfüllen, haben ganz besonderen *Förderbedarf*.

Der *Regelstandard*, den die Schüler des betreffenden Bildungsgangs zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Wer den Regelstandard für den mittleren Schulabschluss erfüllt, soll über „Sekundarstufe I-typische“ mathematische Kompetenzen verfügen. Hierzu gehört eine mathematische Grundbildung[11], die u.a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen einschließt und die einen Beitrag dazu leistet, dass Jugendliche in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger“ handeln können. Der entsprechende Schwellenwert liegt etwa in der Mitte von Kompetenzstufe III. Für den Hauptschulabschluss sind die Anforderungen geringer angesetzt; in jedem Fall soll mathematische Grundbildung hier das Arbeiten mit Standardmodellen sowie basale arithmetische und geometrische Begriffsbildungen mit einschließen.

3. Unterrichtsqualität

Aufgaben wie die im Vera-Test enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen *Förderung* von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben *per se* bei den Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste *Auswahl* von Aufgaben und deren adäquate *Behandlung* im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) *selbst* zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren u. v. a. m. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Einige diesbezügliche Anregungen sind in Abschnitt IV zu finden; viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z.B. in Bruder/Leuders/Büchter (2008), in Leuders XX oder in Blum u.a. (2007).

Die eben stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „*Unterrichtsqualität*“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden[12]:

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die Schülern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren, usw.) und bei der auch immer vielfältige Vernetzungen hergestellt werden sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität.
- Eine konsequente *kognitive Aktivierung* der Lernenden, wo der Unterricht geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine

[11] Zu diesem Begriff vergleiche man auch die Ausführungen in Klieme/Neubrand/Lüdtke (2001).
[12] Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum u. a. (2007).

störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird, Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind, u. a. m.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u a. Helmke, 2003, Baumert u.a., 2004). Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums *kompetenzorientierter Aufgaben*, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d.h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler gleichermaßen geeignet sind). Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen. In Abschnitt IV geben wir etwas konkretere Hinweise, wie Kompetenzen (hier speziell: die Modellierungskompetenz) im Unterricht gefördert werden können.

4. Testaufgaben

„Vergleichsarbeiten Mathematik 8. Klasse“

Übersichtstabelle

Nr.	Name der Aufgabe	Item	Kompetenz						Leitidee					AB
			K1	K2	K3	K4	K5	K6	L1	L2	L3	L4	L5	
1	Apfelkauf	M1403701__Apfelkauf			x		x		x					I
2	Zwanzig Prozent	M1403801__Zwanzig Prozent					x		x					I
3	Termberechnung	M1401701__Termberechnung					x		x					I
4.1	Fahrradverleih	M1402101__Fahrradverleih			x		x		x					II
4.2	Fahrradverleih	M1402102__Fahrradverleih			x		x		x					II
4.3	Fahrradverleih	M1402103__Fahrradverleih			x		x	x	x					I
5.1	Ganze Zahlen	M1403201__Ganze Zahlen					x		x					I
5.2	Ganze Zahlen	M1403202__Ganze Zahlen		x			x		x					I
5.3	Ganze Zahlen	M1403203__Ganze Zahlen		x			x		x					II
6	Skianzug	M1403501__Skianzug	x		x		x		x					II
7.1	Waschpulver	M1400401__Waschpulver			x		x	x	x					I
7.2	Waschpulver	M1400402__Waschpulver			x		x	x	x					I
8.1	Internetauktion	M5401201__Internetauktion				x	x						x	I
8.2	Internetauktion	M5401202__Internetauktion			x	x	x		x					I
8.3	Internetauktion	M5401203__Internetauktion			x	x	x						x	II
9.1	Steckwürfelfiguren	M5400401__Steckwürfelfiguren			x			x					x	I
9.2	Steckwürfelfiguren	M5400403__Steckwürfelfiguren			x			x					x	I
10.1	Gummibären	M5401101__Gummibären			x		x	x					x	I
10.2	Gummibären	M5401102__Gummibären			x		x	x					x	II
10.3	Gummibären	M5401103__Gummibären	x		x		x	x					x	III
11.1	Unfallstatistik	M5401901__Unfallstatistik			x		x	x	x					I
11.2	Unfallstatistik	M5401902__Unfallstatistik			x		x	x	x					II
11.3	Unfallstatistik	M5401903__Unfallstatistik			x	x		x					x	II
11.4	Unfallstatistik	M5401904__Unfallstatistik	x		x		x	x					x	III
12.1	Kleinanzeigen	M4400301__Kleinanzeigen			x							x		I
12.2	Kleinanzeigen	M4400302__Kleinanzeigen			x		x					x		I
12.3	Kleinanzeigen	M4400303__Kleinanzeigen		x	x		x					x		I
12.4	Kleinanzeigen	M4400304__Kleinanzeigen			x		x					x		II
13	Fahrrad	M4402001__Fahrrad			x	x		x				x		II
14.1	Kanutour	M4402401__Kanutour			x		x	x				x		III
14.2	Kanutour	M4402402__Kanutour			x		x	x				x		II
15.1	Mitschüler	M4400501__Mitschüler		x	x		x					x		II
15.2	Mitschüler	M4400502__Mitschüler			x		x					x		II
15.3	Mitschüler	M4400503__Mitschüler	x	x	x		x	x				x		II
16.1	Streichholzmuster	M4402501__Streichholzmuster		x		x	x					x		I
16.2	Streichholzmuster	M4402502__Streichholzmuster		x		x	x					x		III
16.3	Streichholzmuster	M4402503__Streichholzmuster		x		x	x					x		III
17	Würfelnetze	M3402901__Würfelnetze				x					x			I
18.1	Im Koordinatensystem	M4400901__Im Koordinatensystem				x	x				x			I
18.2	Im Koordinatensystem	M4400902__Im Koordinatensystem		x		x	x				x			I
18.3	Im Koordinatensystem	M4400903__Im Koordinatensystem				x	x				x			II
19	Dreiecksfläche	M2401501__Dreiecksfläche	x			x	x			x				II
20	Quadratfläche färben	M2401901__Quadratfläche färben				x	x			x				I
21	Feuerlöschdecke	M2401701__Feuerlöschdecke		x			x			x				I
22	Rechteckszeichnung	M2400701__Rechteckszeichnung		x		x	x			x				II
23	Quadrat und Dreieck	M3401101__Quadrat und Dreieck				x	x				x			I
24.1	Würfel erforschen	M2404601__Würfel erforschen					x			x				I
24.2	Würfel erforschen	M2404602__Würfel erforschen					x			x				I
25	Trapez	M2404501__Trapez	x			x	x	x		x				III

Aufgabe 1: Apfelkauf

Aufgabentext

M1403701a

4 kg Äpfel kosten 9,60 €.

Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 1: Apfelkauf	
Item: M1403701	
RICHTIG	
	14,40 €
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

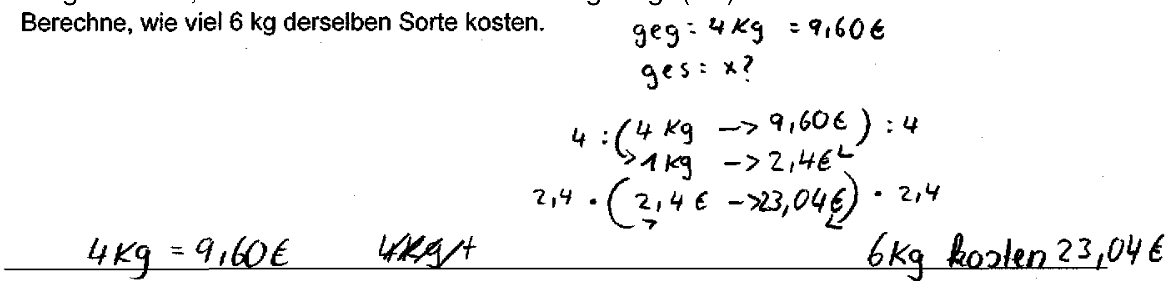
Diese Aufgabe ist mithilfe eines Standardverfahrens („Dreisatz“) lösbar und kann daher der Leitidee Zahl (L1) zugeordnet werden. Da diesem Verfahren eine proportionale Zuordnung zugrundeliegt, gehört die Aufgabe ebenso zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4).
Die Schüler stellen zunächst ein direkt erkennbares und vertrautes mathematisches Modell auf (K3) und errechnen mit dessen Hilfe den gesuchten Preis (K5). Beim Aufstellen des Modells können unterschiedliche Proportionalitäts-Vorstellungen angewendet werden, z. B. die des Vervielfachens, d. h. zum anderthalbfachen Gewicht gehört der anderthalbfache Preis. Alternativ können sie von der Grundvorstellung der Proportionalität ausgehend beispielsweise den Preis von 2,40 € pro Kilo verwenden.
Diese Aufgabe wird dem Anforderungsbereich I zugeordnet, da die Lösung eine direkte Anwendung eines grundlegenden Verfahrens erfordert.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Beim Kombinieren der Grundvorstellungen des Vervielfachens und des Addierens unterlaufen Fehler. In der nachstehenden Schülerlösung ist erkennbar, dass zunächst der Preis für die Einheit (hier: 1kg) richtig errechnet wird, dann aber ein Fehler bei der Ermittlung des Preises der Vielheit unterläuft. Statt den Preis für 2kg zu den gegebenen 9,60 € zu addieren, wird lediglich der Preis für 1kg addiert und somit der Preis für 5kg Äpfel berechnet (Fehllösung 12€) (K3).

9,60 : 4 = 2,4   2,40 + 9,60 = 12

- Die Aufgabenstellung wird ungenau gelesen und 9,60€ als Kilopreis gedeutet, und der sich ergebende Betrag wird nicht reflektiert (Fehllösung 57,60€) (u.a. K3, K5).
- Die Grundvorstellung des Vervielfachens wird auf nicht zusammengehörige Größen angewendet, wie die nächste Schülerlösung zeigt (K3).


Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

geg: 4 Kg = 9,60 €
ges: x?

4 : (4 Kg -> 9,60 €) : 4
1 Kg -> 2,4 €
2,4 · (2,4 € -> 23,04 €) · 2,4

4Kg = 9,60€ 4Kg/4 6Kg kosten 23,04€

- Grundvorstellungen zu Prozent und zu Proportionen werden miteinander vermischt (K3).
- Die gegebenen Größen werden ohne einen Bezug zur Realität miteinander kombiniert (K3).

Aufgabe 2: Zwanzig Prozent

Aufgabentext

M1403801a

Berechne 20% von 150 €.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 2: Zwanzig Prozent	
Item: M1403801	
RICHTIG	
	30 € Anmerkung: Die Einheit muss angegeben werden.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabe ist die Prozentrechnung sachgerecht anzuwenden, weshalb die Aufgabe zur Leitidee Zahl (L1) gehört.

Man muss technisch arbeiten (K5), um den gesuchten Prozentwert zu ermitteln. Dabei können verschiedene Grundvorstellungen zur Prozentrechnung aktiviert werden. Wird z.B. die Hundertstel-Vorstellung angewandt, wird der gesuchte Wert durch „$\frac{20}{100} \cdot 150€$“ oder „0,2·150€“ ermittelt. Alternativ kann auch 10% von 150€ bestimmt und der erhaltene Prozentwert verdoppelt werden.
Diese Aufgabe ist dem Anforderungsbereich I zuzuweisen, da in einem abgegrenzten Gebiet ein grundlegendes Verfahren direkt angewendet wird.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Umrechnung des Prozentsatzes in einen Dezimal- oder in einen Hundertstel-Bruch gelingt nicht (Fehllösungen: 3€ bzw. 3000€) (K5).
- Der gegebene Grundwert wird als Prozentwert gedeutet, und dieser wird durch den Prozentsatz dividiert (Fehllösungen: 7,50€ oder 750€). Die abgebildete Schülerlösung illustriert diesen Fehlertyp (K5).

M1403801a

Berechne 20 % von 150 €.

geg: Pw : 150€   20 % ≙ 150€
P: 20%   100 % ≙ ?€
ges: Gw: ?€ $x = \frac{150 \cdot 100}{20} = 750$

- Beim Bilden des Anteils wird nur die Einheit ermittelt, so dass z. B. nur 1% oder 10% von 150€ angegeben werden (Fehllösungen: 1,50€ bzw. 15€) (K5).

Aufgabe 3: Termberechnung

Aufgabentext

M1401701a

Berechne 5 + 2 · (4 + 1).
Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
12	14	15	29	35

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

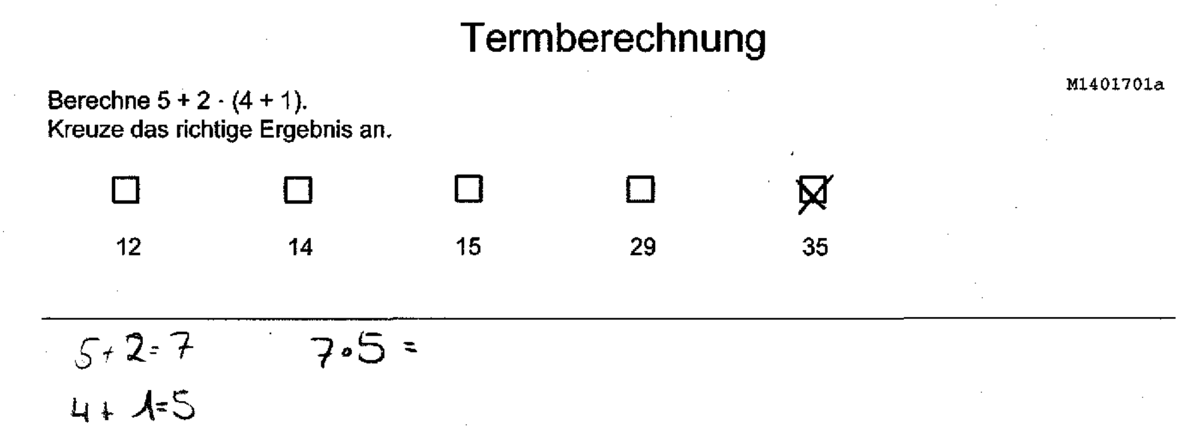
Aufgabe 3: Termberechnung	
Item: M1401701	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört der Leitidee Zahl (L1) an, da zur Ermittlung des Werts des Terms elementare Rechenoperationen unter Beachtung einfacher Vorrangregeln durchgeführt werden müssen.
Die Aufgabe wird rein technisch gelöst (K5).
Da nur elementares Rechnen in einem wiederholenden Zusammenhang nötig ist, gehört die Aufgabe zum Anforderungsbereich I.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- (Fehllösung 12): Das Multiplikationszeichen wird übersehen, und es werden lediglich alle Zahlen addiert (Rechnung: 5 + 2 + 4 + 1 = 12) (K5).
- (Fehllösung 14): Unter Missachtung der Klammer, jedoch unter Beachtung des Vorrangs der Multiplikation vor der Addition, wird von links nach rechts gerechnet (Rechnung: 5 + 2 ▪ 4 + 1 = 14) (K5).
- (Fehllösung 29): Zuerst werden 5 und 2 addiert. Diese Summe wird anschließend mit 4 multipliziert, und schließlich wird 1 addiert. Mehrere Vorrangregeln werden somit missachtet (Rechnung: (5 + 2) ▪ 4 + 1) (K5).
- (Fehllösung 35): Um 5 + 2 wird eine Klammer gedacht. Dann werden zuerst die Summen in beiden Klammern gebildet und anschließend miteinander multipliziert (vgl. Schülerlösung) (K5).



Termberechnung

M1401701a

Berechne 5 + 2 · (4 + 1).
Kreuze das richtige Ergebnis an.

☐ 12 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 29 ☒ 35

5 + 2 = 7 7 ∘ 5 =
4 + 1 = 5

Aufgabe 4: Fahrradverleih

Teilaufgabe 4.1: Fahrradverleih

Aufgabentext

M1402101a

Beim Fahrradverleih beträgt die Leihgebühr für ein Fahrrad pro Woche 21 €.

Familie Meier leiht drei Fahrräder für zwei Wochen und bekommt 10% Rabatt gewährt.

Wie hoch ist die Leihgebühr?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 4.1: Fahrradverleih	
Item: M1402101	
RICHTIG	
	113,40 € (auch korrekt: ca. 113 €) Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 4.2: Fahrradverleih

Aufgabentext

M1402102a

Eine Schulklasse leiht 18 Fahrräder für eine Woche und bezahlt 320 €.

Wie viel Prozent Rabatt wurde gewährt?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 4.2: Fahrradverleih	
Item: M1402102	
RICHTIG	
	Es wurden ca. 15 % Rabatt (genaues Ergebnis: 15,343915…%) gewährt. Alle korrekt gerundeten Werte werden akzeptiert!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 4.3: Fahrradverleih

Aufgabentext

M1402103a

Der Besitzer des Fahrradverleihs kauft neue Fahrräder. Er bezahlt für jedes Fahrrad 410 €.

Wie viele Wochen muss ein Fahrrad zur Leihgebühr von 21 € mindestens verliehen werden, damit die Einnahmen so hoch sind wie der Kaufpreis?

Mögliche Reparaturkosten und Ähnliches bleiben unberücksichtigt.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 4.3: Fahrradverleih	
Item: M1402103	
RICHTIG	
	Ca. 20 Wochen (akzeptiert wird auch ca. 19,5 Wochen)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen bzw. Größen sowie Prozenten geht.
Zur Lösung der ersten beiden Teilaufgaben sind auf der Grundlage von Vorstellungen zum Prozentbegriff geeignete Modelle auszuwählen (K3), um die gesuchten Größen (Leihgebühr oder Rabatt in Prozent) berechnen zu können (K5).
In Teilaufgabe 2 müssen zunächst die Leihgebühren ohne Rabatt und anschließend die prozentuale Ermäßigung berechnet werden. Die in diesem Zusammenhang durchzuführenden Rechenverfahren sind mehrschrittig (K5).
Bei Teilaufgabe 3 beruht die Auswahl des richtigen mathematischen Modells auf einer Divisions-Vorstellung im Sinne des Aufteilens (K3). Die anschließend erforderliche Rechnung ist elementar (K5). Alle zur Bearbeitung dieser Teilaufgabe benötigten Informationen sind dem Aufgabentext zu entnehmen (K6).
Aufgrund des mehrschrittigen Lösungsprozesses ist den Teilaufgabe 1 und 2 jeweils der Anforderungsbereich II zuzuordnen. Teilaufgabe 3 dagegen gehört aufgrund der direkten Anwendbarkeit mathematischer Kompetenzen sowie des einschrittigen Lösungsweges dem Anforderungsbereich I an.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:
- Die Anzahl der geliehenen Fahrräder bzw. die Leihdauer wird vernachlässigt. So wird beispielsweise die Leihgebühr für drei Räder in einer Woche bei 10% Rabatt berechnet (Fehllösung: 56,70 €) (K3, K6).
- Es wird nicht die Leihgebühr, sondern die Höhe des Rabatts in Euro bestimmt (Fehllösung: 12,60 €) (K3, K6).
- Die Leihgebühr ohne den Rabatt von 10% wird berechnet (Fehllösung: 126 €) (K3, K6).
- Anstelle der 10% werden 10 € als Rabatt von der Leihgebühr abgezogen (Fehllösung: 116 €) (K3, K5).

Zu [02]:
- Es wird der Rabatt in Euro ermittelt (Fehllösung: 58 €) (K3, K6).
- Die Einsparung von 58 € wird direkt in Prozent „umgewandelt“ (Fehllösung: 58%; 5,8% oder 0,58%).
- Die Einsparung in Euro (58 €) wird bei der Berechnung der prozentualen Ermäßigung in Bezug zum reduzierten Preis (320 €) gesetzt (Fehllösung: 18%) (K3).
- Es wird nicht die prozentuale Ermäßigung, sondern der prozentuale Anteil des zu zahlenden Betrags bestimmt (Fehllösung: 85%) (K3).

Zu [03]:
- Das Ergebnis wird inhaltlich falsch gerundet (Fehllösung: 19) (K3, K5).

Aufgabe 5: Ganze Zahlen

Teilaufgabe 5.1: Ganze Zahlen

Aufgabentext

Gegeben sind alle ganzen Zahlen von -10 bis 10: -10; -9; -8; …; 8; 9; 10 .

M1403201a

Wie viele Zahlen sind das?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
9	10	20	21

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 5.1: Ganze Zahlen	
Item: M1403201	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 5.2: Ganze Zahlen

Aufgabentext

M1403202a

Wähle aus den gegebenen Zahlen zwei **verschiedene** Zahlen für a und b so aus, dass gilt: a + b = -18.

Gib zwei solche Zahlen a und b an:

a = ___________   b = ___________

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 5.2: Ganze Zahlen	
Item: M1403202	
RICHTIG	
	Angabe zweier verschiedenen Zahlen, deren Summe -18 ergibt. Z.B.: a = -8; b = -10 ODER: a= -10; b= -8
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 5.3: Ganze Zahlen

Aufgabentext

M1403203a

Wähle aus den gegebenen Zahlen zwei **verschiedene** Zahlen für a und b so aus, dass sich für $(a + b)^2$ der größtmögliche Wert ergibt.

Gib zwei solche Zahlen a und b an:

a = ___________ b = ___________

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 5.3: Ganze Zahlen	
Item: M1403203	
RICHTIG	
	a= -10; b= -9 (bzw. a= -9; b= -10) ODER: a= 10; b= 9 (bzw. a= 9; b= 10)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da es um den verständigen Umgang mit ganzen Zahlen geht.

Bei Teilaufgabe 1 müssen die Schüler durch geschicktes Abzählen oder Berechnen die Anzahl der ganzen Zahlen in der angegebenen Menge bestimmen (K5). Aufgrund dieser rein reproduktiven Anforderungen wird diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zugewiesen.
Teilaufgabe 2 erfordert zur Lösung zusätzlich die Anwendung elementarer heuristischer Hilfsmittel und Strategien (K2). Dabei bietet es sich insbesondere an durch systematisches Probieren oder inhaltliche Überlegungen eine der möglichen Zahlenkombinationen (a = -8, b = -10 oder a = -10, b = -8) zu ermitteln. Aufgrund der direkten Anwendbarkeit bekannter Problemlösestrategien wird diese Teilaufgabe ebenfalls dem Anforderungsbereich I zugeordnet.
Zur Lösung der Teilaufgabe 3 sind dieselben Kompetenzen wie bei Teilaufgabe 2 anzuwenden. Allerdings sind die Anforderungen an das symbolische, technische und formale Arbeiten anspruchsvoller, da aufgrund der vorgegebenen Bedingung entweder mehrere Rechenschritte durchgeführt werden müssen oder aber ein verständnisorientierter Umgang mit den Rechenregeln zur Addition und Multiplikation rationaler Zahlen nötig ist. Vor diesem Hintergrund ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:
- Die Null wird nicht berücksichtigt (Fehllösung: 20) (K5).
- Es wird nur die Anzahl der negativen bzw. der positiven Zahlen ermittelt (Fehllösung: 10) (K5).

Zu [02]:
- Die beiden ausgewählten Zahlen sind nicht verschieden (Fehllösung: a = b = - 9).
- Es werden Zahlen außerhalb des angegebenen Bereichs einbezogen (z.B. Fehllösung: a = -28; b = 10).
- Das negative Vorzeichen des Ergebnisses wird vernachlässigt (Fehllösung: a = 8; b = 10) (K5).

Zu [03]:
- Die beiden ausgewählten Zahlen sind nicht verschieden (Fehllösung: a = b= 10).
- Es wird für $(a + b)^2$ nicht der *größtmögliche* Wert gefunden (z.B. Fehllösung: a = 8; b = 9) (K2, K5).

Aufgabe 6: Skianzug

Aufgabentext

M1403501a

Ein Skianzug hat im November 225 € gekostet. Nach Weihnachten wurde der Preis um 20% gesenkt. Anfang März wurde der Preis noch einmal um 30% gesenkt.

Jetzt kauft Maike den Anzug und freut sich: „Ich habe 50% gespart.“

Beurteile diese Aussage.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 1, 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 6: Skianzug	
Item: M1403501	
RICHTIG	
	Richtige Beurteilung der Aussage (Maikes Behauptung ist falsch!) und angemessene Begründung, in welcher auf die unterschiedlichen Grundwerte verwiesen wird. Anmerkung 1: Falls nicht gerechnet wird, so muss explizit auf die Änderung des Grundwerts hingewiesen werden. Wenn dann doch ein Rechenergebnis angegeben wird, so darf dieses auch falsch sein. Anmerkung 2: Akzeptiert werden auch Antworten, in denen die Behauptung als richtig beurteilt wird, sofern aus der Begründung ersichtlich ist, dass bei der zweiten Ermäßigung (um 30%) auch der ursprüngliche Preis zugrunde gelegt wurde. Auch in diesem Fall kann die Begründung auf rechnerischer und inhaltlicher Ebene erfolgen. Z.B.: Maikes Behauptung ist falsch. **Rechnerische Begründung 1:** Preis nach Weihnachten: 225 € · 0,8 = 180 € Preis Anfang März: 180 € · 0,7 = 126 € 126 € / 225 € = 0,56 Der Preis wurde nur um 44% gesenkt. ODER: Maikes Behauptung ist falsch. **Rechnerische Begründung 2:** 1 · 0,8 · 0,7 = 0,56 Der Preis wurde nur um 44% gesenkt. ODER: Maikes Behauptung ist falsch. **Inhaltliche Begründung:** Die beiden Prozentsätze beziehen sich auf unterschiedliche Grundwerte (Preise). Deshalb darf man die Prozentsätze nicht addieren.
FALSCH	
	Alle falschen, fehlerhaften, unvollständigen Antworten. Z.B.: Maikes Behauptung ist falsch, weil sie nicht berücksichtigt hat, dass Prozentsätze nicht einfach addiert werden dürfen.

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da hier eine Aussage zu einer zweimaligen prozentualen Preissenkung beurteilt werden muss.
Hierzu ist der Realsituation unter Rückgriff auf sinntragende Vorstellungen zur Prozentrechnung ein passendes mathematisches Modell zuzuordnen (K3), mit dessen Hilfe anschließend – falls für nötig erachtet – der jeweils neue Preis nach der Ermäßigung sowie die anteilige Ersparnis berechnet werden können (K5). Auf diesem Hintergrund ist die

Aussage dann begründet zu widerlegen oder – falls unter „Preis“ beide Male der Ausgangspreis von 25 Euro verstanden wird – zu bestätigen. Dies kann nicht nur auf rechnerischer Ebene, sondern auch auf rein inhaltlicher Ebene durch Bezug auf die jeweils verwendeten Grundwerte beider Prozentsätze erfolgen (K1).
Aufgrund der mehrschrittigen Modellierung, deren Ergebnisse zu interpretieren und zur Beurteilung der gegebenen Aussage zu nutzen sind, sowie der hiermit verzahnten mehrschrittigen Argumentation wird die Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Die Aussage wird lediglich als falsch bzw. richtig eingestuft, diese Entscheidung wird jedoch nicht begründet (K1).
- Die Aussage wird als richtig beurteilt, ohne dass aus der Darlegung ersichtlich wird, dass als Grundwert für beide Ermäßigungen der ursprüngliche Preis angesehen wurde, d.h. die Prozentwerte werden offenbar gedankenlos addiert (K1, K3).

Aufgabe 7: Waschpulver

Teilaufgabe 7.1: Waschpulver

Aufgabentext

Im Rahmen einer Werbeaktion wird das Waschpulver WASCHI in einer 1,575 kg-Packung angeboten.

Diese Packung kostet genauso viel wie die Normalpackung zu 1,350 kg Waschpulver.

M1400401a

Überprüfe die Behauptung „+ 15%“ durch eine Rechnung.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 7.1: Waschpulver	
Item: M1400401	
RICHTIG	
	Eine richtige Rechnung mit zutreffender Beschreibung des Überprüfungsergebnisses. <u>Anmerkung:</u> Auch mathematisch korrekt gerundete Werte (z.B. 1,553 kg oder 1,55 kg) werden akzeptiert. Die Einheit muss nicht angegeben werden! Der Rechenweg und dessen Notation ist beliebig, sofern mathematisch korrekt. Z.B.: $\frac{1{,}575kg}{1{,}35kg} \approx 1{,}17$ Die Aussage stimmt nicht, weil mehr als 15% vorhanden ist. ODER: 1,35 kg ·1,15 = 1,5525 kg Es ist mehr Waschpulver in der Werbepackung als in der Werbung versprochen. ODER 1,35 kg ·1,15 = 1,5525 kg Die Aussage stimmt. Es ist sogar mehr Waschpulver drin als versprochen.
FALSCH	
	alle anderen Antworten Z.B.: $\frac{1{,}575kg}{1{,}35kg} \approx 1{,}17$ (ohne Aussage)

Teilaufgabe 7.2: Waschpulver

Aufgabentext

M1400402a

Für einen Korb Wäsche benötigt man ungefähr 75 g dieses Waschpulvers. Wie viele Körbe mit Wäsche kann man mit einer **Normalpackung** WASCHI waschen?

Gib das Ergebnis an.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 7.2: Waschpulver	
Item: M1400402	
RICHTIG	
	18 (Wäschekörbe)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Zahl (L1), da zur Lösung der Aufgabe elementare Rechenverfahren mit Zahlen bzw. Größen durchzuführen und die Prozentrechnung sachgerecht anzuwenden sind.
Bei Teilaufgabe 1 ist zur gegebenen Sachsituation unter Rückgriff auf Prozent-Vorstellungen ein passendes mathematisches Modell zu finden (K3), mit dessen Hilfe die Werbeaussage „+15% Gratis“ rechnerisch überprüft werden kann (K5).
Bei der 2. Teilaufgabe erfolgt die Auswahl eines geeigneten mathematischen Modells (K3) auf der Grundlage von Vorstellungen zur Division (im Sinne des Aufteilens). Die auszuführende Grundrechenoperation ist sehr einfach (K5). Zur Bearbeitung beider Items müssen die benötigten Informationen dem Aufgabentext bzw. dem Bild entnommen werden (K6).
Aufgrund der direkten Anwendbarkeit bekannter Standardmodelle und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet gehören beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I an.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:
- Trotz richtig durchgeführter Rechnung wird die Werbeaussage nicht als richtig bzw. falsch ausgewiesen (K3).
- Als Grundwert wird der Inhalt einer Packung der Werbeaktion (1,575 kg) verwendet (K6).
- Die Differenz der beiden Waschmittelpackungen von 225 g wird direkt in eine Prozentzahl „umgewandelt“ (Fehllösungen: 22,5 %, 2,25 % oder 0,225 %).

Zu [02]:
- Es wird berechnet, wie viele Wäschekörbe mit dem Inhalt einer Waschpulverpackung aus der Werbeaktion gewaschen werden können (Fehllösung: 1575 g : 75 g = 21) (K6).
- Es kommt zu Fehlern bei der Umwandlung von Kilogramm in Gramm (Fehllösung: 135 g : 75 g ≈ 2) (K5).

Aufgabe 8: Internetauktion

Teilaufgabe 8.1: Internetauktion

Aufgabentext

Bei einer Internetauktion beobachtet Rolf die Preisentwicklung für Notebooks. Insgesamt werden neun Notebooks des gleichen Typs versteigert.

Rolf hat sich folgende Endpreise für die Notebooks aufgeschrieben:

Auktionsnummer	Endpreis
1	390 €
2	422 €
3	394 €
4	355 €
5	449 €
6	396 €
7	380 €
8	423 €
9	373 €

M5401201a

Wie groß ist der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 8.1: Internetauktion	
Item: M5401201	
RICHTIG	
	94 € (Die Einheit muss angegeben werden! Die Angabe von Nachkommastellen ist akzeptabel.)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 8.2: Internetauktion

Aufgabentext

M5401202a

Wie viel Prozent kostet das teuerste Notebook mehr als das billigste?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 8.2: Internetauktion	
Item: M5401202	
RICHTIG	
	Ca. 26% (akzeptiert wird auch 26, 48 % oder 26,5% oder ca. 25%)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 8.3: Internetauktion

Aufgabentext

M5401203a

Gib den durchschnittlichen Preis der neun Notebooks an.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 8.3: Internetauktion	
Item: M5401203	
RICHTIG	
	398 € (Die Einheit muss angegeben sein! Die Angabe von Nachkommastellen ist akzeptabel.)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da die Schüler sich mit einer Statistik zur Preisentwicklung auseinandersetzen. Dabei sind mit der sachgerechten Anwendung der Prozentrechnung sowie der Durchführung elementarer Rechenoperationen ebenso auch inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) von Bedeutung.
Zunächst sind die zur Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben benötigten Informationen, d.h. die Daten der statistischen Erhebung, der Tabelle zu entnehmen (K4).
Bei Teilaufgabe 1 ist lediglich der Preisunterschied zwischen dem teuersten und dem billigsten Notebook (Spannweite) zu berechnen (K5). Um bei Teilaufgabe 2 diesen Preisunterschied in Prozent angeben zu können, ist zusätzlich eine Vorstellung zum Prozentbegriff erforderlich (K3). Die jeweils durchzuführende Rechenoperation ist einfach.
Vor diesem Hintergrund sind die Teilaufgaben 1 und 2 dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.
Bei Teilaufgabe 3 werden Vorstellungen zum Mittelwert benötigt (K3). Die Rechenoperationen im Rahmen des gewählten Standardmodells sind mehrschrittig. Die Teilaufgabe 3 gehört somit dem Anforderungsbereich II an (K5).

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:
- Die Preise werden nicht nach der Größe geordnet, so dass zur Berechnung der Spannweite die falschen Preise verwendet werden (K5).

Zu [02]:
- Der Preisunterschied wird in € berechnet bzw. direkt in Prozent „umgewandelt“ (Fehllösungen: 94 € bzw. 94%, 9,4% oder 0,94%).
- Der Preis des billigeren Notebooks wird zum Preis des teuersten Notebooks ins Verhältnis gesetzt (Fehllösung: 79%) (K3).
- Als Grundwert wird der Preis des teuersten Notebooks verwendet und der Preisunterschied zum billigsten Notebook in Prozent berechnet (Fehllösung: 25%) (K3).

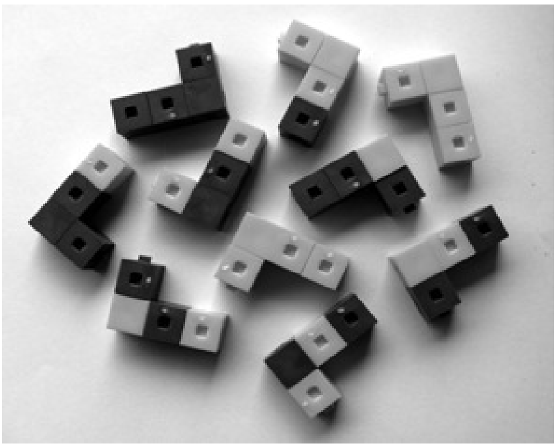
Zu [03]:
- Statt des arithmetischen Mittelwerts wird der Zentralwert angegeben (Fehllösung: 394 €) (K3).
- Das arithmetische Mittel der Preise des teuersten und des billigsten Notebooks wird berechnet (Fehllösung: 402 €) (K3).

Aufgabe 9: Steckwürfelfiguren

Teilaufgabe 9.1: Steckwürfelfiguren

Aufgabentext

Diese Figuren wurden jeweils aus vier kleinen Würfeln zusammengesteckt.



Sie werden gut gemischt in ein Säckchen gefüllt. Es wird anschließend ohne Hinzuschauen eine Figur aus dem Säckchen gezogen.

Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gezogene Figur einfarbig ist. M5400401a

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 9.1: Steckwürfelfiguren	
Item: M5400401	
RICHTIG	
	$\frac{3}{10}$ (auch 0,3 oder 30% wird akzeptiert)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 9.2: Steckwürfelfiguren

Aufgabentext

M5400403a

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die gezogene Figur mindestens zwei helle Würfel?

Kreuze an.

☐ $\frac{1}{10}$ ☐ $\frac{4}{10}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☐ $\frac{7}{10}$

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 9.2: Steckwürfelfiguren	
Item: M5400403	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da hier Wahrscheinlichkeiten bei einem einfachen Zufallsexperiment bestimmt werden müssen. Dabei ist bei beiden Teilaufgaben der Umgang mit vertrauten und direkt erkennbaren Modellen (K3) ebenso erforderlich wie die gezielte Informationsentnahme aus dem gegebenen Foto (K6). Bei Teilaufgabe 2 muss zudem die Bedeutung des Worts „mindestens" verstanden werden (K6). Da es sich bei beiden Teilaufgaben um den Umgang mit direkt erkennbaren Standardmodellen handelt, sind beide Teilaufgaben dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01, 02]:
- Falsches Abzählen kann zu Fehllösungen führen (K6).

Zu [01]:
- Der Begriff „einfarbig" wird auf nur eine Farbe (schwarz oder weiß) reduziert (K6).
- Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von „günstigen" zu „ungünstigen" Ergebnissen aufgestellt (Fehllösung 3/7) (K3).

Zu [02]:
- Fehllösung 1/10: „mindestens zwei helle" wird fälschlich als „mindestens drei schwarze" interpretiert (K6).
- Fehllösung 4/10: „mindestens zwei" wird fälschlich als „genau zwei" interpretiert (K6).
- Fehllösung 4/7: Anstelle der Wahrscheinlichkeit wird fälschlicherweise das Verhältnis von „genau zwei" zu „mindestens zwei" aufgestellt (K3).

Aufgabe 10: Gummibären

Teilaufgabe 10.1: Gummibären

Aufgabentext

Nach Herstellerangaben werden vor dem Abfüllen von Gummibärchen in Tüten die Bären folgendermaßen durchgemischt: Je ein Sechstel grüne, gelbe, weiße und orangefarbene Bären und ein Drittel rote Bären. Die Hälfte der roten Bären schmeckt nach Erdbeere, die andere Hälfte nach Himbeere.

Jan greift sich mit geschlossenen Augen ein Gummibärchen aus einer frisch geöffneten Tüte. M5401101a

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es Himbeergeschmack?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 10.1: Gummibären	
Item: M5401101	
RICHTIG	
	1/ 6 (akzeptiert wird auch $0{,}1\overline{6}$; 0,17; 0,167; 0,1667; 16,7 % oder ungefähr 17%)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 10.2: Gummibären

Aufgabentext

M5401102a

Fünf Gummibärchen wiegen 10 g.

Kreuze an, mit wie vielen grünen Gummibärchen man in einer 1000 g-Dose etwa rechnen kann.

☐	☐	☐	☐	☐
20	60	80	160	330

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 10.2: Gummibären	
Item: M5401102	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 10.3: Gummibären

Aufgabentext

M5401103a

Luisa hat eine Minitüte bekommen, mit vier grünen, zwei roten, drei orangefarbenen, zwei weißen und einem gelben Gummibärchen. Sie sagt:

„Daran sieht man, dass die Angaben des Herstellers über die Mischung der Farben gar nicht stimmen können."

Erkläre, was Luisa damit meint, und beurteile ihre Aussage.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 10.3: Gummibären	
Item: M5401103	
RICHTIG	
	Adäquate Erklärung inklusive einer Beurteilung der Aussage unter Berücksichtigung des Stichprobenumfangs (Begriff muss nicht genannt werden)! Z.B.: Luisa hat 12 Gummibärchen. 1/6 davon sind 2 Gummibärchen. Wenn die Angaben des Herstellers genau zuträfen, müsste sie 2 grüne, 4 rote, 2 orangefarbene, 2 weiße und 2 gelbe haben. Luisa hat also vor allem zu viele grüne und zu wenig rote Bären. Da der „Stichprobenumfang" in der Minitüte aber sehr klein ist, muss man mit solchen Abweichungen von der Herstellerangabe rechnen. ODER: Das Verhältnis in der Gesamtmischung muss nicht mit dem Verhältnis in der Tüte übereinstimmen, weil die Auswahl zufällig ist.
FALSCH	
	alle unvollständigen, fehlerhaften oder falschen Antworten Z.B. Luisa hat zu viele grüne und zu wenig rote Gummibärchen!

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese realitätsbezogene Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es hier zum einen um das Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Elementarereignissen (Teilaufgabe 1) und zum anderen um das verständnisorientierte Beschreiben und Beurteilen von Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen (Teilaufgaben 2 und 3) geht. Bei allen Teilaufgaben muss die beschriebene Situation verstanden werden (K6). Teilaufgabe 1 erfordert zudem die Berechnung des Anteils einer bestimmten Teilmenge, der anschließend in Form einer Wahrscheinlichkeit angegeben werden muss (K5). Dazu ist nur der Umgang mit einem vertrauten und direkt erkennbaren stochastischen Modell notwendig (K3), was eine Einordnung dieser Teilaufgabe in den Anforderungsbereich I nahelegt. Bei Teilaufgabe 2 steigt die Anforderung an das Modellieren (K3), da das mathematische Resultat (83 1/3) im Gegensatz zu Teilaufgabe 1 nicht direkt in die Realität übertragen werden kann, sondern hier noch eine angemessene Rundung zu vollziehen ist (K5). Das vorliegende Multiplechoice-Format relativiert diese Anforderung jedoch etwas. Dennoch erscheint eine Einordung dieser Teilaufgabe in Anforderungsbereich II sinnvoll. Bei Teilaufgabe 3 muss das gegebene stochastische Modell verständnisorientiert beurteilt (K3) und eine darauf aufbauende Argumentation selbständig entwickelt werden (K1). Im Wesentlichen geht es bei dieser Teilaufgabe darum zu erkennen, dass die Verteilung der Gummibären pro Päckchen zufällig erfolgt und Zufallsschwankungen bei einem geringen Stichprobenumfang wie bei der Minitüte (12 Gummibärchen) doch recht groß sein können, sodass die angegebene Verteilung der Minitüte damit als möglich zu erachten ist. Insbesondere aufgrund der geforderten Beurteilung ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Angabe der Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines roten Gummibärchens (Fehllösung 1/3) (K3, K6).

- Es wird ein falsches Modell für die Wahrscheinlichkeitsberechnung verwendet (z.B. Fehllösung 1/5) (K3).
- Die Wahrscheinlichkeit wird nicht konkret bestimmt, sondern auf irgendeine Weise mit Worten umschrieben.

Zu [02]:

- Fehllösung 20: Entsprechend der bekannten Ausweichstrategie bei Textaufgaben erfolgt eine rein vordergründige Verknüpfung der gegebenen Zahlen: 1000 : (5*10) = 20. (K3).
- Fehllösung 60: Aufgrund der Tatsache, dass 1/6 der Gummibärchen grün sind, wird auf 60 geschlossen (K3).
- Fehllösung 160: Es wird von 1000 Gummibären ausgegangen - $1000 \cdot \frac{1}{6} \approx 160$ (K3, K6).
- Fehllösung 330: Es wird von 1000 Gummibären und der falschen Annahme, dass 1/3 der Gummibären grün sind, ausgegangen - $1000 \cdot \frac{1}{3} \approx 330$ (K3, K6).

Zu [03]:

- Bei der Beurteilung wird davon ausgegangen, dass die Mischung in der Tüte unbedingt mit der Gesamtmischung übereinstimmen muss (K3).
- Erklärung und Beurteilung fehlen bzw. sind unvollständig (K1).

Aufgabe 11: Unfallstatistik

Teilaufgabe 11.1: Unfallstatistik

Aufgabentext

In der Mitteldeutschen Zeitung vom 03.02.2007 war folgende Meldung zu finden:

> **Frauen sicherer als Männer**
>
> Eindeutige Unfallstatistik
>
> Wiesbaden/mid. Frauen fahren sicherer Auto als Männer. Knapp 79 000 weibliche Pkw-Fahrer wurden laut dem Statistischen Bundesamt 2005 als Verursacher eines Unfalls mit Personenschaden festgestellt. Das entspricht einem Anteil von 35 Prozent. Im gleichen Zeitraum verschuldeten 143 000 Männer einen solchen Unfall.

Gib an, wie viel Prozent der Unfälle mit Personenschaden im Jahr 2005 von Männern verursacht wurden. M5401901a

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 11.1: Unfallstatistik	
Item: M5401901	
RICHTIG	
	Zulässiges Intervall: $64\ \% \leq x \leq 66\ \%$
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 11.2: Unfallstatistik

Aufgabentext

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? M5401902a

Kreuze an.

- ☐ Jeder zweite Unfall mit Personenschaden wurde im Jahr 2005 von einer Frau verursacht.
- ☐ Im Jahr 2005 wurden knapp 79 000 PKW-Unfälle mit Personenschaden verursacht.
- ☐ Zwei von drei PKW-Unfällen mit Personenschaden wurden im Jahr 2005 von Männern verursacht.
- ☐ Jeder dritte PKW-Unfall mit Personenschaden wurde im Jahr 2005 von einem Mann verursacht.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 1. Zahl
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 11.2: Unfallstatistik	
Item: M5401902	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 11.3: Unfallstatistik

Aufgabentext

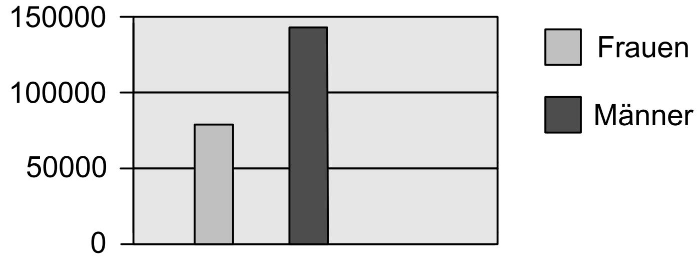
M5401903a, M5401903b, M5401903c, M5401903d

Der Sachverhalt der Zeitungsmeldung wurde in einem Diagramm veranschaulicht. Betrachte die folgenden Darstellungen und entscheide, ob sie richtig oder falsch sind.

Kreuze an.

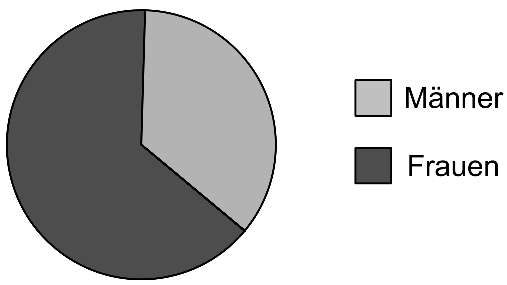
PKW- Unfälle mit Personenschaden

richtig ☐ falsch ☐



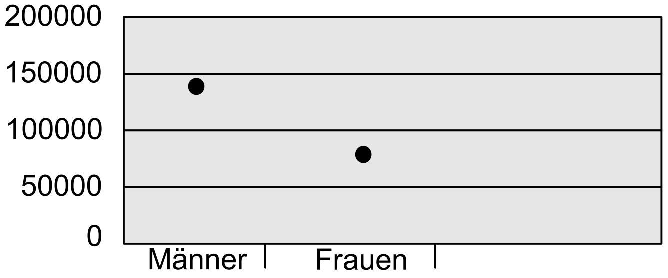
PKW- Unfälle mit Personenschaden

richtig ☐ falsch ☐



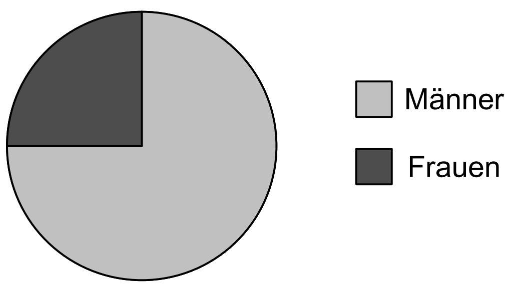
PKW- Unfälle mit Personenschaden

richtig ☐ falsch ☐



PKW- Unfälle mit Personenschaden

richtig ☐ falsch ☐



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 3, 4, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 11.3: Unfallstatistik	
Item: M5401903	
RICHTIG	
	richtig ☒ falsch ☐ richtig ☐ falsch ☒ richtig ☒ falsch ☐ richtig ☐ falsch ☒
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 11.4: Unfallstatistik

Aufgabentext

M5401904a

Nimm zum ersten Satz der Zeitungsmeldung aus mathematischer Sicht Stellung.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 5. Daten und Zufall
Allgemeine Kompetenz: 1, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 11.4: Unfallstatistik	
Item: M5401904	
RICHTIG	

	Die Stellungnahme muss sich in korrekter Form auf min. einen der folgenden Aspekte beziehen:
	
	- Fehlende Vergleichsangaben wie z.B.:
	    ➢ Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der Autofahrer
	    ➢ Jährliche Kilometerleistung von Autofahrerinnen im vergleich zur jährlichen Kilometerleistung von Autofahrern
	- Jahreszahl (Zeitungsmeldung aus 2007, Statistik aus 2005 – Statistik in 2005 noch annährend dieselbe?)
	- Definition „unsicherer Autofahrer“ unklar
	
	Z.B.:
	Auf Grund von absoluten Zahlen kann solch eine Aussage nicht getroffen werden. Man muss noch Vergleichsangaben haben, wie z. B. Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der Autofahrer.
	
	ODER:
	Die Ergebnisse müssen in 2007 nicht genauso sein wie in 2005. Daher weiß man nicht, ob Frauen auch 2007 sicherer sind als Männer.
	
	ODER:
	Man kann nicht aufgrund der Unfallverursachung von Frauen und Männer auf deren sichere Fahrweise schließen.

FALSCH	
	Ja, das kann man so formulieren, die Zahlen sind eindeutig (79000 < 143000 und 35% < 65%). ODER: Es werden keine mathematischen Bezüge hergestellt, z.B.: „Die Statistik beweist das nicht.“

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Daten und Zufall (L5), da es hier in allen Teilaufgaben um das Aufstellen oder Bewerten von Aussagen bzw. Diagrammen geht, die auf einer statistischen Erhebung beruhen, welche in Form eines Zeitungsartikels aufbereitet dargelegt wird. Bei allen Teilaufgaben muss der Inhalt des Zeitungsartikels sinnentnehmend erfasst werden (K6). Teilaufgabe 1 und 2 erfordern mit der sachgerechten Anwendung der Prozentrechnung und einer sinntragenden Anteilsvorstellung zusätzlich die Anwendung inhaltsbezogener Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1).
Bei Teilaufgabe 1 genügt es dazu, die gegebene Situation zahlenmäßig zu erfassen (K6, K3) und dann nur noch die Differenz der gegebenen 35% zu 100% zu bestimmen (K5). Bei Teilaufgabe 2 steigt die Anforderung an das Kommunizieren (K6), da mehrere Aussagen inhaltlich verstanden und mit den Informationen aus dem Zeitungsartikel in Verbindung gebracht werden müssen. Bei Teilaufgabe 3 müssen zusätzlich zum Erfassen und Übertragen der Informationen vier gegebene Diagramme auf ihre Richtigkeit überprüft werden (K4). Teilaufgabe 4 erfordert eine verständnisorientierte mathematikbezogene Beurteilung einer Aussage und eine Begründung für diese Beurteilung auf Grundlage der gegebenen Daten (K1). Es geht dabei im Wesentlichen darum zu erkennen, dass Vergleichsangaben (wie z.B.: Anzahl der Autofahrerinnen im Vergleich zur Anzahl der

Autofahrer) fehlen, um eine datenbasierte Aussage zur Fahrweise von Männern und Frauen formulieren zu können, d.h. im Kern muss eine gegebene Modellierung beurteilt werden (K3). Insbesondere wegen dieser hohen Modellierungsanforderung ist es naheliegend, Teilaufgabe 4 dem Anforderungsbereich III zuzuordnen, wohingegen die Teilaufgaben 2 und 3 dem Anforderungsbereich II (Herstellen von Zusammenhängen) und Teilaufgabe 1 dem Anforderungsbereich I (Anwenden eines Standardmodells) zuzuordnen sind.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Die Frage wird nicht richtig verstanden und infolgedessen wird ein anderer Wert berechnet, z.B. 79000 von 143000 (Fehllösung 55%) (K6).
- Der prozentuale Anteil der Männer wird mit dem der Frauen gleichgesetzt (Fehllösung 35%) (K3).

[Zu 02]:

- Es gelingt nicht, zwischen den Aussagen und den im Zeitungsartikel angegebenen Informationen Zusammenhänge herzustellen, insbesondere aufgrund der Schwierigkeit, die in den Aussagen – in unterschiedlichen Weisen – dargelegten prozentualen Anteile richtig zu deuten (K3, K5, K6).

[Zu 03]:

- Durch unaufmerksames „Lesen“ der Diagramme werden die Legenden verwechselt und die Anteile somit falsch zugeordnet (K4).

Zu [04]:

- Es wird nicht aus mathematischer Sicht, sondern bloß unter Bezug zu der eigenen Erfahrungswelt Stellung genommen (Fehllösung z.B. „Frauen fahren schlechter Auto!“).
- Eine wertende Stellungnahme erfolgt nicht. Es werden lediglich die Zahlen bzw. Prozente gegenübergestellt (K1).

Aufgabe 12: Kleinanzeigen

Teilaufgabe 12.1: Kleinanzeigen

Aufgabentext

In einer Stadtillustrierten werden die Preise für Kleinanzeigen bei Privatkunden folgendermaßen berechnet:

1-5 Zeilen	10,00 €
Jede weitere Zeile	1,80 €

Hier sind zwei Anzeigen:

Wer hat Lust auf Jazz-Dance in Essen? Bin 26 (w) und suche noch jmd., der mitmacht. Würde mich freuen, wenn's klappt... HbH ✉ ☎ [redacted]

Anzeige 1

Softball-Damenteam der Duisburg Dockers sucht Verstärkung! Wir suchen Mädels zwischen 16 und 40, die Lust haben, in einem netten Team etwas Neues auszuprobieren. Softball ist ähnlich dem amerik. Baseball und wird insbes. von Frauen gespielt. Schnuppertraining auf Anfrage. TRAUT EUCH – wir freuen uns!!! Kontakt: [redacted] @aol.com

Anzeige 2

M4400301a

Wie teuer war die erste Anzeige?

___________ €

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 12.1: Kleinanzeigen	
Item: M4400301	
RICHTIG	
	10 (Euro)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 12.2: Kleinanzeigen

Aufgabentext

M4400302a

Wie teuer war die zweite Anzeige?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
10,00 €	19,00 €	23,40 €	24,40 €	26,00 €

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 12.2: Kleinanzeigen	
Item: M4400302	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 12.3: Kleinanzeigen

Aufgabentext

M4400303a

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 12.3: Kleinanzeigen	
Item: M4400303	
RICHTIG	
	21 (Zeilen)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 12.4: Kleinanzeigen

Aufgabentext

M4400304a

Wenn eine Anzeige ganz in fett und gelb unterlegt gedruckt werden soll, kostet das 15,00 € mehr. Um wie viel Prozent verteuert sich dadurch die dritte Anzeige?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
um ca. 15%	um ca. 28%	um ca. 39%	um ca. 61%	um ca.72 %

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 12.4: Kleinanzeigen	
Item: M4400304	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Teilaufgaben dieser Aufgabe werden der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zugeordnet, da implizit und explizit Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge genutzt werden sowie funktionale Zusammenhänge zu erkennen sind. Teilaufgabe 4 enthält zusätzlich Aspekte der Leitidee Zahl (L1), da Prozentrechnung anzuwenden ist.
Bei Teilaufgabe 1 ist die beschriebene Realsituation (Festlegung von Preisen für Kleinanzeigen) in ein einfaches mathematisches Modell zu übersetzen (K3), wobei nichts zu

berechnen ist. Die Bearbeitung von Teilaufgabe 2 erfolgt in ähnlicher Weise. Im Rahmen des Modellierens (K3) ist nun der Preis für 13 Zeilen zu bestimmen, wobei hier nun auch einfache rechnerische Tätigkeiten (K5) vonnöten sind.
Bei der Lösung von Teilaufgabe 3 wird erneut ein einfaches mathematisches Modell (K3) aufgestellt, innerhalb dessen Berechnungen (K5) erforderlich sind. Zusätzlich muss hier die Problemlösestrategie des Rückwärtsarbeitens angewendet werden (K2) und, ausgehend vom gegebenen Preis einer dritten Anzeige, die Anzahl ihrer Zeilen bestimmt werden.
Diese ersten drei Teilaufgaben sind dem Anforderungsbereich I zuzuordnen, da ihre Bearbeitung die direkte Anwendung grundlegender Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet erfordert.
In Teilaufgabe 4 ist eine sehr einfache Modellierung der Realsituation erforderlich (K3), und die Schüler müssen den Grund- und den Prozentwert erkennen, um davon ausgehend die prozentuale Veränderung des Preises der dritten Anzeige zu errechnen (K5).
Es ist naheliegend, die vierte Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen, da bei ihrer Bearbeitung auf verschiedenen Gebieten der Mathematik erworbene Fertigkeiten und Fähigkeiten miteinander zu verknüpfen sind.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Es wird überlesen, dass der Preis für 1 bis 5 Zeilen bereits angegeben ist, stattdessen wird irrtümlich mit den Kosten für „jede weitere Zeile“ gearbeitet und 5▪1,80€ gerechnet (Fehllösung 9,00€) (K3).

Zu [01, 02]:

- (Fehllösung 1,80€): Diese Fehllösung zeigt Defizite in der Kompetenz des Kommunizierens, da der Preis für die „kleine“ Anzeige mit dem angegebenen „kleinen“ Preis gleichgesetzt wird. Bei Schülern, die diesen Fehler machen, ist naheliegend, dass sie zudem beim in Teilaufgabe 2 gesuchten Preis der zweiten („großen“) Anzeige den „großen“ Preis ankreuzen (u.a. K3).

Zu [02]

- (Fehllösung 10,00€): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung wird entweder im Aufgabentext überlesen, dass es um die „zweite“ Anzeige geht, oder es wird lediglich der Preis für 1-5 Zeilen übernommen (u.a. K3).
- (Fehllösung 19,00€): Dieses Ergebnis ergibt sich, wenn zweifach mit der ersten Anzeige gearbeitet wird. Der gesuchte Preis ergibt sich dann als Summe aus dem Preis der ersten Anzeige (10,00€) und dem zweiten Abdruck der ersten Anzeige, was als fünfmal „jede weitere Zeile“ gedeutet wird. Die zugehörige Rechnung lautet: 10,00€ + 5▪1,80€ = 19,00€. Rechnerisch würde sich ebenfalls 19,00€ ergeben, wenn der Preis für 15 Zeilen bestimmt würde (Zählfehler) (u.a. K3).
- (Fehllösung 23,40€): Eine fehlerhafte Deutung des beschriebenen Preismodells als lineares Modell führt zum Ankreuzen dieser Fehllösung. Dabei wird missachtet, dass der Preis der ersten fünf Zeilen sich von jenem der weiteren Zeilen unterscheidet. Folglich wird der Preis für 13 einzelne Zeilen durch 13▪1,80€ = 23,40€ ermittelt (K3).
- (Fehllösung 26,00€): Hierbei wird die gegebene 13zeilige Anzeige in zweimal fünf Zeilen sowie den Rest unterteilt. Der Preis für die restlichen drei Zeilen ergibt sich als Anteil des Preises für fünf Zeilen, und es wird gerechnet: 10,00€ + 10,00€ + $\frac{3}{5}$ von 10,00€ = 26,00€ (K3).

Zu [03]

- (Fehllösung 16 Zeilen): Hierbei wird zwar korrekt zunächst der Preis für 1-5 Zeilen vom gegebenen Preis subtrahiert und dann die Anzahl der Zeilen für die restlichen

28,80€ ermittelt, anschließend wird jedoch vergessen, beide Anzahlen der Zeilen zu addieren. Diesen häufig beobachtbaren Fehler zeigt die folgende Schülerlösung (K3).

M4400303a

Eine dritte Anzeige hat 38,80 € gekostet. Wie viele Zeilen hatte sie?

16 zeilen hatte sie } 28,80€

(+ 1-5 zeilen = 10€)

- (Fehllösung 21,5 Zeilen): Hier liegt die Fehlvorstellung vor, dass Anzeigenpreise auch pro halbe Zeile erhoben werden. Auch dieser Fehllösung liegt eine unkritische Annahme eines linearen Preismodells zugrunde (vgl. Fehllösungen der Teilaufgabe 2), und der gegebene Preis von 38,80€ wird durch 1,80€ als konstanter Preis pro Zeile dividiert (K3).

Zu [04]:

- (Fehllösung: um ca. 15%): Beim Ankreuzen dieser Fehllösung liegt ein sog. Signalfehler vor. Ungenaues Lesen führt dazu, dass 15€ mit 15% verwechselt oder gar gleichgesetzt wird (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 28%): In diesem Falle werden Grund- und Prozentwert nicht richtig zugeordnet, und der Anteil der Preiserhöhung für die fett und gelb unterlegt gedruckte Anzeige an dem erhöhten Preis für diese Anzeige wird errechnet: 15€ : 53,80€ ≈ 0,278 ≈ 28% (K3).
- (Fehllösung: um ca. 61%): Hier liegt vermutlich ein Lesefehler vor. Es wird mit einem verminderten statt mit einem erhöhten Preis gearbeitet, und der Anteil des verminderten Preises (hier: 38,80€ - 15€ = 23,80€) an dem Normalpreis der dritten Anzeige wird errechnet: 23,80€ : 38,80€ ≈ 0,613 ≈ 61% (u.a. K6, K3).
- (Fehllösung: um ca. 72%): Das Ankreuzen dieser Fehllösung zeigt, dass Grund- und Prozentwert nicht richtig erkannt werden. Rechnerisch wird der Anteil des regulären Preises der dritten Anzeige am erhöhten Preis der Anzeige ermittelt, und so wird 38,80€ : 53,80€ ≈ 0,721 ≈ 72% gerechnet (K3).

Aufgabe 13: Fahrrad

Aufgabentext

Peter wollte mit dem Fahrrad zu seinem Freund Paul fahren. Auf dem Weg dorthin traf er Tina, die ihm die Lösung der Hausaufgaben erklärte. Anschließend fuhr er weiter zu Paul, den er nicht antraf. Jetzt ist er auf dem Weg nach Hause.

M4402001a

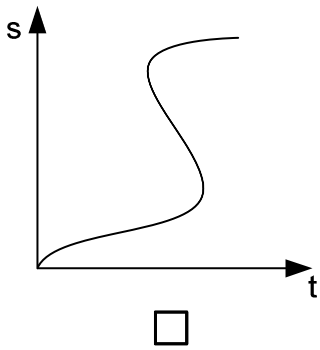
Welcher Graph passt zu dieser Geschichte?

Kreuze an.

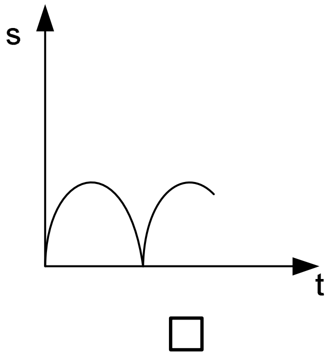
s... Entfernung zu Peters Wohnung

t ... Zeit ab Abfahrt von Peter von zu Hause

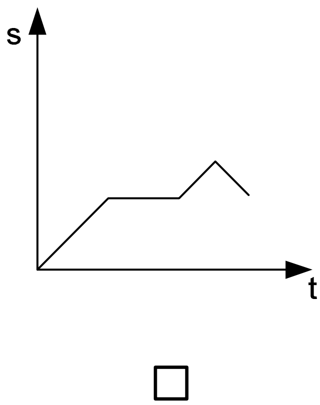
a)



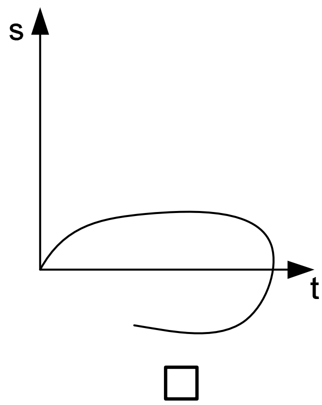
b)



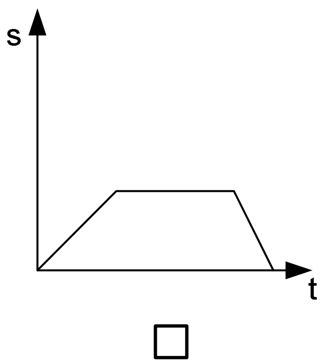
c)



d)



e)



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 4, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 13: Fahrrad	
Item: M4402001	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt (zweite Reihe, links) - c)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zugeordnet, da eine Zeit-Weg-Beziehung in sprachlicher sowie in graphischer Form beschrieben ist und diese unterschiedlichen Darstellungen einander zuzuordnen sind.
Zur Bearbeitung dieser Aufgabe sind zunächst Informationen aus dem die Realsituation beschreibenden Text zu entnehmen (K6). Davon ausgehend ist gedanklich ein mathematisches Modell zu entwickeln, mit dessen Hilfe der funktionale Zusammenhang zwischen der Entfernung zu Peters Wohnung sowie der Zeit ab seiner Abfahrt von zu Hause erfasst werden kann (K3). Alle zur Auswahl stehenden Modelle sind graphisch dargestellt, so dass die Schüler diese Darstellungen interpretieren und Beziehungen zur sprachlich beschriebenen Situation erkennen müssen (K4).
Insbesondere die Anforderungen an die Kompetenz K4 begründen eine Einordnung dieser Aufgabe in den Anforderungsbereich II, da hier Übersetzungsleistungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu erbringen sind.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- (Fehllösung a): Der Graph erinnert an eine Straße. Diese Art Fehllösung tritt häufig auf, nämlich eine Verwechslung der realen Situation mit ihrer graphisch-funktionalen Darstellung (u.a. K3, K6).
- (Fehllösung b): Hier könnte die Fehldeutung darin bestehen, dass der Graph als Peters Geschwindigkeit angesehen wird (u. a. K3, K4).
- (Fehllösung d): Diese Darstellung legt die Fehldeutung des unteren Teils des Graphen als „Fahrt zurück“ nahe. Auch hier kann die bei Fehllösung a beschriebene Verwechslung zugrunde liegen (u.a. K3, K6).
- (Fehllösung e): Dieser Graph zeigt zwar nach einer anfänglich zurückgelegten Wegstrecke eine Phase des Anhaltens, aber es fehlt eine Darstellung der Weiterfahrt zu Paul. Die Rückfahrt zu Peters Wohnung ist korrekt dargestellt (u.a. K3, K6).

Aufgabe 14: Kanutour

Teilaufgabe 14.1: Kanutour

Aufgabentext

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot
Kleintransporter mit Anhänger!	**Kleintransporter mit Anhänger!**
Einmaliger Grundpreis: 90 €	Einmaliger Grundpreis: 110 €
Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent (Kilometerpauschale)	Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 € (Kilometerpauschale)

M4402401a

Vergleiche die beiden Angebote.

Berate Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 14.1: Kanutour	
Item: M4402401	
RICHTIG	
	Angemessene Beratung, in welcher auf folgende Aspekte verwiesen werden muss: - Abhängigkeit des Mietpreises von der zu fahrenden Strecke - Exakte Berechnung der Streckenlänge (200 km), bei der beide Angebote gleich teuer sind und Aussagen zur Auswahl eines Angebots bei kürzeren bzw. längeren Wegstrecken Der genaue Schnittpunkt (200 km) kann auf verschiedene Art und Weise gewonnen werden (z.B. durch systematisches Probieren; graphische, rechnerische, inhaltliche Lösungsverfahren). Diese Arbeitsschritte müssen nicht dokumentiert werden! Z.B.: Frau Krell sollte ihre Entscheidung von der Länge der zurückzulegenden Strecke abhängig machen. Muss sie mehr als 200 km fahren, sollte sie sich für das zweite Angebot entscheiden. Bei weniger als 200 km ist das erste Angebot das günstiger. (Bei 200 km sind beide Angebote gleich teuer!) ODER: Frau Krell sollte das zweite Angebot wählen, da dieses bei Wegstrecken über 200 km günstiger ist!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 14.2: Kanutour

Aufgabentext

M4402402a

Im Internet findet Frau Krell das Angebot des Autovermieters „Autoscout“. Dieser verlangt eine einmalige Grundgebühr von 120 € und eine Kilometerpauschale von 30 Cent. In diesem Angebot sind 100 Freikilometer enthalten.

Mit welcher Gleichung kann man die Kosten beschreiben, wenn man mehr als 100 Kilometer fährt? x soll dabei die Gesamtzahl der gefahrenen Kilometer sein.

Kreuze an.

☐ $y = 0{,}3 \cdot (x - 100) + 120$

☐ $y = 0{,}3 \cdot x + 120$

☐ $y = 0{,}3 \cdot (x + 100) + 120$

☐ $y = 30 \cdot (x - 100) + 120$

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 14.2: Kanutour	
Item: M4402402	
RICHTIG	
	1. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe gehört zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4), da in der beschriebenen realen Sachsituation lineare Beziehungen zu identifizieren und zu vergleichen sind.
Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 1 sind zunächst die relevanten Informationen aus dem Text und aus der Tabelle auszuwählen (K6). Die Durchführung einer Beratung erfordert den Vergleich beider Angebote. Dazu ist ein adäquates mathematisches Modell mit bestimmten Annahmen aufzustellen (K3), bei dem die Tarifstrukturen beider Anbieter mittels linearer Funktionen beschrieben werden können. Der Vergleich kann durch systematisches Probieren, graphisch, rechnerisch oder inhaltlich erfolgen (K5), und es ist dann zu beurteilen und darzulegen (K6), welches der beiden Angebote in Abhängigkeit von der angenommenen zu fahrenden Kilometerzahl das günstigere ist.
Insgesamt ist eine eigene globale Wertung beider Angebote vorzunehmen, und aufgrund der hohen Modellierungsanforderungen wird diese Teilaufgabe in den Anforderungsbereich III eingeordnet.

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe 2 werden dieselben Kompetenzen – auf niedrigerem Niveau – benötigt. Die gegebenen Gleichungen sind im Kontext zu deuten, und es ist zu beurteilen, ob sie den gegebenen Sachverhalt zutreffend beschreiben.
Da die zu bewertenden Modelle hier gegeben sind, wird diese Teilaufgabe noch dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:

- Es wird nicht erkannt, dass die Kosten eines Angebotes von dem zu zahlenden Grundpreis *und* von der Anzahl der gefahrenen Kilometer abhängen. Stattdessen werden nur die Grundpreise oder nur die Kosten für die gefahrenen Kilometer miteinander verglichen (K3).
- Ein Vergleich beider Angebote erfolgt nur anhand einer ganz bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer, d.h. die globale Struktur beider Tarife wird nicht beachtet, wie folgende Schülerlösung verdeutlicht (K3).

Frau Krell sollte das erste Angebot nehmen, weil wenn der Transporter z.B. 25 Kilometer fahren würde müs sie 96,25 € für das 1. Angebot zahlen.
113,75 € müsste sie für das 2. Angebot dann zahlen.

- Zwar wird erkannt, dass der Preis von der zu fahrenden Strecke abhängt, aber es wird nur rein qualitativ argumentiert, wie die nächste Schülerlösung zeigt (u.a. K3).

Es kommt darauf an wie weit weg es ist. Wenn es nah ist dann Angebot 1 weil es weniges Grundgebühren hat und wenns weiter weg ist Angebot 2 weil es weniger pro gefahren Kilometer kostet

- Die zum Vergleich der beiden Angebote aufgestellte Gleichung wird falsch gelöst (K5).

Zu [02]:

- (Fehllösung y=0,3▪x+120): Die Anzahl der Freikilometer wird nicht berücksichtigt (K3).
- (Fehllösung y=0,3▪(x+100)+120): Die Anzahl der Freikilometer wird irrtümlich zur gefahrenen Kilometerzahl addiert (K3).
- (Fehllösung y=30▪(x-100)+120): Die in Cent angegebene Kilometerpauschale wird nicht in Euro umgewandelt (K5).

Aufgabe 15: Mitschüler

Teilaufgabe 15.1: Mitschüler

Aufgabentext

M4400501a

In der Klasse 8a sind insgesamt 25 Schülerinnen und Schüler. Es sind sieben Jungen mehr als Mädchen.

Wie viele Mädchen sind in der Klasse? Kreuze an.

☐	☐	☐	☐	☐
6	7	9	16	18

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 15.1: Mitschüler	
Item: M4400501	
RICHTIG	
	3. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 15.2: Mitschüler

Aufgabentext

M4400502a

In der Klasse 8b mit insgesamt 28 Schülerinnen und Schülern sind dreimal so viele Mädchen wie Jungen.

Beschreibe diese Situation mit einer Gleichung.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 3, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 15.2: Mitschüler	
Item: M4400502	
RICHTIG	
	$x + 3x = 28$ Anmerkung: Alle äquivalenten Gleichungen werden akzeptiert. Statt x kann dabei auch eine beliebig andere Variable verwendet werden! Variablen sind nicht gefordert, also auch $28 = 3 \cdot 7 + 7$ ODER: Ein Gleichungssystem (z. B. $x + y = 28$ und $y = 3x$) wird noch als richtige Lösung akzeptiert.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 15.3: Mitschüler

Aufgabentext

M4400503a

Steffi ist in der 8c. In dieser Klasse sind insgesamt 31 Schülerinnen und Schüler. Steffi behauptet: „Wenn zu meiner Klasse ein Mädchen hinzukäme und ein Junge die Klasse verließe, wären gleich viele Jungen und Mädchen in der Klasse."

Erläutere, warum Steffis Behauptung nicht richtig sein kann.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 1, 2, 3, 5, 6
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

<table>
<tr><th colspan="2">Aufgabe 15.3: Mitschüler</th></tr>
<tr><td colspan="2">Item: M4400503</td></tr>
<tr><td colspan="2">RICHTIG</td></tr>
<tr><td></td><td>Angemessene Erläuterung, in welcher deutlich gemacht wird, dass es die ungerade Anzahl der Kinder in der Klasse nicht ermöglicht, dass – auch wenn ein Junge die Klasse verließe und ein Mädchen hinzukäme – gleich viele Jungen und Mädchen in der Klasse sind.

Z.B.:
Wenn ein Mädchen zur Klasse hinzukommt und ein Junge die Klasse verlässt, bleibt die Gesamtzahl von 31 Kindern in der Klasse erhalten. Da 31 eine ungerade Zahl und damit nicht durch 2 teilbar ist, kann die Anzahl der Jungen und Mädchen nicht gleich groß sein.

ODER:
Wenn Steffi Recht hätte, müssten jetzt 2 Jungen mehr als Mädchen in der Klasse sein. Ohne diese zwei Jungen wären dann gleich viele Mädchen und Jungen in der Klasse. Das geht nicht, denn 29 ist nicht durch 2 teilbar.

ODER:
j = Anzahl der Jungen, m = Anzahl der Mädchen j,m (Elementzeichen!!!) N

I. $j + m = 31$
II $j - 1 = m + 1$

$j - 1 = 31 - j + 1$
$2j = 33$
$j = 16{,}5$

Da 16,5 keine natürliche Zahl ist, gibt es keine Lösung.

ODER:
Es sind dann immer noch 31 Kinder in der Klasse! Da 31 eine ungerade Zahl ist, können nicht gleich viele Jungen wie Mädchen in der Klasse sein.

ODER:
„31 ist eine ungerade Zahl“</td></tr>
<tr><td colspan="2">FALSCH</td></tr>
<tr><td></td><td>alle falschen, fehlerhaften oder unvollständigen Erläuterungen</td></tr>
</table>

Aufgabenbezogener Kommentar

Zur Lösung dieser Aufgabe sind inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) erforderlich, da bei jeweils gegebener Klassenstärke die Zusammenhänge zwischen der Anzahl an Mädchen und Jungen zu erfassen sind. Des Weiteren sind bei allen Teilaufgaben zudem inhaltsbezogene Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) von Bedeutung, denn zu ihrer Bearbeitung müssen einfache Rechnungen ausgeführt werden.

Zur Lösung der Teilaufgabe 1 ist unter Verwendung der Informationen zur Klassenstärke und Zusammensetzung der Klasse ein geeignetes mathematisches Modell (K3), wie $x + x + 7 = 25$, aufzustellen und das Ergebnis zu ermitteln. Alternativ kann dies auch unter Rückgriff auf einfache heuristische Hilfsmittel und Strategien (K2), wie beispielsweise das systematische

Probieren oder auch das Ausschließen einzelner Antwortmöglichkeiten, geschehen. Die dabei auszuführenden Rechenoperationen sind elementar (K5).
Aufgrund eines mehrschrittigen, strategiegestützen Lösungswegs ist es naheliegend diese Teilaufgabe bereits dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.
Bei Teilaufgabe 2 sind – mit Ausnahme des Problemlösens – dieselben Kompetenzen anzuwenden. Aufgrund der notwendigen Arbeit mit Variablen ist das symbolische, technische und formale Arbeiten (K5) allerdings auf einer höheren Anspruchsebene anzusiedeln. Deshalb ist es sinnvoll, diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuweisen.
Zur Bearbeitung von Teilaufgabe 3 kann es hilfreich sein, das Problem in Teilprobleme zu zerlegen (K2), sich zunächst der Auswirkungen des Personenaustausches bewusst zu werden und dann ggf. auf der Grundlage systematischen Probierens zu erläutern, warum die Anzahl an Mädchen und Jungen nicht übereinstimmen kann. Dabei kann argumentiert werden, dass 31 als ungerade Zahl nicht ohne Rest durch 2 teilbar ist (K1).
Aufgrund dieser mehrschrittigen Argumentation unter Bezug zu inhaltsbezogenen Kompetenzen der Leitidee Zahl (L1) gehört diese Teilaufgabe zu Anforderungsbereich II.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01] :
- Fehllösung 18: Die Bedingung „sieben Jungen mehr als Mädchen“ wird rechnerisch korrekt umgesetzt (25 - 7 = 18), weitere Rechenschritte unterbleiben aber oder die Information „sieben Jungen *mehr* als Mädchen“ wird aufgefasst als „*sieben* Jungen“ (K3).
- Fehllösung 16: Es wird irrtümlich zugrunde gelegt, dass sieben Mädchen mehr als Jungen in der Klasse sind (K3).

Zu [02]:
- Die Anzahlen von Mädchen und Jungen werden korrekt berechnet (21 Mädchen, 7 Jungen), die geforderte Gleichung wird jedoch nicht aufgestellt (K3).

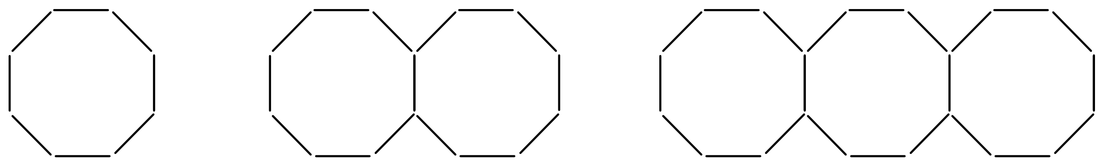
Zu [03]:
- Es wird darauf verwiesen, dass der Personenaustausch keine Veränderung bewirkt, eine Erklärung erfolgt jedoch nicht (K1).

Aufgabe 16: Streichholzmuster

Teilaufgabe 16.1: Streichholzmuster

Aufgabentext

Streichhölzer werden wie folgt angeordnet.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Wie viele Streichhölzer braucht man für die Figur 10, wenn man das Muster fortsetzt? M4402501a

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 16.1: Streichholzmuster	
Item: M4402501	
RICHTIG	
	71 (Streichhölzer)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 16.2: Streichholzmuster

Aufgabentext

Stelle einen Term auf, mit dem man die Anzahl der Streichhölzer der n-ten Figur berechnen kann. M4402502a

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 16.2: Streichholzmuster	
Item: M4402502	
RICHTIG	
	$8 + (n-1) \cdot 7$ Anmerkung: Alle gleichwertigen Terme (z.B. $7n+1$) werden akzeptiert, dabei kann stellvertretend für die n-te Figur auch eine beliebig andere Variable verwendet werden.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 16.3: Streichholzmuster

Aufgabentext

M4402503a

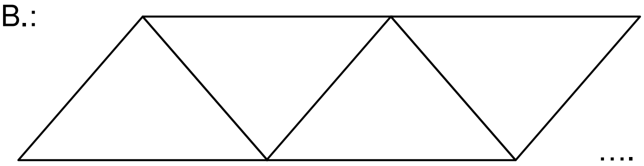
Bei einem anderen Muster wird die Anzahl der benötigten Streichhölzer für die n-te Figur durch den Term $3 + (n - 1) \cdot 2$ beschrieben.

Skizziere das zugrunde liegende Muster.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 4. Funktionaler Zusammenhang
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 16.3: Streichholzmuster	
Item: M4402503	
RICHTIG	
	Alle Muster, zu denen die Formel passt, z.B.:  ….
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Alle Teilaufgaben sind der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4) zuzuordnen. Ihnen liegen Bildungsgesetze für Folgen zugrunde, die zur Beschreibung verschiedener Streichholzmuster dienen. Die Informationen zur Lösung der Teilaufgaben 1 und 2 müssen der Darstellung entnommen werden (K4). Hierzu ist in Verbindung mit symbolisch-technisch-formalem Arbeiten die Anwendung von Problemlösestrategien erforderlich, wie beispielsweise die Weiterführung der Folge, die Arbeit mit einer Wertetabelle oder das Aufstellen einer Rekursionsformel (K2, K5). Während bei Teilaufgabe 1 die Figur noch zeichnerisch dargestellt werden kann, um den Wert des 10. Gliedes zu erhalten, ist bei Teilaufgabe 2 der Zusammenhang zwischen der Anzahl der 8-Ecke und ihren gemeinsamen Seiten einerseits und der Anzahl der Streichhölzer der n-ten Figur andererseits zu erkennen und auf symbolischer Ebene darzustellen (K5).
Teilaufgabe 3 erfordert es schließlich im Sinne des Rückwärtsarbeitens zu einem gegebenen Term ein konkretes Muster zu skizzieren (K5, K4, K2).
Da das Bildungsgesetz der Folge aufgrund der Abbildung dreier aufeinanderfolgender Glieder leicht zu erfassen ist und zur Lösung der Aufgabe lediglich einfache Problemlösestrategien erforderlich sind, ist die Teilaufgabe 1 noch dem Anforderungsbereich I zuzuordnen. Teilaufgabe 2 hingegen gehört aufgrund der erforderlichen Verallgemeinerung dem Anforderungsbereich III an. Bei Teilaufgabe 3 ist diese Einordnung aufgrund des erforderlichen Wechsels von der symbolischen auf die graphische Darstellungsebene, d.h. die Darstellung eines zu dem vorgegebenen Term passenden Musters, gegeben.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01]:
- Es wird nicht erkannt, dass jeweils ein Streichholz die Seite zweier Achtecke bildet (Fehllösung: 8 · 10 = 80 Streichhölzer) (K4).
- Die Zahl jeweils hinzukommender Streichhölzer wird mit 10 multipliziert, das erste „Starthölzchen“ wird vergessen (Fehllösung: 7 · 10 = 70 Streichhölzer) (K4).

Zu [02]:
- Pro Folgeglied wird von 8 Streichhölzern ausgegangen, doppelt gezählte eventuell falsch subtrahiert (Fehllösungen: 8·n oder 8·n - 1) (K2, K4).
- Es wird keine allgemeine Gleichung, sondern nur die spezielle Berechnung für n = 10 notiert (Fehllösung: 8 + 9 · 7 = 71) (K5).
- Das erste Folgeglied wird nicht als solches (n = 1), sondern als Ausgangsposition (n = 0) wahrgenommen (Fehllösung: 8 + n·7) (K2, K4, K5).

Zu [03]:

- Der Aufbau der Folge wird nicht deutlich, da nur das erste Folgeglied oder ein beliebiges anderes Folgeglied gezeichnet wird (K4, K5).

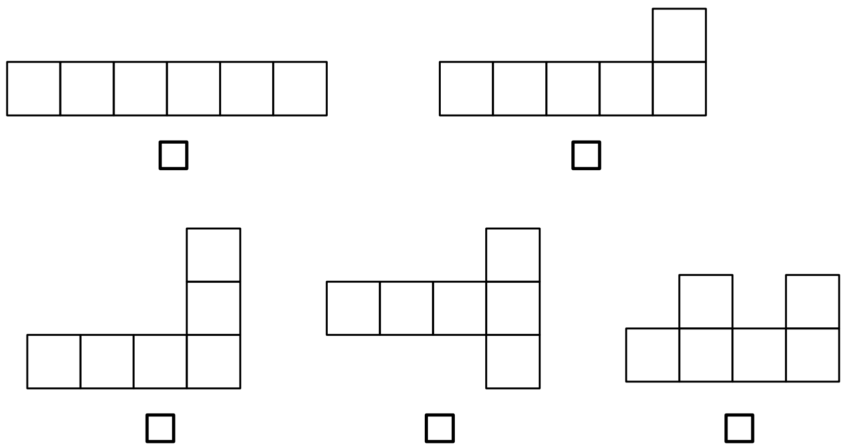
Aufgabe 17: Würfelnetze

Aufgabentext

M3402901a

Bei welchem Netz (Abwicklung) handelt es sich um die Oberfläche eines Würfels?

Kreuze an.



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 17: Würfelnetze	
Item: M3402901	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt (untere Reihe, Mitte)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da zu ihrer Bearbeitung räumliches Vorstellungsvermögen (oder zumindest spezifisches Wissen über Würfelnetze) unerlässlich ist. Es ist notwendig, gedanklich mit den gegebenen Würfelnetzen zu operieren (K4), d.h. es muss untersucht werden, ob sich die gegebenen Netze zu einem Würfel falten lassen oder nicht. Da es sich bei den Würfelnetzen um für die Schüler vertraute Darstellungen handelt, ist es naheliegend diese Aufgabe - trotz des notwendigen Transfers von ebenen zu räumlichen Konfigurationen - dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Im Unterricht bietet es sich an, Schüler selbst mögliche Netze aus jeweils sechs Quadraten erstellen zu lassen und ihnen anschließend die Möglichkeit zu geben, selbst zu erkunden, ob diese Netze zu Würfeln gefaltet werden können oder nicht. Als Maßnahme zur Binnendifferenzierung wäre es z.B. möglich, leistungsstarke Schüler erkunden zu lassen, wie viele verschiedene Würfelnetze es gibt oder Kriterien für „unmögliche“ Würfelnetze angeben zu lassen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es wird davon ausgegangen, dass jedes zusammenhängende Netz, das aus 6 kongruenten Quadraten besteht, zu einem Würfel gefaltet werden kann (K4).
- Es wird nicht berücksichtigt, ob einzelne Quadrate beim Falten übereinanderliegen (K4).

Aufgabe 18: Im Koordinatensystem

Teilaufgabe 18.1: Im Koordinatensystem

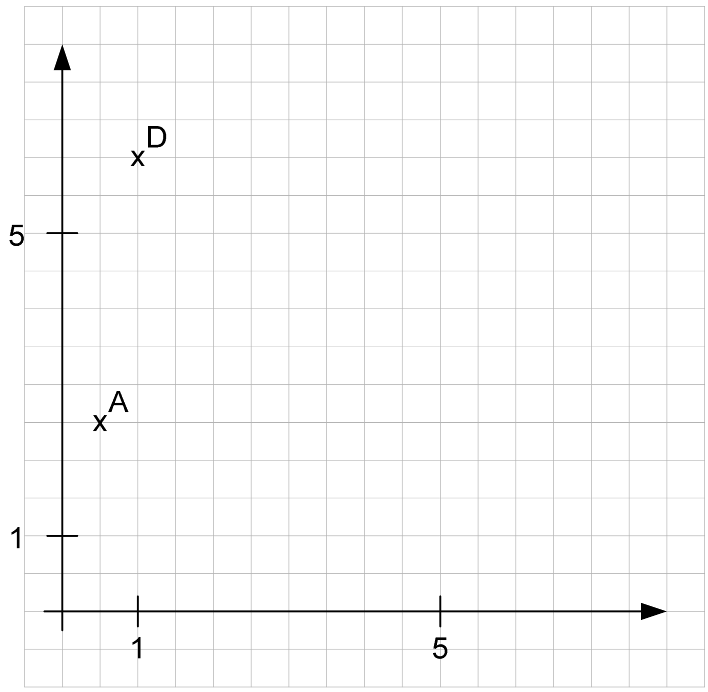
Aufgabentext

M4400901a

Gib die Koordinaten der beiden Punkte an:

A (|)

D (|)



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 18.1: Im Koordinatensystem	
Item: M4400901	
RICHTIG	
	A (0,5 | 2,5) und D (1| 6) oder A ($\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$) und D (1| 6)
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 18.2: Im Koordinatensystem

Aufgabentext

M4400902a

Zeichne zwei Punkte B und C so in das Koordinatensystem in Teilaufgabe 1 ein, dass ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D entsteht.

Verbinde die Punkte.

Aufgabenkennwerte

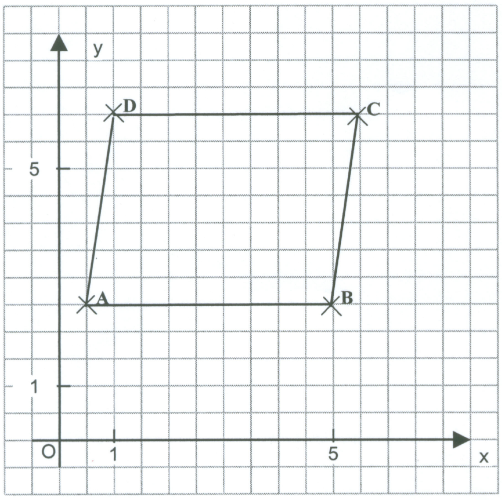
Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

<table>
<tr><th colspan="2">Aufgabe 18.2: Im Koordinatensystem</th></tr>
<tr><td colspan="2">Item: M4400902</td></tr>
<tr><td colspan="2">RICHTIG</td></tr>
<tr><td></td><td>Werden die Punkte verbunden, muss ein Parallelogramm entstehen.

Anmerkung: Die Punkte müssen nicht bezeichnet werden.

Z.B.:
B (5/ 2,5) und C (5,5/ 6)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">FALSCH</td></tr>
<tr><td></td><td>alle anderen Antworten

Z.B.
Die Seiten (Verbindungslinien) der Punkte wurden nicht eingezeichnet.</td></tr>
</table>

Teilaufgabe 18.3: Im Koordinatensystem

Aufgabentext

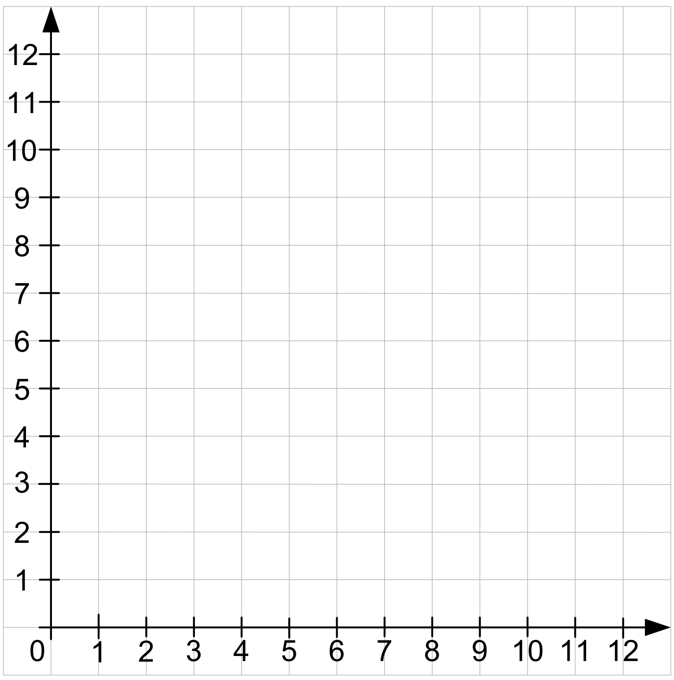
M4400903a

Die Punkte E und H haben die Koordinaten E (6|7) und H (8|11). Welche beiden Punkte F und G bilden mit den Punkten E und H ein Parallelogramm?

Du kannst den abgebildeten Teil eines Koordinatensystems als Hilfsmittel zur Lösung benutzen.

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
F (6|9), G (8|5)	F (4|7), G (4|11)	F (7|6), G (11|8)	F (8|7), G (10|11)



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 18.3: Im Koordinatensystem	
Item: M4400903	
RICHTIG	
	4. Kästchen wurde angekreuzt
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Raum und Form (L3), da es hier um die Darstellung von Punkten und Parallelogrammen im kartesischen Koordinatensystem geht. Bei der ersten Teilaufgabe müssen lediglich die Koordinaten der beiden gegebenen Punkte A und D abgelesen und angegeben werden (K4, 5). Diese Übersetzungsleistung liegt auf elementarem kognitivem Niveau, so dass diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen ist.

Bei Teilaufgabe 2 muss die gegebene Verbindungsstrecke $\overline{AD}$ zu einem Parallelogramm vervollständigt werden. Hierzu sind die aktive Auseinandersetzung mit der Darstellung (K4), das Wissen über die charakteristischen Eigenschaften eines Parallelogramms (K5) sowie das Finden einer naheliegenden Strategie (es gibt mehrere Möglichkeiten) notwendig (K2), wobei der kognitive Anspruch dieser Teilaufgabe ebenfalls gering ist. Demzufolge gehört diese Teilaufgabe zum Anforderungsbereich I.
Teilaufgabe 3 führt die beiden ersten Teilaufgaben zusammen, wobei jedoch jeweils die entsprechenden Umkehrhandlungen vollzogen werden müssen. Diese Teilaufgabe erfordert zunächst die Übersetzung von durch Koordinatendarstellung beschriebenen Punkten ins Koordinatensystem. Anschließend muss überprüft werden, welches der als Lösungsmöglichkeiten angegebenen Punktepaare mit den gegebenen Punkten E und H ein Parallelogramm bilden (K4, K5). Insbesondere aufgrund der Mehrschrittigkeit ist diese Teilaufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01, 03]:

- Das zur Lösung der Aufgabe notwendige Wissen über die Koordinatendarstellung von Punkten fehlt oder ist fehlerhaft (Verwechslung von x- und y-Koordinate) (K5).
- Die Einheiten werden missachtet oder falsch interpretiert (Fehllösung A(1/5) und D(2/12) bei [01]) (K4).

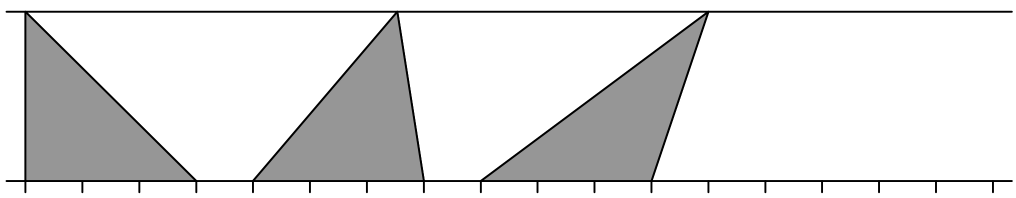
Zu [02, 03]:

- Ebenfalls kann fehlendes Wissen bezüglich der charakteristischen Eigenschaften eines Parallelogramms zutage treten, so dass ggfs. andere Figuren (z.B. ein Trapez) gezeichnet werden.

Aufgabe 19: Dreiecksfläche

Aufgabentext

Die beiden Geraden in der Zeichnung sind parallel.



Gerhard behauptet: „Die drei dunklen Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.“

Hat Gerhard Recht?

Begründe deine Antwort.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 1, 4, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 19: Dreiecksfläche	
Item: M2401501	
RICHTIG	
	Richtige Beurteilung Gerhards Aussage (Gerhard hat Recht!) mit angemessener Begründung, in welcher darauf verwiesen wird, dass alle Dreiecke, deren Grundseite und Höhe jeweils gleich lang sind, den gleichen Flächeninhalt haben.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Messen (L2) zuzuordnen, da es hier darum geht, Dreiecke bezüglich ihrer Flächeninhalte zu vergleichen. Dazu muss der gegebenen Darstellung entnommen werden, dass die drei Dreiecke in der Länge einer Seite und der entsprechenden Höhe übereinstimmen (K4). Hiermit lässt sich die Gleichheit ihrer Flächeninhalte begründen (K1). Diese Argumentation kann dabei auf verschiedenen Abstraktionsebenen erfolgen: Bei einer stärker inhaltlichen Vorgehensweise ist die Länge der Grundseiten der Darstellung zu entnehmen und die Gleichheit der drei Höhen festzustellen, ohne dass hierfür konkrete Maße gegeben sind. Auf rein formaler Ebene kann auch mithilfe der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken argumentiert werden (K5). Aufgrund der notwendigen Informationsentnahme aus der gegebenen Darstellung sowie der überschaubaren mehrschrittigen Argumentation wird diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

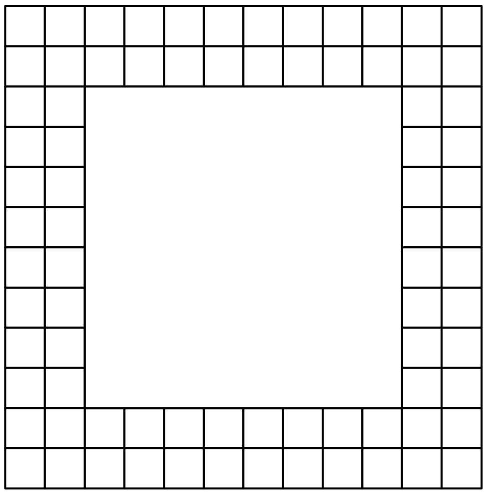
- Die Aufgabe wird aufgrund fehlender Maße von vornherein als nicht lösbar betrachtet.
- Es wird zwar erkannt, dass die Dreiecke jeweils in den Längen ihrer Grundseiten und Höhen übereinstimmen, jedoch kann die Begründung nicht angemessen oder nicht vollständig formuliert werden (K1).
- Dass alle drei Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, wird nur durch „Augenmaß" begründet (K1).
- Der Flächeninhalt der Dreiecke kann nicht bestimmt werden, da die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks nicht bekannt ist (K5).

Aufgabe 20: Quadratfläche färben

Aufgabentext

M2401901a

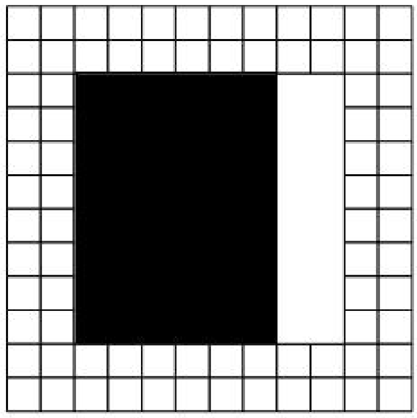
Färbe genau $\frac{3}{4}$ der inneren Quadratfläche.



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 20: Quadratfläche färben	
Item: M2401901	
RICHTIG	
	¾ der inneren Quadratfläche ist gefärbt  <u>Anmerkung:</u> Es spielt keine Rolle, ob oder wie viele Kästchen des Rahmens gefärbt wurden (relevant ist nur die Innenfläche) Andere Unterteilung der inneren Quadratfläche möglich!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es um Flächeninhalte geht. Dazu müssen zunächst sinntragende Vorstellungen von Bruchzahlen (Anteilsvorstellung) aktiviert und auf das gegebene Quadrat übertragen werden. Dabei kann das äußere Gitternetz eine zusätzliche Hilfe darstellen, indem das Quadrat zunächst in vier Viertel eingeteilt wird, von denen drei eingefärbt werden. Diese Einteilung in Viertel kann mithilfe der Diagonalen oder mithilfe der Mittelsenkrechten des Quadrats erfolgen. Auch eine „zeilenweise" Unterteilung ist nutzbar (K4, 5).
Da das Färben von Anteilen in einfachen geometrischen Figuren ein Routineverfahren darstellt, ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es werden ¾ des Randes und nicht ¾ der inneren Quadratfläche eingefärbt (Fehlvorstellung: Verwechslung von Länge und Flächeninhalt).
- Es wird nur 1/4 der inneren Quadratfläche eingefärbt.
- Es werden nicht erkennbar genau, sondern nur ungefähr ¾ der inneren Fläche eingefärbt (K4).

Aufgabe 21: Feuerlöschdecke

Aufgabentext

Auf einer Feuerlöschdecke ist die Aufschrift

100 x 100 = 1 m^2

zu lesen.

M2401701a

Welche Einheit ist jeweils bei der Zahl 100 anzugeben, damit diese Aufschrift stimmt?

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 2, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 21: Feuerlöschdecke	
Item: M2401701	
RICHTIG	
	Es ist jeweils die Einheit „cm“ anzugeben.
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da hier Einheiten auf formaler Ebene situationsgerecht auszuwählen sind (K5). Die Lösung ist hierbei nicht unmittelbar ersichtlich, sondern es ist zunächst eine naheliegende Strategie auszuwählen, wobei insbesondere die zwei folgenden zu erwarten sind (K2):

$$100 \cdot 100 = 10000 \qquad 1\,m^2 = 10000\ \boxed{?}$$

oder

$$1\,m \cdot 1\,m = 1\,m^2 \qquad 1\,m = 100\ \boxed{?}$$

Das Foto hat dabei lediglich eine illustrative Funktion, da die darauf dargestellten Informationen bereits im Aufgabentext stehen. Die Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ wird demnach zur Lösung der Aufgabe nicht gefordert.
Des Weiteren ist zu beachten, dass auch lebenspraktische Erfahrungen der Schüler – ohne jegliches Anwenden von Mathematik – zur korrekten Lösung führen können.
Aufgrund der einfachen Umrechnung ist es naheliegend, diese Aufgabe noch zu Anforderungsbereich I zu zählen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

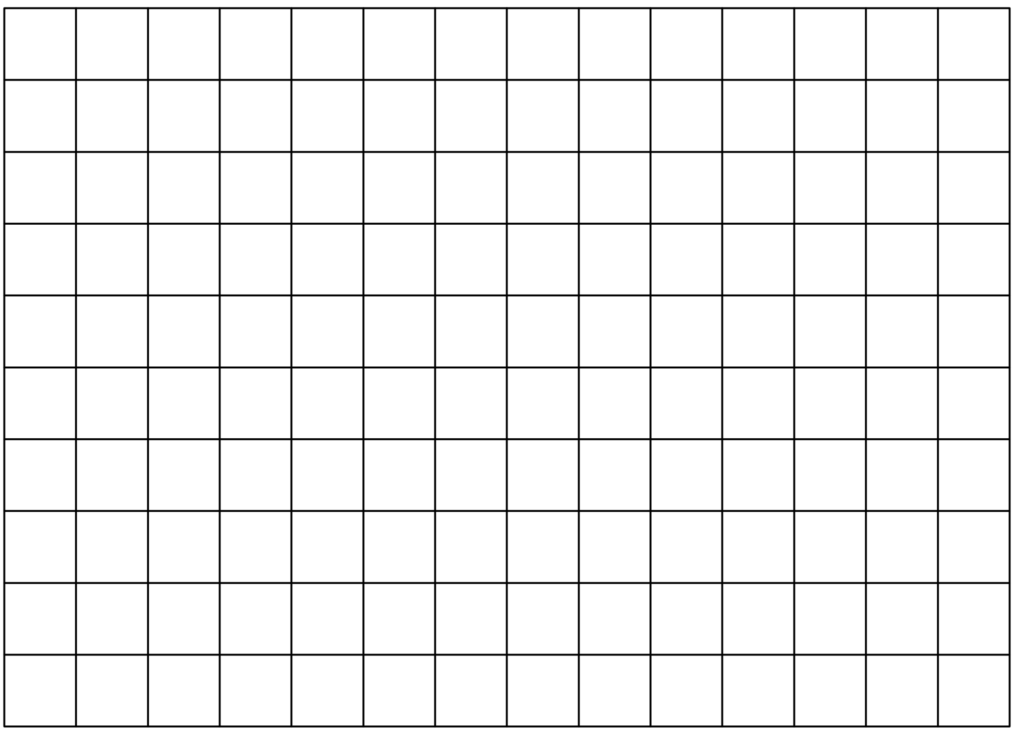
- Eine falsche Maßeinheit, insb. Meter, wird angegeben (K2, K5).
- Eine Flächeneinheit (z.B. cm^2) wird statt einer Längeneinheit angegeben (K5).

Aufgabe 22: Rechteckszeichnung

Aufgabentext

M2400701a

Zeichne zwei Rechtecke in das unten stehende Feld, die den gleichen Flächeninhalt haben, aber nicht den gleichen Umfang.



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 2, 4, 5
Anforderungsbereich: II

Kodieranweisung

Aufgabe 22: Rechteckszeichnung	
Item: M2400701	
RICHTIG	
	Es werden zwei Rechtecke skizziert, die denselben Flächeninhalt, aber nicht denselben Umfang haben! <u>Anmerkung:</u> Es ist nicht erforderlich, die Kästchen zu nutzen. Z.B. : Rechteck 1: a = 4 cm; b = 5 cm => A = 20 cm² und U = 18 cm Rechteck 2: a = 2 cm; b = 10 cm => A = 20 cm² und U = 24 cm Toleranz +/- 2 mm
FALSCH	
	Alle Antworten, die der Vorgabe nicht entsprechen!

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es hier um den Zusammenhang von festem Flächeninhalt und veränderlichem Umfang bei Rechtecken geht. Die Aufgabe weist einen hohen Grad an Offenheit auf, da der Flächeninhalt nicht vorgegeben, sondern selbst auszuwählen ist. Dabei ist es hilfreich, ein erstes Rechteck geeignet so zu wählen, dass ein zweites flächeninhaltsgleiches Rechteck mit anderem Umfang unter Ausnutzung des Gitterrasters einfach zu skizzieren ist. Das Bestimmen eines solchen Rechtecks kann auf verschiedene Weisen erfolgen, z.B. durch systematisches rechnerisches Probieren oder durch systematisches Zerlegen eines gegebenen Rechtecks (K2, K5). Als Lösung müssen beide Rechtecke mit den vorgegebenen Eigenschaften skizziert sein (K4).
Aufgrund der Tatsache, dass Zusammenhänge zwischen zwei Rechtecken herzustellen sind, der Offenheit der Aufgabe und der damit verbundenen Anforderung an das Problemlösen ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich II zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Schüler haben die Fehlvorstellung, dass es keine zwei Rechtecke mit demselben Flächeninhalt und unterschiedlichem Umfang geben kann.
- Schüler haben die Fehlvorstellung, dass die Verlängerung einer Seite um x cm und die gleichzeitige Verkürzung der anderen Seite um x cm (d. h. um die gleiche Länge) zu einer Invarianz des Flächeninhalts führt.
- Zwei zueinander kongruente Rechtecke in unterschiedlicher Lage werden skizziert (K2).
- Ein Rechteck und ein anderes Viereck (kein Rechteck, sondern z.B. Parallelogramm) mit demselben Flächeninhalt werden skizziert.

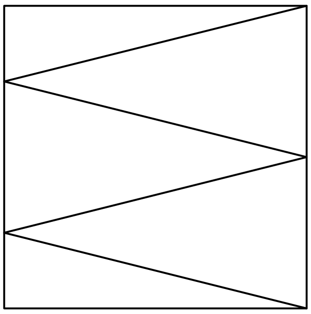
Aufgabe 23: Quadrat und Dreieck

Aufgabentext

M3401101a

Wie viele Symmetrieachsen hat diese Figur?

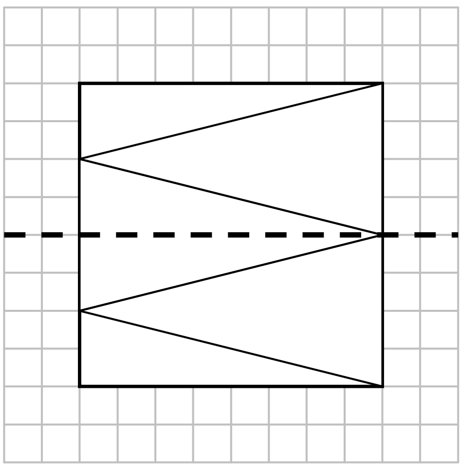
Zeichne sie ein.



Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 3. Raum und Form
Allgemeine Kompetenz: 4, 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 23: Quadrat und Dreieck	
Item: M3401101	
RICHTIG	
	Eine Symmetrieachse 
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Raum und Form (L3) zuzuordnen, da es hier darum geht, eine gegebene Figur auf Achsensymmetrien zu untersuchen. Dazu ist es erforderlich, das Wissen über Achsensymmetrie zu aktivieren (K5) und die (einzige vorhandene) Symmetrieachse einzuzeichnen (K4).

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

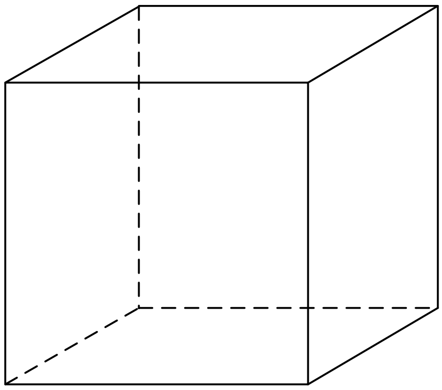
- Die „Musterung“ des gegebenen Quadrats bleibt unbeachtet, so dass alle Symmetrieachsen des Quadrats eingezeichnet werden (K4).
- Es wird nicht die gesamte Figur, sondern es werden Teilfiguren betrachtet, so dass weitere – für die betrachteten Teilfiguren korrekte – Symmetrieachsen eingezeichnet werden (K4).
- Die gegebenen Strecken der Figur werden als Symmetrieachsen hervorgehoben. (K4, K5).

Aufgabe 24: Würfel erforschen

Teilaufgabe 24.1: Würfel erforschen

Aufgabentext

Gegeben ist ein Würfel mit 4 cm Kantenlänge.



Berechne das Volumen.

M2404601a

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 24.1: Würfel erforschen	
Item: M2404601	
RICHTIG	
	64 cm^3 Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Teilaufgabe 24.2: Würfel erforschen

Aufgabentext

M2404602a

Berechne den Oberflächeninhalt.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 5
Anforderungsbereich: I

Kodieranweisung

Aufgabe 24.2: Würfel erforschen	
Item: M2404602	
RICHTIG	
	96 cm^2 Anmerkung: Die Einheit muss angegeben sein!
FALSCH	
	alle anderen Antworten

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist der Leitidee Messen (L2) zuzuordnen, da es hier ausschließlich um die Berechnung geometrischer Größen geht. Da Schülern Formeln zu deren Bestimmung bekannt sind, erfordert die Aufgabe lediglich formales, technisches Arbeiten auf reproduzierendem, elementarem Niveau (K5). Daher ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Folgende Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

Zu [01, 02]:

- Die Einheit wird nicht angegeben(Unvollständige Lösung 64 bzw. 96) (K5).
- Es werden falsche Einheiten gewählt (Fehllösungen 64 cm oder 64 cm^2 bzw. 96 cm oder 96 cm^3) (K5).
- Es werden falsche Formeln zur Berechnung des Volumens bzw. des Oberflächeninhalts benutzt (K5).

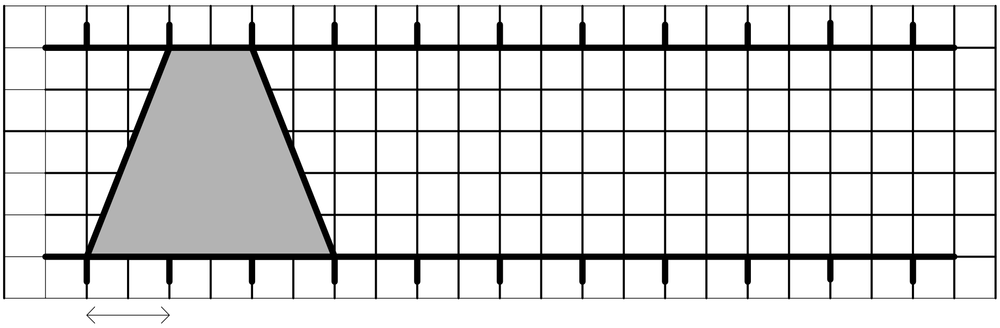
Zu [02]:

- [02] Der Flächeninhalt nur einer Würfelfläche wird berechnet (Fehllösung 16 cm^2) (K5).

Aufgabe 25: Trapez

Aufgabentext

Gegeben ist ein Trapez zwischen zwei vorgegebenen Parallelen.



1 cm

M2404501a

Markus will ein Quadrat zeichnen, dessen Flächeninhalt genauso groß ist wie der des Trapezes. Zwei Seiten des Quadrats sollen auf den vorgegebenen Parallelen liegen.

Sabrina sagt: „Das kann nicht klappen."

Hat sie Recht?

Begründe deine Meinung rechnerisch oder zeichnerisch.

Aufgabenkennwerte

Merkmale:
Leitidee: 2. Messen
Allgemeine Kompetenz: 1, 4, 5, 6
Anforderungsbereich: III

Kodieranweisung

Aufgabe 25: Trapez	
Item: M2404501	
RICHTIG	
	Richtige Antwort (Sabrina hat Recht!) und ein adäquate zeichnerische oder rechnerische Begründung, in welcher auf die Eigenschaften eines Quadrates und die hieraus resultierende Seitenlänge und somit den Flächeninhalt des Quadrates eingegangen wird. Des Weiteren muss darauf verwiesen werden, dass der Flächeninhalt des Quadrates größer als der des Trapezes ist. Z.B.: Das einzige Quadrat, das möglich ist, hat eine Seitenlänge von 2,5 cm (Abstand der beiden Parallelen) und damit einen Flächeninhalt von 6,25 cm^2. Der Flächeninhalt des Quadrates ist somit größer als der des Trapezes (5 cm^2). ODER: $A(Trapez)=((a + c) /2) \cdot h) \Rightarrow A= 5cm^2$ $A(Quadrat)=6{,}25cm^2$ => Das kann nicht klappen
FALSCH	
	alle falschen, fehlerhaften oder unvollständigen Begründungen

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe gehört zur Leitidee Messen (L2), da es um eine Existenzaussage bezüglich eines Quadrats mit vorgegebenem Flächeninhalt und vorgegebener Seitenlänge geht. Zunächst ist sinnentnehmendes Lesen des (gut strukturierten) Aufgabentextes in Verbindung mit der Abbildung erforderlich (K6, K4). Anschließend ist der Flächeninhalt des Trapezes zu ermitteln (K4, K5). Die Seitenlänge des Quadrats ist durch den Abstand der beiden Parallelen vorgegeben (K4). Nun muss in einer mehrschrittigen Argumentation (K1) rechnerisch oder durch eine Zeichnung gezeigt werden, dass es kein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 5 cm^2 und einer Seitenlänge von 2,5 cm gibt, sondern, dass ein Quadrat mit der gegebenen Seitenlänge (Höhe des Trapezes) einen größeren Flächeninhalt hat als das Trapez.
Aufgrund der hohen Argumentations-Anforderungen ist diese Aufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Mögliche Schwierigkeiten und Fehler sind zu erwarten:

- Es wird ein Rechteck mit dem gegebenen Flächeninhalt gezeichnet und nicht erkannt, dass dies kein Quadrat ist (K4, K5).
- Das Trapez wird zu einem Quadrat ergänzt, ohne die Bedingung des gleichen Flächeninhalts zu beachten (K6).
- Es erfolgt lediglich die Antwort „Sabrina hat Recht." ohne Begründung (K1).

4. Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

1. Zur Kompetenz Modellieren

1.1. Modelle und Modellieren

Sowohl in der nationalen als auch in der internationalen mathematikdidaktischen Diskussion wurde in den letzten Jahren die Bedeutung realitätsbezogener Problemstellungen immer stärker betont und ihre Behandlung im Unterricht eingefordert (siehe u.a. Kaiser, 1995). Bei der Auseinandersetzung mit derartigen Problemstellungen spielt die mathematische Kompetenz *Modellieren* eine zentrale Rolle. Sie ist daher in den Bildungsstandards Mathematik zu Recht als eine der sechs zentralen Kompetenzen fest verankert. Beim *Modellieren* geht es darum, realitätsbezogene Situationen durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und das der Situation zugrunde liegende Problem einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen (Blum et al, 2007).
Die durch einen solchen Modellierungsprozess entstehenden mathematischen Modelle, die gewissermaßen ein „vereinfachtes mathematisches Abbild der Realität“ (Leiß/Blum, 2006, S. 41) sind und „nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigen“ (Henn, 2002, S. 4), können deskriptiver oder normativer Art sein und demzufolge verschiedene Funktionen erfüllen. Mittels *deskriptiver* Modelle lassen sich reale Phänomene mathematisch beschreiben oder erklären, mit *normativen* Modellen lassen sich Teile der Realität gestalten oder vorhersagen (vgl. Henn, 2002, S. 6).
Deskriptive Modelle mit erklärender oder beschreibender Funktion können im Mathematikunterricht einen ersten Zugang zu Modellierungsaufgaben erleichtern, da sie im Allgemeinen in ihrer Komplexität überschaubarer sind als normative Modelle, die das Ziel haben, Vorhersagen über die Realität zu treffen oder ihre Merkmale vorzuschreiben.

In den letzten Jahrzehnten sind im Wesentlichen vier zentrale Argumente genannt worden, die einen stärkeren Realitätsbezug im Mathematikunterricht rechtfertigen. Sie sind gut mit den von Winter formulierten Grunderfahrungen vereinbar, die jeder Schüler im Mathematikunterricht machen sollte (siehe Abschnitt II). So sollen Modellierungsaufgaben dazu dienen, die zur Bewältigung und zum Verständnis mathematikhaltiger Umweltsituationen notwendigen Kompetenzen aufzubauen, den Schülern heuristische Strategien (z. B. Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten) zu vermitteln sowie Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren und ihnen die Mathematik zugänglicher zu machen. Des Weiteren soll Schülern durch Aufzeigen von Realitätsbezügen ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft vermittelt werden (vgl. Blum, 1996, S. 21 sowie Maaß, 2007, S. 15f). Auch Henn (2002) fordert, dass Schüler im Anschluss an ihre Schullaufbahn in der Lage sein sollen, als mündige Bürger zu agieren und Urteile über vorhandene Modelle zu fällen. Daher sollen Schüler im Unterricht an einfachen Beispielen Grunderfahrungen des Modellierens machen und sich mit diesen reflektierend auseinandersetzen (Henn, 2002, S. 4).

Modellierungsaufgaben in dem von uns verstandenen Sinne unterscheiden sich von den sog. eingekleideten Aufgaben dadurch, dass zu ihrer Bearbeitung ein „ehrlicher“ Bezug zwischen Realität und Mathematik hergestellt oder „ernsthaft thematisiert“ (Henn 2002, S. 6) wird. Dies ist bei den im Unterricht häufig dominierenden Einkleidungen nicht der Fall. Zu ihrer Bearbeitung ist es meistens ausreichend, den der Einkleidung zugrunde gelegten Algorithmus freizulegen und abzuarbeiten.
Um den Bezug zwischen Realität und Mathematik zu explizieren, kann auf den sogenannten Modellierungskreislauf als strategisches Instrument zurückgegriffen werden, da dieser den

idealtypischen Lösungsprozess von Modellierungsaufgaben auf einer Metaebene beschreibt (vgl. die Übersicht über verschiedene Varianten dieses Kreislaufs bei Borromeo Ferri, 2006). Die Variante von Blum/Leiß (2005, siehe Abb. IV.1) hat sich dabei als besonders hilfreich erwiesen. Dieser relativ komplexe siebenschrittige Kreislauf ist erfolgreich als deskriptives Instrument zur Beschreibung von realen Modellierungsprozessen sowie den dabei auftretenden kognitiven Hürden eingesetzt worden (vgl. u.a. Maaß, 2004, Galbraith/Stillman, 2006, Borromeo Ferri, 2006, Leiß, 2007). Er bietet eine geeignete Grundlage, auf deren Basis Modellierungsprozesse von Schülern im Detail rekonstruiert und analysiert werden können.

1.2. Der Modellierungskreislauf

Trotz der schon länger bestehenden Forderungen nach mehr Realitätsbezügen im Mathematikunterricht spielen Modellierungsaufgaben häufig nicht jene Rolle, die ihnen angemessen ist, wohl auch, weil ihre Behandlung den Unterricht anfangs sowohl für Schüler als auch für Lehrer (erheblich) anspruchsvoller macht. Für Schüler stellt eine Modellierungsaufgabe eine komplexe Anforderung dar, denn jeder der unten näher beschriebenen Teilschritte des Modellierungskreislaufs kann eine potentielle kognitive Hürde beim Lösen von solchen Aufgaben sein. Auch die Antizipation solcher potentieller kognitiver Hürden im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung kann die vorbereitenden Arbeiten oft komplexer und zeitaufwändiger machen als dies beim Unterricht mit eher traditionellen Aufgaben der Fall ist (vgl. Blum, 1996). Ermutigend ist zu erwähnen, dass der auffordernde Charakter von Modellierungsaufgaben oft zu einer intensiveren Auseinandersetzung der Schüler mit diesen führt, und dass solche Aufgaben häufig vielfältige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bieten. Somit kann im Vergleich zum traditionellen Unterricht, bei dem im Wesentlichen alle Schüler die gleiche Aufgabe in der gleichen Weise bearbeiten, die kognitive Aktivierung aller Schüler erhöht werden. Anfängliche Schwierigkeiten bei der Behandlung von Modellierungsaufgaben reduzieren sich, wenn adäquate Hilfen – beispielsweise der Modellierungskreislauf oder der Lösungsplan - zu ihrer Bearbeitung gegeben werden. Dabei ist das Bewusstmachen der einzelnen Teilschritte des Modellierens sowohl für Schüler als auch für Lehrer grundlegend. Im Folgenden wird daher zunächst der siebenschrittige Modellierungskreislauf dargestellt, um die einzelnen Teilaspekte des Modellierens detailliert aufzeigen zu können. Später werden dann ein vereinfachter Kreislauf (der sogenannte Lösungsplan, s.u.) vorgestellt und unterrichtliche Anregungen gegeben, die helfen können, möglichen Schwierigkeiten beim Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht zu begegnen.
Der in Abb. IV.1 dargestellte siebenschrittige Modellierungskreislauf gibt die einzelnen Schritte des Modellierens, von denen im Sinne der Bildungsstandards streng genommen lediglich die vier Teilschritte 2, 3, 5 und 6 zur Kompetenz *Mathematisch modellieren* gezählt werden, idealtypisch wieder. Dabei scheinen die einzelnen Bearbeitungsschritte beim Lösen von Modellierungsaufgaben linear aufeinander zu folgen. In der Regel „springen“ die Schüler jedoch mehrfach zwischen Mathematik und dem „Rest der Welt“ hin und her.

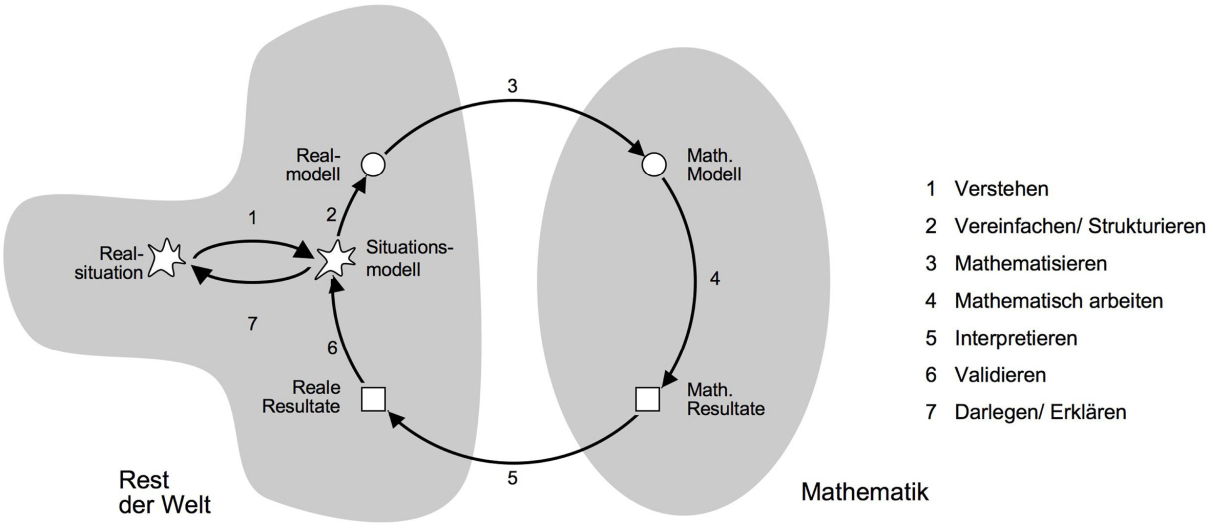


Abb. IV.1: Modellierungskreislauf von Blum/Leiß (2005)

Alle sieben Schritte des Modellierungskreislaufs werden im Weiteren am Beispiel der Aufgabe „Kanutour“ (Anforderungsbereich III) exemplarisch konkretisiert:

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot
Kleintransporter mit Anhänger! Einmaliger Grundpreis: 90 € Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent (Kilometerpauschale)	**Kleintransporter mit Anhänger!** Einmaliger Grundpreis: 110 € Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 € (Kilometerpauschale)

Vergleiche die beiden Angebote.

Berate Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

1. Verstehen

Die beschriebene Realsituation mit den beiden Angeboten für zu mietende Kleintransporter ist im ersten Schritt zu verstehen. Hierzu ist sinnentnehmendes Lesen erforderlich (*Mathematisch kommunizieren*). Beim Lesen der Aufgabenstellung wird zunächst ein mentales Modell der beschriebenen Situation konstruiert. Dieses sogenannte Situationsmodell enthält in diesem Fall unterschiedliche und teilweise für die Lösung irrelevante Angaben, wie z. B. die Anzahl der Schüler.

2. Vereinfachen/ Strukturieren

Als nächstes müssen die wichtigen Angaben identifiziert und die Fragestellung muss präzisiert werden, wodurch sich ein so genanntes Realmodell ergibt. Dabei ist es wichtig zu erfassen, dass sich der Mietpreis für einen Kleintransporter aus dem einmalig zu zahlenden Grundpreis sowie dem Preis pro gefahrenen Kilometer zusammensetzt. Des Weiteren ist es aufgrund fehlender Informationen zu der zurückzulegenden Fahrtstrecke erforderlich, diesbezüglich entweder eine konkrete Annahme (z.B. 20 km) zu treffen oder aber der Frage nachzugehen, ab welcher Entfernung sich welches der beiden Angebote lohnt.

3. Mathematisieren
Bei diesem Schritt müssen die Preisinformationen in die Mathematik übersetzt werden. Folglich können in Abhängigkeit vom vorher gebildeten Realmodell beispielsweise zwei Gleichungen aufgestellt ($y = 0{,}25x + 90$ und $y = 0{,}15x + 110$) oder eine passende Wertetabelle angelegt werden. Das hierbei entstehende mathematische Modell, mit Hilfe dessen die Tarifstrukturen beider Anbieter mathematisch erfasst werden, ermöglicht dann deren Vergleich.

4. Mathematisch arbeiten
Bei diesem rein innermathematischen Teilschritt wird durch Anwendung geeigneter mathematischer Kenntnisse und Verfahren ein mathematisches Resultat erzeugt. Die anzuwendenden Lösungsverfahren können je nach aufgestelltem Modell verschiedener Art sein (z. B. systematisches Probieren, graphische Lösung, rechnerische Lösung oder rein inhaltliche Überlegungen). Zur Bewältigung dieses Teilschrittes ist hier insbesondere die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* erforderlich. Bei bestimmten Aufgaben können zusätzlich die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* und *Probleme mathematisch lösen* notwendig sein.

5. Interpretieren
Die erhaltene mathematische Lösung (z. B. $x = 200$ mit x: Anzahl der gefahrenen Kilometer) ist nun zurück auf die Realität zu übertragen und in dieser als reales Resultat zu deuten. Die Lösung $x = 200$ bedeutet hier, dass beide Angebote bei einer gefahrenen Strecke von 200 km gleich teuer sind und dass somit bei allen Entfernungen unter 200 km Angebot 1 günstiger ist und bei allen Entfernungen über 200 km Angebot 2 gewählt werden sollte.

6. Validieren
Das Resultat (200 km als Scheidepunkt zwischen den beiden Angeboten) ist nun anhand des Situationsmodells zu überprüfen: „Ist die Größenordnung plausibel?“, „Welche Entscheidung ist bei einer Entfernung von 201 km plausibel?“, „Ist die Genauigkeit sinnvoll?“, „Ist die Ausgangsfrage damit beantwortet?“. Eine solche Validierung erfordert auch die kritische Reflexion des (rein) rechnerischen Ergebnisses.
Führt eine solche Validierung zu einer Verwerfung des Resultats, ist der Modellierungskreislauf – beispielsweise mit veränderten Annahmen – erneut zu durchlaufen.

7. Darlegen
Die in der Aufgabe geforderte Beratung verlangt abschließend die Darlegung der gewonnenen Erkenntnisse. Dazu wird bei dieser Aufgabe in besonderem Maße die Kompetenz *Kommunizieren* (nämlich einem externen Adressaten Überlegungen und Ergebnisse verständlich darzulegen) benötigt.

Da der siebenschrittige Modellierungskreislauf im Allgemeinen zu komplex ist und aus empirischen Studien zudem bekannt ist, dass Schüler Schwierigkeiten haben, zwischen den sieben Schritten dieses Modellierungskreislaufs zu unterscheiden (vgl. Maaß, 2004), ist es sinnvoll, für den unterrichtlichen Einsatz einen vereinfachten Kreislauf zu verwenden. Aus diesen Gründen wurde im Rahmen des DISUM-Projekts[13] ein so genannter Lösungsplan entwickelt, der die sieben Schritte des oben vorgestellten Kreislaufs auf vier Schritte verdichtet und somit dessen Komplexität wesentlich reduziert (siehe Abb. IV.2). Dabei entspricht der erste Schritt „Aufgabe verstehen“ auch Schritt 1 im siebenschrittigen Modellierungskreislauf, der zweite Schritt „Modell erstellen“ fasst die Schritte 2 und 3 zusammen, der dritte Schritt „Mathematik benutzen“ entspricht Schritt 4 und der vierte Schritt

[13] Das Forschungsprojekt DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) ist ein im Jahr 2002 begonnenes DFG-Projekt unter der Leitung von Prof. Dr. W. Blum, Prof. Dr. R. Messner (beide Universität Kassel) und Prof. Dr. R. Pekrun (Universität München).

„Ergebnis erklären“ vereint die Schritte 5 bis 7 des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs. Eine bewusste Auseinandersetzung mit einem für Schüler und Lehrer gut nutzbaren Lösungsplan kann als strategisches Instrument eine erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unterstützen.
Solche Hilfen sind den Schülern bereits aus der Grundschule bekannt. Bereits in den ersten Schuljahren lernen Schüler zu benennen, was in einer Aufgabe gegeben und was gesucht ist, sowie dies von der Rechnung und der Antwort zu unterscheiden. Auf diesen grundlegenden Bausteinen des Lösungsprozesses einer Aufgabe aufbauend, kann zu Beginn der Sekundarstufe I gut der sog. Lösungsplan (vgl. auch 2.2.1) als vereinfachte Version des Modellierungskreislaufs erarbeitet werden, und daran lassen sich die wesentlichen Bearbeitungsschritte und Merkmale von Modellierungsaufgaben verdeutlichen. Hierauf aufbauend ist auch eine unterrichtliche Auseinandersetzung mit dem siebenschrittigen Modellierungskreislaufs denkbar. Beiden Versionen ist gemeinsam, dass auf ihrer Grundlage die Lösungsprozesse bei Modellierungsaufgaben reflektiert und gesteuert werden können.
Zu diagnostischen Zwecken ist allerdings der siebenschrittige Modellierungskreislauf besser geeignet, da er die kognitiv ablaufenden Prozesse von Schülern beim Lösen von Modellierungsaufgaben wesentlich differenzierter erfasst als der demgegenüber vereinfachte Lösungsplan (vgl. auch Abschnitt 2.2.1).

Vier Schritte zur Lösung einer Textaufgabe („Lösungsplan“)

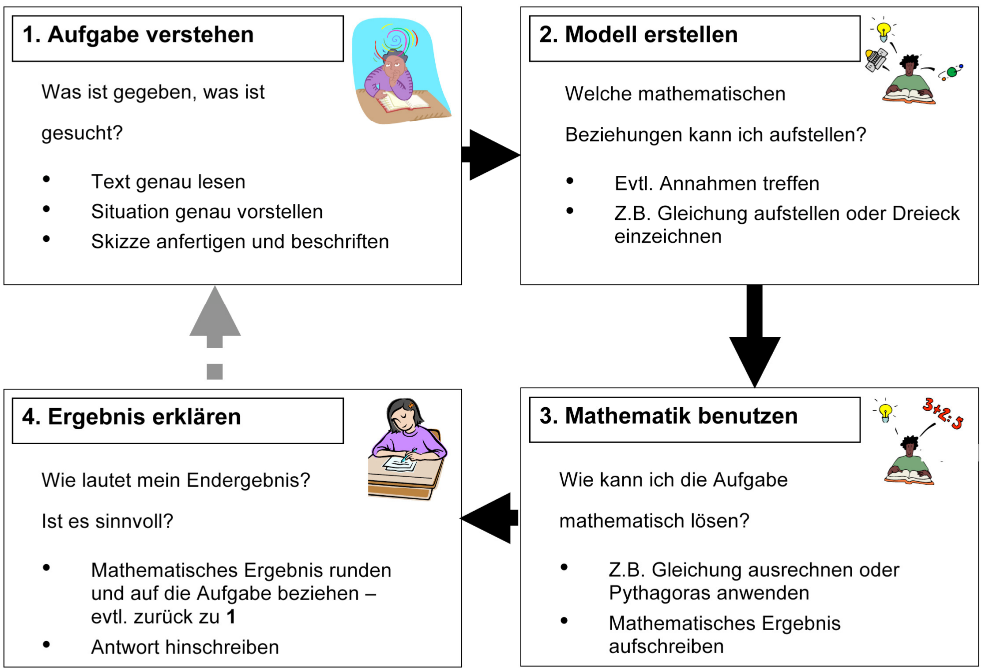


Abb. IV.2: Lösungsplan aus DISUM (vgl. Blum, 2007)

2. Möglichkeiten zur Förderung der Modellierungskompetenz

2.1. Modellieren im Unterricht

Ziel dieses Abschnitts ist es, anhand ausgewählter Aufgaben exemplarisch Möglichkeiten aufzuzeigen, die Kompetenz *Modellieren* im Unterricht zu fördern. Dieser Abschnitt kann es jedoch nicht leisten, ein systematisches Vermittlungskonzept zum Modellieren vorzustellen, zumal der Erwerb von Modellierungskompetenz ein langfristiger Prozess ist, der bereits im Primarbereich in angemessener Weise aktiviert werden sollte. Neben den hier vorgestellten Modellierungsaufgaben liefern vor allem neuere Schulbücher sowie beispielsweise die VERA 8-Aufgaben, zahlreiche Anregungen zu dieser Thematik (vgl. u. a. Dockhorn/Leiß, 2002, Drüke-Noe/Leiß, 2005, Leiß/Wiegand, 2006, Maaß, 2007, Leiß, 2007). Eine weitere wichtige Grundlage für die Entwicklung der Modellierungskompetenz stellt neben dem Einsatz adäquater Aufgaben die Beachtung der Qualitätskriterien für eine „gute Unterrichtspraxis" (vgl. Abschnitt II) dar.

Im Folgenden werden exemplarisch einige Modellierungsaufgaben unterschiedlicher kognitiver Komplexität, d. h. unterschiedlicher Anforderungsbereiche, vorgestellt. Diese Aufgaben werden zunächst mit Bezug zum Modellierungskreislauf kurz analysiert, bevor anschließend Verbindungen zu einer weiteren ausgewählten mathematischen Kompetenz neben der des Modellierens aufgezeigt und Unterrichtsanregungen gegeben werden. Den Abschluss bildet eine Analyse der Aufgabe „Tanken“.

2.2. Beispiele für Modellierungsaufgaben im Unterricht

2.2.1 Die Aufgabe „Fähre“ (Anforderungsbereich II)

Frau Weitzel fährt einen PKW mit 5 Sitzen. Sie muss in der nächsten Woche viermal auf die andere Rheinseite (und zurück) und benutzt die Autofähre. Welche Karte sollte sie kaufen, um möglichst wenig zu bezahlen?

Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

Preistafel

	Einfach	10er-Karte	Wochenkarte
Fußgänger	1,40	8,-	7,-
Fahrrad, Moped	1,80	14,-	12.-
Motorrad	2,00	16,-	13,-
PKW bis 5 Sitze	3,00	24,-	17,-
PKW ab 6 Sitze (Kombi, Kleintransporter)	3,50	27,-	19,-

„Einfach“ bedeutet eine Einzelfahrt (ohne Rückfahrt)

Schüler müssen vor der Bearbeitung der Aufgabe „Fähre“ zunächst die vorliegende Realsituation und die in der Tabelle dargelegten Informationen verstehen, um ein adäquates reales Modell aufstellen zu können. Unter Berücksichtigung des Fahrzeugtyps, der Anzahl der wöchentlichen Fahrten und der angegebenen Preistafel ist die Realsituation daraufhin zu strukturieren. Bei diesem mehrschrittigen Vorgehen sind mehrere Informationen gezielt aus der im Aufgabentext beschriebenen Realsituation sowie aus der Tabelle zu entnehmen und miteinander zu verknüpfen. Erst danach kann ein geeignetes mathematisches Modell

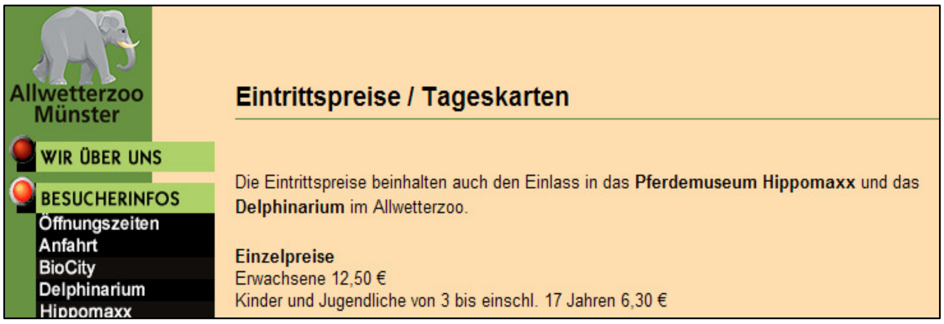
aufgestellt werden, mit dessen Hilfe die Art der günstigsten Karte ermittelt wird. Dieses Resultat ist abschließend wiederum im Kontext zu deuten und zu validieren.
Um den Ablauf dieses Bearbeitungsprozesses sowie die einzelnen Teilschritte des Modellierens transparent und auf einer Metaebene bewusst zu machen, ist eine anschließende Reflexionsphase sehr geeignet, in der anhand der hier vorgestellten, in ihren Teilschritten überschaubaren Aufgabe „Fähre“ der erwähnte Lösungsplan (siehe Abb. IV.2) erarbeitet werden kann. Hierzu können den Schülern zunächst Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess der Aufgabe gestellt werden, beispielsweise beginnend mit „Wie seid Ihr bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgegangen?“, „Was habt Ihr zuerst gemacht und was danach?“, „Welche Schwierigkeiten sind aufgetreten und wie habt ihr diese gelöst?“ oder „Was hat Euch beim Bearbeiten der Aufgabe geholfen?“. Mit solchen und ähnlichen Fragen kann zunächst der erste Schritt des Lösungsplans „Aufgabe verstehen“ mit seinen einzelnen Facetten erarbeitet werden. Schülern soll in dieser Reflexionsphase der Aufgabenbearbeitung ebenso bewusst gemacht werden, dass sie einen Übergang von der Realität zur Mathematik vornehmen, indem sie ein „Modell erstellen“ (Schritt 2 des Lösungsplans). Während in dieser Aufgabe die für die Modellierung zu treffenden Annahmen bereits gegeben sind, kann bei der Erarbeitung des Lösungsplans besprochen werden, dass solche Annahmen je nach Aufgabe unter Umständen erst zu treffen sind.
Beim Verdeutlichen von Schritt 4 „Ergebnis erklären“ durch derartige Reflexionsfragen ist im Unterricht hervorzuheben, dass die Ermittlung eines Endergebnisses den Bearbeitungsprozess einer (Modellierungs-)Aufgabe nicht abschließt. Schüler sollten immer wieder dazu angehalten werden, ein Endergebnis bewusst zu reflektieren und zu beurteilen, ob es im Kontext sinnvoll ist. Geeignete Reflexionsfragen könnten im Aufgabenbeispiel „Fähre“ sein: „Wurden alle in der Aufgabe genannten Angaben und Annahmen berücksichtigt?“, „Ist die Ersparnis gegenüber der nächst teureren Karte angemessen, oder wäre der Kauf einer anderen Karte in diesem Realkontext sinnvoller?“ Die Sinnhaftigkeit des Stellens solcher und ähnlicher Reflexionsfragen belegt exemplarisch die Analyse erwartbarer Schwierigkeiten und Fehler bei der Bearbeitung dieser Aufgabe (vgl. Kapitel 3).
Reflexionsfragen zum Bearbeitungsprozess gestatten, ausgehend von einem speziellen Beispiel das Allgemeine eines Aufgabenbearbeitungsprozesses herauszuarbeiten und in der geschilderten Weise den Lösungsplan sukzessive zu erarbeiten, um ihn bei der Bearbeitung anderer Modellierungsaufgaben bewusst anwenden zu können.

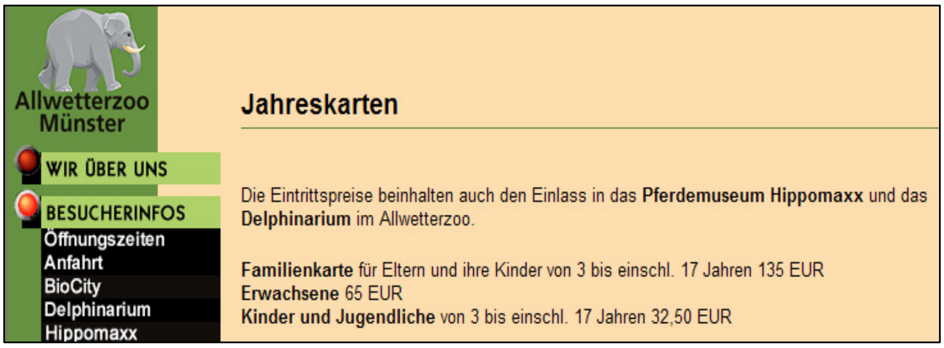
Die Kompetenz ***Kommunizieren (K6)*** spielt bei dieser wie auch bei vielen anderen Modellierungsaufgaben eine wesentliche Rolle und ist entscheidend für das erfolgreiche Aufstellen eines geeigneten Situationsmodells. Wie bei den meisten Modellierungsaufgaben geht es hier vor allem um das Verstehen von Texten und die Entnahme wichtiger Informationen („sinnentnehmende Seite“ des Kommunizierens). Während der Realitätsbezug von Modellierungsaufgaben insbesondere auch auf leistungsschwächere Schüler motivierend wirken kann, ist im Unterricht und selbstverständlich ebenso bei der Leistungsmessung generell zu beachten, dass vorliegende Leseanforderungen nicht zu komplex sein sollten, da sie sonst zu sehr die Aufgabenbearbeitung erschweren können. Dennoch sollte mit bestehenden Anforderungen an das Lesen offensiv umgegangen werden und keinesfalls auf die Behandlung textintensiver Aufgaben verzichtet werden. Hinweise zur Förderung von Lesestrategien beispielsweise mithilfe eines sog. Lesefächers finden sich beispielsweise in Mohl-Lamb (2007).
Im Unterricht kann der beschriebenen Komplexität des Kommunizierens in verschiedener Weise Rechnung getragen werden. Insbesondere ist es wünschenswert, den Schülern Strategien zu vermitteln, die sie befähigen, selbstständig komplexere Texte zu verstehen. Dazu können relevante Informationen beispielsweise optisch hervorgehoben oder auf das sorgfältige Lesen der Aufgabe als Grundlage für deren Bearbeitung verwiesen werden. Damit sich die Schüler die Realsituation möglichst konkret vorstellen können, kann eine Skizze der Realsituation mit den in die Modellierung eingehenden Angaben angefertigt werden. Konkret könnte in einer solchen Skizze zu der Aufgabe „Fähre“ der Rhein dargestellt, die einzelnen Überfahrten mit Pfeilen symbolisiert und diese mit den zu

zahlenden Preisen versehen werden, um einen besseren Überblick über die entstehenden Kosten zu gewinnen.

2.2.2. Die Aufgabe „Zoobesuch“ (Anforderungsbereich II)

Du siehst hier zwei Bildschirmfotos aus dem Internetauftritt des Zoos in Münster.





Herr und Frau Schöffler haben drei Kinder (fünf, sieben und zehn Jahre). Sie wollen eine Familien-Jahreskarte kaufen.
Ermittle, wie oft sie zusammen in den Zoo gehen müssen, damit sich der Kauf im Vergleich zu den Tageskarten auch lohnt.

Notiere deine Rechnung.

Die Aufgabe „Zoobesuch“ ist hinsichtlich des Modellierens ähnlich komplex wie die Aufgabe „Fähre“. Beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs ist hierbei u. a. die Kompetenz ***Probleme mathematisch lösen (K2)*** erforderlich. Die Schüler wählen eine naheliegende heuristische Strategie (hier z.B. das „Zerlegungsprinzip“, im Sinne des Zerlegens des gegebenen Problems in Teilprobleme) und vereinfachen und strukturieren auf diese Weise die beschriebene Realsituation. Beim nächsten Schritt des Mathematisierens können sie die im Realmodell getroffene Annahme, dass stets beide Elternteile und alle drei Kinder zusammen den Zoo besuchen, verwenden, um schließlich durch mehrschrittiges mathematisches Arbeiten zunächst die Kosten für jeden einzelnen Zoobesuch zu errechnen. Diese sind dann in Beziehung zum Preis einer Familien-Jahreskarte zu setzen, um herauszufinden, ab welcher Anzahl an Zoobesuchen sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte lohnt.
Im Unterricht kann am Beispiel dieser Aufgabe anschaulich die besondere Rolle des Interpretierens und Validierens im Modellierungsprozess deutlich gemacht werden. Besteht das aufgestellte mathematische Modell beispielsweise aus der Gleichung
$x \cdot (2 \cdot 12{,}5 + 3 \cdot 6{,}3) = 135$ (mit x: Anzahl der Zoobesuche), so ist die Rückübersetzung des erhaltenen mathematische Resultats $x = 3{,}075...$ in die Realität eine nicht-triviale kognitive Leistung. So ist u.a. die Antwort „Ab 3 Zoobesuchen lohnt sich der Kauf einer Familien-Jahreskarte.“ zu erwarten. Diese sollte im Unterricht unbedingt aufgenommen und mit den Schülern thematisiert werden. Es ist nämlich keinesfalls eindeutig, ob diese Antwort als

falsch oder richtig zu werten ist, denn bei genau 3 Zoobesuchen im Jahr beträgt der Preisunterschied zwischen dem Kauf einer Familien-Jahreskarte und dem von Einzelkarten marginale 3,30 €, so dass man – fasst man die Aufgabe als realistische Problemstellung auf – bei geplanten 3 Zoobesuchen im Jahr sicherlich darüber streiten kann, ob sich Familie Schöffler nicht doch eine Familien-Jahreskarte zulegen sollte, um die Option zu haben, den Zoo noch ein viertes oder gar ein fünftes Mal ohne zusätzliche Kosten besuchen zu können. An diesem Beispiel wird also deutlich, dass selbst bei der Interpretation des mathematischen Resultats Spielräume vorhanden sind, die – je nach getroffenen Annahmen – zu unterschiedlichen Aussagen führen können. Diese Offenheit sollte als wesentliches Element realer Problemstellungen im Unterricht zugelassen und dazu genutzt werden, die Schüler anzuregen, den Realkontext bei der Interpretation mathematischer Ergebnisse (und auch bei den anderen Teilschritten des Modellierens) möglichst ernst zu nehmen.

2.2.3. Die Aufgabe „Apfelkauf“ (Anforderungsbereich I)

> 4 kg Äpfel kosten 9,60 €.
>
> Berechne, wie viel 6 kg derselben Sorte kosten.

Dies ist eine – empirisch - sehr einfache Modellierungsaufgabe, die gleichsam bei ihrer Bearbeitung das Durchlaufen der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs erfordert. Die vorzunehmenden Übersetzungen können jedoch alle direkt ausgeführt werden, und neben der Kompetenz des ***technischen Arbeitens (K5)*** sind keine weiteren Kompetenzen erforderlich. Zunächst ist die beschriebene Problemsituation zu verstehen. Anders als bei komplexeren Modellierungsaufgaben ist hier jedoch keine weitere Vereinfachung der Sachsituation nötig (Schritt 2 des Modellierungskreislaufs fällt hier also weg). Daher können die Schüler unmittelbar ein einfaches Proportionalitäts-Modell aufstellen, innerhalb dessen sie rechnerisch den gesuchten Preis für die Äpfel ermitteln. Das mathematische Resultat, hier der ermittelte Preis für 6 kg Äpfel, ist schließlich im Kontext zu deuten und auf seine Plausibilität hin zu prüfen, um mögliche Fehler aufzudecken.
Insbesondere das häufig vernachlässigte Validieren des Ergebnisses kann anhand dieser Aufgabe bewusst gemacht werden. Gerade offensichtliche Fehllösungen, wie etwa 57,60 € (9,60 € · 6), geben Anlass hierzu und ermöglichen es, Fehler konstruktiv als Lernanlass zu nutzen. Die vorliegende Situation legt in besonderer Weise nahe, bereits vor der rechnerischen Bearbeitung der Aufgabe zu überschlagen, wie hoch der gesuchte Preis ungefähr sein wird. Um die Bedeutung des Validierens noch stärker herauszustellen, können Schüler aufgefordert werden, vorgelegte Ergebnisse zu anderen Aufgaben auf ihre Plausibilität hin zu prüfen, was zum Beispiel durch geeignetes Überschlagsrechnen erfolgen kann.
Alternativ kann im Rahmen des Validierens das unkritische Extrapolieren bei Aufgaben zu Proportionalitäten zum Gegenstand gemacht werden. Eine mögliche Aufgabe dazu könnte sein:

3 kg Äpfel kosten 5,99 €. Wie viel kosten 6 kg (50 kg, 500 kg) Äpfel dieser Sorte?

Während der Proportionalitätsansatz bei geringeren Mengen noch zulässig erscheint, kann er bei größeren Mengen zumindest in Frage gestellt werden. Auch der Kontext „Heizölkauf“ bietet sich für eine solche kritische Validierung an.

2.2.4. Die Aufgabe „Gummibären“ (Anforderungsbereich III)

> Nach Herstellerangaben werden vor dem Abfüllen von Gummibärchen in Tüten die Bären folgendermaßen durchgemischt: Je ein Sechstel grüne, gelbe, weiße und orangefarbene Bären und ein Drittel rote Bären. Die Hälfte der roten Bären schmeckt nach Erdbeere, die andere Hälfte nach Himbeere.
>
> Luisa hat eine Minitüte bekommen, mit vier grünen, zwei roten, drei orangefarbenen, zwei weißen und einem gelben Gummibärchen. Sie sagt:
>
> „Daran sieht man, dass die Angaben des Herstellers über die Mischung der Farben gar nicht stimmen können.“
>
> Erkläre, was Luisa damit meint, und beurteile ihre Aussage.

Bei dieser Aufgabe wird die Kompetenz *Modellieren* auf höchstem Niveau benötigt, da ein vorgegebenes Modell zu bewerten ist. Hier sind damit insbesondere die letzten drei Schritte des Modellierungskreislaufs (Interpretieren, Validieren, Darlegen) von großer Bedeutung. Um Luisas Aussage zu beurteilen, müssen Schüler deren Interpretation zum vorliegenden stochastischen Modell (welches zunächst rekonstruiert werden muss) in Beziehung setzen, um sie dann validieren zu können. Dies setzt voraus, dass die Schüler ein grundlegendes Verständnis von Zufallsprozessen haben, damit sie beurteilen und schließlich argumentativ darlegen können, dass die Zusammensetzung der Gummibären in Luisas Minitüte den Angaben des Herstellers nicht widerspricht.
Die kognitive Komplexität dieser Aufgabe spiegelt sich in ihren hohen empirischen Schwierigkeitswerten wider und ist in der hier nötigen mehrstufigen Argumentation ***(Kompetenz Argumentieren, K1)*** begründet. Die Durchführung und Darlegung solcher begründeter Beurteilungen kann im Unterricht zur Verminderung von Schwierigkeiten separat geübt werden. Zahlreiche Unterrichtserfahrungen und -beobachtungen zeigen, dass es vielen Schülern Schwierigkeiten bereitet, ihre Lösungsprozesse strukturiert und angemessen darzulegen. Daher sollte auch dies mit Schülern geübt werden. Eine mögliche Vorgehensweise hierzu besteht darin, Schüler in Partnerarbeit ihre notierten Rechnungen oder Argumentationen austauschen zu lassen, wobei der jeweilige Partner diese nachvollziehen und verbalisieren muss. Dies gestattet, die Verständlichkeit der Darlegung zu überprüfen und zudem Lücken in der Argumentationskette aufzuzeigen. Eine andere Vorgehensweise kann darin bestehen, die einzelnen Elemente einer Argumentationskette in beliebiger Reihenfolge vorzugeben und diese von den Schülern begründet ordnen zu lassen. Auch hierbei sind weitere Varianten denkbar, indem etwa überflüssige Argumente hinzugefügt oder notwendige weggelassen werden.
Des Weiteren kann das Verständnis der vorliegenden Situation durch die Durchführung geeigneter Zufallsexperimente unterstützt werden. So können in einem Urnenexperiment, das auch mit dem Computer simuliert werden kann, aus einer großen Menge farbiger Kugeln, deren anteilige Zusammensetzung dem in der Aufgabenstellung angegebenen Mischungsverhältnis des Herstellers entspricht, 12 Kugeln gezogen und deren Farben notiert werden. Die Entwicklung eines vertieften Verständnisses von der Zufälligkeit der farblichen Zusammensetzung der 12 Kugeln erfordert, das Experiment mehrfach zu wiederholen und die einzelnen Ergebnisse zu protokollieren. Alternativ zu einem Urnenexperiment kann auch eine Simulation mit Hilfe eines Würfels durchgeführt werden, dessen sechs Seiten unterschiedlich gefärbt sind. Protokolliert man die Ergebnisse bei einer geringen Anzahl von Würfen (z. B. sechs oder zwölf), wird deutlich, dass das Ergebnis nicht notwendigerweise die tatsächliche Verteilung der Farben auf den Seiten des Würfels wiedergibt und dass eine sehr hohe Anzahl von Versuchsdurchführungen erforderlich ist, um Stabilisierungen beobachten zu können.

2.2.5. Die Aufgabe „Tanken“ (Anforderungsbereich III)

Tanken

Frau Stein wohnt in Trier 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 Euro, im Gegensatz zu 1,30 Euro in Trier.

Lohnt sich die Fahrt für Frau Stein?

Die Aufgabe „Tanken“ (dem DISUM-Projekt entnommen; siehe Blum/Leiß, 2006) ist eine realistische und zudem komplexe Modellierungsaufgabe. Der authentische Kontext wird u.a. durch das gesellschaftliche Interesse am dargelegten Thema untermauert, insbesondere gab es im Laufe der letzten Jahre zahlreiche Zeitungsartikel zum Thema „Tanktourismus“ (siehe z.B. nebenstehenden Zeitungsartikel).

„Rollende Bomben“

Benzinschmuggel nimmt deutlich zu / Sprit wird meist in nicht zugelassenen Behältern transportiert

VON ULF MAUDER, DPA

„Rollende Benzinbomben“ auf der Autobahn: Der Holzverschlag „Marke Eigenbau“ auf dem Kleintransporter aus Wittlich zieht [illegible] treibstoff, der in Luxemburg derzeit rund 30 Cent billiger ist als in Deutschland.

„Wir entdecken immer häufiger diese rollenden Benzinbomben“, berichtet Günter Scalla, Leiter des Gefahrguttrupps des Polizeipräsidiums Trier. Nach dem Gefahrgut- [illegible] dass sie erwischt werden. Je höher in Deutschland die Preise steigen, desto reger wird der Tanktourismus, bestätigt auch der luxemburgische Hauptzollinspektor Guy Loesch. In Wasserbillig etwa reiht sich eine [illegible]

[illegible] um sich für eine längere Zeit einzudecken. „Das Schlimmste dabei ist, dass die Behälter in den meisten Fällen nicht geprüft und zugelassen sind“, berichtet er.

Ein deutscher Zollbeamter berichtet, er habe im Juni im Gepäckraum eines Koblen- [illegible] ren nach Luxemburg geschickt haben. Wer ertappt wird, muss die Mineralölsteuer nachzahlen.

Verfahren wegen Steuerhinterziehung und wegen unerlaubten Transports von ge- [illegible] Verdacht über mögliche gefährliche Ladungen schöpfen“, berichtet Scalla. Oft seien die Transportmittel abenteuerlich. „Da finden wir Wasserbehälter oder Großpackmittel“, sagt Scalla.

[illegible]

Abb. IV.3: Zeitungsartikel „Rollende Bomben“

Zur Lösung der Aufgabe ist in besonderem Maße die Kompetenz ***Modellieren*** gefordert, es sind aber auch die Kompetenzen ***Argumentieren***, ***Problemlösen***, ***technisches Arbeiten*** und ***Kommunizieren*** notwendig. Für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe müssen alle Teilschritte des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs bewältigt werden, wobei an dieser Stelle auf den zweiten Schritt „Vereinfachen/Strukturieren“ näher eingegangen werden soll. Beim Erstellen des Realmodells ist zu beachten, dass zumindest zwei konkrete Annahmen zum Tankvolumen und zum Benzinverbrauch getroffen werden müssen, um die Fragestellung, ob sich die Fahrt für Frau Stein lohnt, beantworten zu können. Allerdings bietet die Aufgabenstellung die Möglichkeit, verschiedenste weitere Annahmen zu treffen, beispielsweise, dass Frau Stein einen gut bezahlten Beruf ausübt, so dass unter dieser Annahme der Zeitfaktor wichtiger erscheint als eine mögliche Kostenersparnis oder die Berücksichtigung des Verschleißes des Autos. Aufgrund der Offenheit der Aufgabe sind somit viele Schülerlösungen möglich und auch erwünscht. Dies bedeutet wiederum, dass Lehrkräfte den Lösungsraum der Aufgabe möglichst gut kennen sollten, um so während des Unterrichts Schülerlösungen möglichst schnell verstehen und Fehler diagnostizieren zu können, so dass sie optimal auf mögliche Fragen und Probleme reagieren und adäquat intervenieren können. Die oben erwähnte Lösungsvielfalt sollte im Unterricht angesprochen und mit den Schülern diskutiert werden, so dass Schüler zu der Einsicht gelangen können, dass es zu realitätsbezogenen Aufgaben bzw. Problemstellungen meist keine eindeutigen Antworten gibt, sondern dass diese von den getroffenen Annahmen, d.h. dem aufgestellten Modell, abhängig sind. Des Weiteren sollte gerade bei solch authentischen Problemstellungen wie „Tanken“ unbedingt eine Validierung des Ergebnisses bzw. des aufgestellten Modells erfolgen, so dass unter Umständen der Modellierungskreislauf mit veränderten Annahmen und einem modifizierten oder erweiterten Modell erneut (evtl. sogar mehrmals) durchlaufen werden muss bzw. kann.

Die Lösungsvielfalt und die Authentizität der Aufgabe legen es nahe, eine Projektarbeit zum Thema „Tanktourismus“ durchzuführen. So können beispielsweise Schülergruppen beauftragt werden, zu den verschiedenen für die Problemstellung möglicherweise relevanten

Aspekten, wie z.B. Tankvolumen eines VW Golfs, Verbrauch, Verschleißkosten oder Umweltbelastungen, Informationen zu beschaffen. Auf der Grundlage dieser Informationen können dann unterschiedliche Modellierungen vorgenommen werden, die abschließend im Klassenverband präsentiert und unter Berücksichtigung der wichtigsten Modellierungsaspekte reflektierend miteinander verglichen werden können.
Das Thema „Tanktourismus“ könnte zudem in einem fächerverbindenden Unterricht (Mathematik, Naturwissenschaften, Gesellschaftswissenschaften) vertieft werden.

2.3. Zusammenfassung

All diese Ausführungen zeigen, dass das Bewusstmachen aller einzelnen Teilschritte beim Durchlaufen des Modellierungskreislaufs die potentiellen Hürden für Schüler beim Lösen von solchen Aufgaben verringern kann, und dass es gilt, auch Teilschritte des Modellierens einzuüben und diese den Schülern bewusst zu machen. Zudem ist deutlich geworden, dass die Kompetenz *Modellieren* viele Teilkompetenzen umfasst und nahezu immer in Kombination mit anderen mathematischen Kompetenzen auftritt, so dass bei der langfristigen Förderung der Modellierungskompetenz notwendigerweise immer auch andere Kompetenzen (möglichst ausgewogen) in den Blick genommen werden müssen. Aus all dem lässt sich folgern, dass verständiges Modellieren für alle Beteiligten anfangs nicht sehr einfach ist. Dies zeigen theoretische Analysen ebenso wie empirische Befunde. Der Einstieg in die bewusste und reflektierte Behandlung von Modellierungsaufgaben kann jedoch gut mit einfacheren und erst allmählich komplexer werdenden Beispielen gelingen und es gibt ermutigende Hinweise, dass der Erwerb einer angemessenen Modellierungskompetenz gelingen kann. So antwortet Blum (2007) auf die Frage, ob Modellieren für Schüler zu schwierig sei, auf der Basis empirischer Befunde aus dem DISUM-Projekt: „Modellieren ist schwer, aber nicht zu schwer, vielmehr gibt es dichte Hinweise auf Gelingensbedingungen, deren Berücksichtigung – bei Konstanthalten anderer Bedingungen – bessere Lernerfolge mit sich bringt.“ Somit sind für das Lehren und Lernen folgende Aspekte von Bedeutung (vgl. Blum, 2007):

- Die eingangs genannten Qualitätskriterien für guten Mathematikunterricht (vgl. Abschnitt II.1.3) müssen speziell auch in einem modellierungsorientierten Unterricht berücksichtigt werden.
- Auch im modellierungsorientierten Mathematikunterricht muss stets die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung gewahrt werden (im Sinne des bekannten Montessori-Prinzips „Hilf mir, es selbst zu tun“).
- Hilfreich für Schüler und Lehrer ist ein Werkzeug wie der Lösungsplan bzw. der Modellierungskreislauf (für Schüler als Hilfe bei allfälligen Schwierigkeiten im Lösungsprozess, für Lehrer als Basis für Diagnosen und Interventionen), dessen Gebrauch jedoch eingeübt werden muss.
- Modellierungskompetenz muss langfristig und gestuft aufgebaut werden, u. a. durch
  - eine allmähliche Steigerung der Komplexität von Aufgaben,
  - ein breites Spektrum von Aufgabentypen und eine systematische Variation der Kontexte,
  - den parallelen Aufbau heuristischer Fähigkeiten,
  - häufige Übungs- und Festigungsphasen.

Die in den vorangegangenen Abschnitten zu den einzelnen Aufgaben gegebenen Hinweise sollen dazu beitragen, einen solchen Unterricht zu fördern.

5. Literaturverzeichnis

Kapitel 2: Fachallgemeine Erläuterungen

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Bruder, R. / Leuders, T./ Büchter, A. (2008): Mathematikunterricht entwickeln 5.-10. Schuljahr: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Klieme, E./ Neubrand, M./ Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske und Budrich, Opladen, S. 141-190.

Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8 (Hrsg.: Henn,H.-W. & K. Maaß). Franzbecker, Hildesheim, S. 6-15.

Kapitel 4: Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In: Trends und Perspektiven (Hrsg.: G. Kadunz u. a.), Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 15-38.

Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Blum, W./ Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: mathematik lehren, Heft 128, S. 18-21.

Blum, W. et al. (Hrsg., 2007): Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer, New York.

Borromeo Ferri, R. (2006): Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 86-95.

Dockhorn, C./ Leiß, D. (2002): PISA weitergedacht. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik (Hrsg.), Wiesbaden.

Drüke-Noe, C./ Leiß, D.(2005): Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze. Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematik-Unterricht. Hess. Landesinstitut für Pädagogik [Hrsg.], Wiesbaden.

Galbraith, P./ Stillman, G. (2006): A framework for identifying blockages during transitions in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38, H. 2, S. 143-162.

Henn, H.-W. (2002): Mathematik und der Rest der Welt. In: mathematik lehren, Heft 113, S. 4-7.

Leiß, D./ Blum, W. (2006): Beschreibung der Kompetenzen. In: Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I:

Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor, Berlin, S. 33-48.

Leiß, D./ Wiegand, B./ Blum, W. (2006): PISA-SINUS-Bildungsstandards. In: Steffens, U., Messner, R. [Hrsg.]: Pisa macht Schule. Konzeptionen und Praxisbeispiele zur neuen Aufgabenkultur. Hess. Landesinstitut für Pädagogik, Wiesbaden, S. 63-125.

Leiss, D. (2007): Hilf mir es selbst zu tun. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht. Franzbecker, Hildesheim.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Mohl-Lamb (2007): Sachtexte mit dem Lesefächer knacken. In: mathematik lehren, Heft 143, S. 68.