Niedersächsisches Kultusministerium
Referat 33 / Logistikstelle für zentrale Arbeiten

Januar 2016

Aufgaben für das Fach Mathematik

Eingesetzte Abituraufgaben aus dem länderübergreifenden Abituraufgabenpool

2014

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik stammen die Aufgaben aus zwei Aufgabenpools, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Die vorliegenden Aufgaben sollen die Möglichkeiten der Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis über die veröffentlichten Musteraufgaben hinaus erweitern.

Dabei gilt für Niedersachsen die Einschränkung, dass bis zur Abiturprüfung 2016 die Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen als verbindlicher Inhalt auch Gegenstand der Abiturprüfung war und entsprechende Aufgaben für den Pflichtteil ausgewählt wurden. Für die Abiturprüfung 2014 betrifft das etwa die Aufgabe LA1_1. Ab der Abiturprüfung 2017 werden Inhalte aus der vektoriellen Analytischen Geometrie gemäß der Alternative A2 der Bildungsstandards Gegenstand der Abiturprüfung sein. Damit können auch Aufgaben mit solchen Inhalten aus dem Aufgabenpool für den Pflichtteil ausgewählt werden.

1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2 \cdot e$ gilt. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1 a)	Mit $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus $2 \cdot x + x^2 = 0$ die Nullstellen 0 und -2.	2
b)	Ableitung mit der Produktregel und Ausklammern der e-Funktion $G(x) = x^2 \cdot e^x + e$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A1_2

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -x^2 + a \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie mithilfe der Lage des Graphen von f_1 im Koordinatensystem, dass

$\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx > 0$ gilt. (2 BE)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_{-1}^{1} f_a(x)\,dx = 0$ gilt. (3 BE)

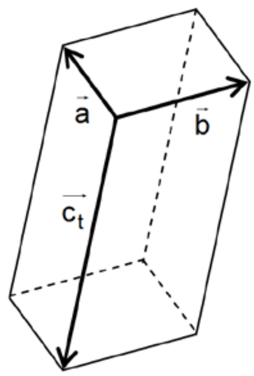
	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A1_2 a)	Beim Graphen der Funktion f_1 handelt es sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(0\,\|\,1)$. Diese Funktion hat ihre Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Damit liegt der Graph der Funktion für $-1 < x < 1$ oberhalb der x-Achse und der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ ist positiv.	2
b)	$\int_{-1}^{1} f_a(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + a)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + a \cdot x\right]_{-1}^{1} = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + a \cdot x\right]_{0}^{1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + a\right)$ Also muss $a = \frac{1}{3}$ sein, damit die Bedingung erfüllt ist.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G1_1

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t \\ 2 \cdot t \\ -5 \cdot t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind. (2 BE)

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt. (3 BE)

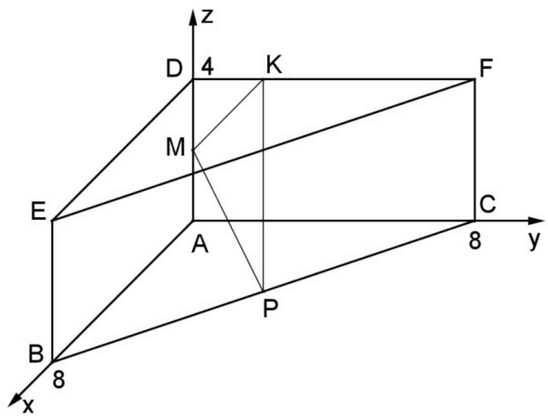
	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1		
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \overrightarrow{c_t} = 0$; $\vec{b} \cdot \overrightarrow{c_t} = 0$	2
b)	$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{c_t}\rvert = 15$; $3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot \lvert t\rvert = 15$; $t = \frac{1}{3}$ oder $t = -\frac{1}{3}$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G1_2

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma ABCDEF mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.

a) Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F. (2 BE)

b) Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$. Der Punkt $K(0|y_k|4)$ liegt auf der Kante $\overline{DF}$.
Bestimmen Sie y_k so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist. (3 BE)



	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_2 a)	Es gilt: $B(8\|0\|0)$, $F(0\|8\|4)$ und damit $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\left\|\overrightarrow{BF}\right\| = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$.	2
b)	Es gilt: $M(0\|0\|2)$, $P(4\|4\|0)$, $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MK} = 0 + 4 \cdot y_K - 4 = 0$. Daraus ergibt sich $y_K = 1$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Produktionsschritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Nachfolgend ist angegeben, wie viele Mengeneinheiten (ME) in den jeweiligen Produktionsschritten zur Herstellung von je einer ME der Zwischen- bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

von \ nach	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

von \ nach	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

a) Berechnen Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. (3 BE)

b) Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 40 ME zurückgreifen.
Berechnen Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn Z_1 und Z_2 in der gleichen Anzahl von ME produziert werden müssen. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_1 a)	Mit den Matrizen A bzw. B lässt sich die Verflechtung der Rohstoffe mit den Zwischenprodukten bzw. die Verflechtung der Zwischenprodukte mit den Endprodukten beschreiben. $A=\begin{pmatrix}2&6\\4&4\\6&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&2&8\\5&8&2\end{pmatrix}$; $A\cdot B=P=\begin{pmatrix}\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots\\40&28&52\end{pmatrix}$ Die Produktmatrix P beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen und Endprodukten. Da im Rahmen der Aufgabenstellung lediglich die letzte Zeile von Interesse ist, sind alternative Ansätze denkbar (direkte Berechnung). Die Summe der Elemente in der dritten Zeile beschreibt den Bedarf an Rohstoffen R_3 für eine Produktion von je einer ME der Endprodukte: $40+28+52=120$.	3
b)	Bei der Produktion von Z_1 und Z_2 in gleichen ME werden $6\cdot x+2\cdot x$ ME von R_3 benötigt. Aus $6\cdot x+2\cdot x=40$ folgt: Es lassen sich noch je 5 ME der jeweiligen Zwischenprodukte produzieren.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA1_2

Gegeben sind die Matrix A mit $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{u}$ mit $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Produkt $A\cdot\vec{u}$.
Geben Sie zwei von $\vec{u}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an, sodass gilt:
$A\cdot\vec{u}=A\cdot\vec{v}=A\cdot\vec{w}$. (3 BE)

b) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$ gilt: $A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_2 a)	Berechnung des Produktes: $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ Angabe zweier Vektoren der Form $\begin{pmatrix}k\\-k\\2\end{pmatrix}$ $(k\in\mathbb{R},\ k\neq 2)$	3
b)	Nachweis durch Berechnung des Produktes über $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\\4-k\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S1_1

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln.
Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:
Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an. (2 BE)

b) Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.
Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_1 a)	*rrwww* *rrrww* *rwwww*	2
b)	Es wird entweder zweimal eine weiße oder zweimal eine rote Kugel gezogen. $P(E)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{17}{30}$ E ist wahrscheinlicher als das Gegenereignis $\overline{E}$, da $P(\overline{E})=1-\frac{17}{30}=\frac{13}{30}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S1_2

Die Flächen zweier Würfel 1 und 2 sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet.

Würfel 1: B, B, C, C, C, C
Würfel 2: A, A, A, B, B, C

Für jeden der beiden Würfel wird angenommen, dass jede der Flächen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.

a) Würfel 1 wird zweimal geworfen.
Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird.
Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. (2 BE)

b) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S1_2 a)	Ansatz für Erwartungswert: <table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{1}{9}$</td></tr></table>$E(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$	2
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Würfel 1 gewählt wird und damit C gewürfelt wird, beträgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Würfel 2 gewählt wird und damit C gewürfelt wird, beträgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gewürfelter Buchstabe C mit Würfel 2 geworfen wurde, beträgt also $\frac{1}{12}:\left(\frac{4}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{5}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2

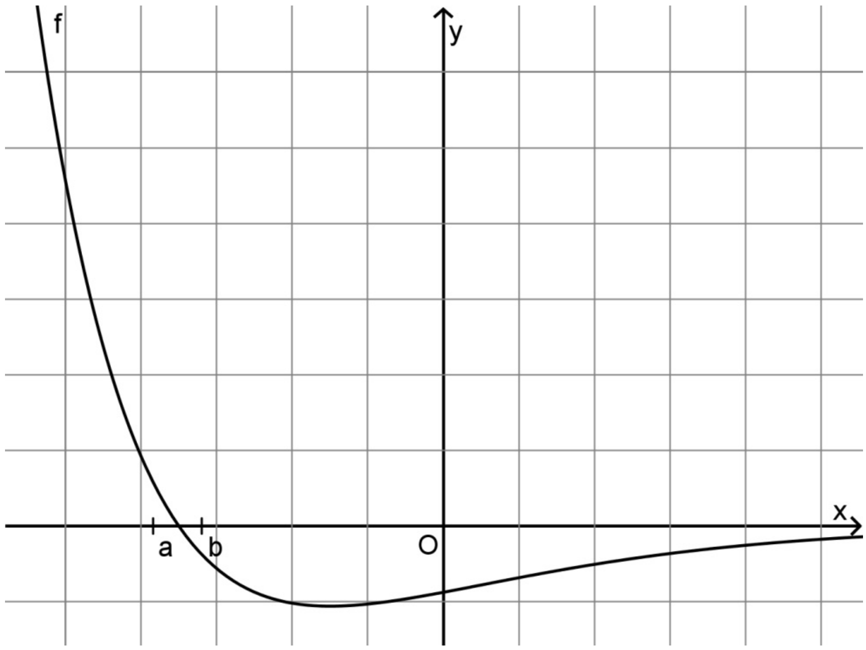
2.1 Analysis

A2_1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f. (2 BE)

b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich. (3 BE)



	Erwartete Schülerleistungen	BE
A2_1 a)	Beschreibung z. B.: links von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton wachsend rechts von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton fallend	2
b)	Skizze u. a.: Darstellung des Extrempunktes des Graphen der Stammfunktion Darstellung der Monotonieintervalle der Stammfunktion Darstellung des Wendepunktes des Graphen der Stammfunktion	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.2.1 Analytische Geometrie

G2

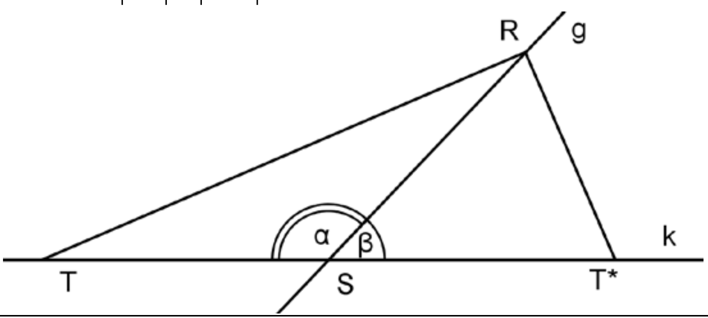
Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$.

a) Es existiert ein Wert von $a \ (a \in \mathbb{R})$, für den sich die Geraden g und

$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$ schneiden.

Bestimmen Sie diesen Wert von a. (3 BE)

b) Eine Gerade k schneidet die Gerade g in einem Punkt S.
Ein Punkt R auf der Geraden g und ein Punkt T auf der Geraden k sollen mit dem Punkt S ein gleichschenkliges Dreieck mit vorgegebenem Flächeninhalt bilden.
Begründen Sie, dass die Längen der Dreiecksseiten nicht eindeutig festgelegt sind, wenn sich die Geraden g und k nicht rechtwinklig schneiden. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G2 a)	$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & -3-r &=& 4+5s & \text{(I)}+\text{(II)} \Rightarrow 3=7+2s \Rightarrow s=-2 \\ \text{(II)} & 6+r &=& 3-3s & \vert s=-2 \Rightarrow 6+r=9 \Rightarrow r=3 \\ \text{(III)} & -4+3r &=& a+s & \vert r=3 \text{ und } s=-2 \Rightarrow 5=a-2 \Rightarrow a=7 \end{array}$	3
b)	Ist gemäß der folgenden Skizze durch die Punkte S, R und T ein gleichschenkliges Dreieck gegeben, so gibt es einen Punkt T* auf der Geraden k mit $\lvert\overline{ST}\rvert = \lvert\overline{ST^*}\rvert$. Dann sind die durch S, R und T sowie S, R und T* gegebenen Dreiecke gleichschenklig und flächeninhaltsgleich. Wegen $\alpha \neq \beta$ gilt aber $\lvert\overline{RT}\rvert \neq \lvert\overline{RT^*}\rvert$. Daher ist die Aussage ist wahr.  	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.3 Stochastik

S2

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0,8$ bzw. $p_2 = 0,2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann. (1 BE)

b) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term
$$1-\left(\binom{5}{3}\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2+\binom{5}{4}\cdot 0,8^4\cdot 0,2^1+\binom{5}{5}\cdot 0,8^5\right)$$
angegeben wird. (2 BE)

c) Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 2 dar. (2 BE)

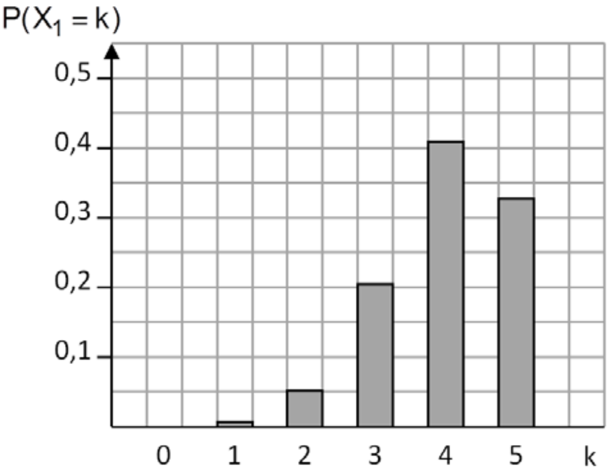


Abbildung 1

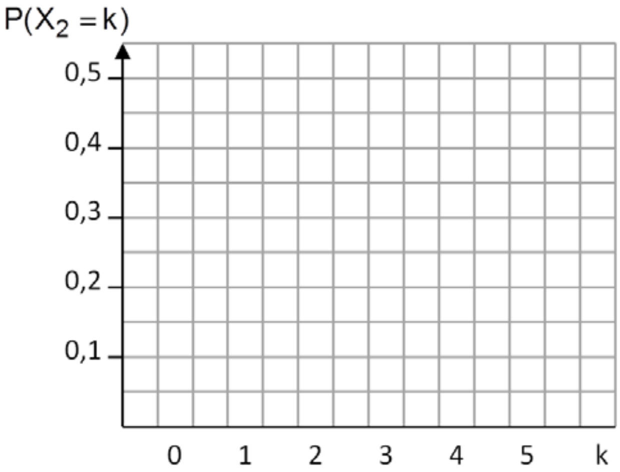
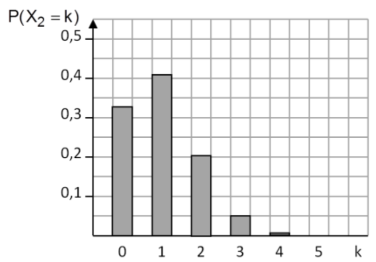


Abbildung 2

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S2 a)	$P(X_1 = 1) = \binom{5}{1}\cdot 0,8^1\cdot 0,2^4$	1
b)	Angabe eines Ereignisses, z. B.: Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei Zugrundelegung von X_1 zwei oder weniger Treffer erzielt werden.	2
c)	Darstellung der Verteilung 	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		