Integralrechnung Aufgaben

Wasserbecken

Bergstollen-Aufgabe

BMX-Rampe

Deichquerschnitte

Wachstum von Wildblumen

Zuschauerquote

Wasserbecken

Dreieck mit maximalem Flächeninhalt

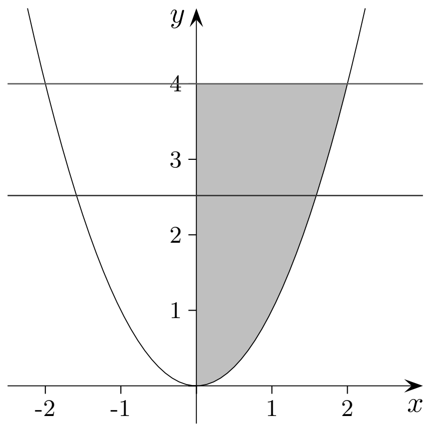
Ausflussgeschwindigkeit

Staubecken gA

Gastank

Staubecken eA

Integralrechnung Aufgaben



1. Die Parabel $f(x) = x^2 \;\; (x \geq 0)$, die Gerade $y = 4$ und die y-Achse umschließen eine Fläche A.
   Welche Parallele zur x-Achse halbiert die Fläche A?
   Gib die Gleichung dieser Parallelen an.

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ und der Tangente im Maximum umschlossen wird. Die Integrationsgrenzen sollen auch berechnet werden.

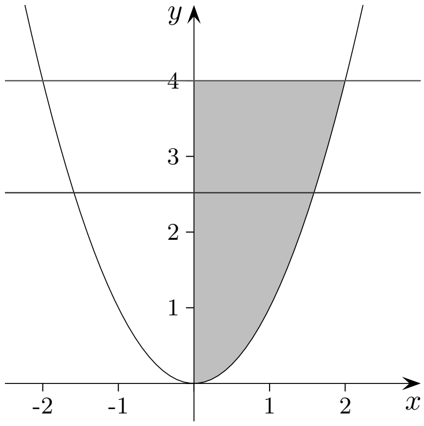
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - 4ax$, wobei $a < 0$ ist.
   Bestimme a so, dass die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{16}{3}$ *FE* (Flächeneinheiten) hat.

4. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ wird von einer Geraden mit positiver Steigung, die durch den Ursprung verläuft, geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die umschlossene Fläche 9 *FE (Flächeneinheiten)* beträgt?

5. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2\,, \quad k > 0, \quad$ und $\quad g(x) = x^2\,.$
   a) Berechne die $x-$Koordinaten des Minimums $Min(?\,|\,0)$ und des Maximums $Max(\,?\,|\,\frac{8}{27}k^2\,)$ von f.
   b) Fertige eine Skizze der Graphen für $k = 3$ an.
   c) Berechne für allgemeines k die von den Graphen f und g eingeschlossene Fläche.
   d) Gibt es ein k, so dass die eingeschlossene Fläche minimal wird? *(Begründung erforderlich)*

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 6x$. Berechne den Inhalt der Fläche, die die Tangenten in den Nullstellen mit dem Graphen von f einschließen.
   Bei dieser Aufgabe gibt es wesentliche Vereinfachungen!

Aufgaben Integralrechnung Lösungen



1. $x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$

   $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$

   $x^2 = c \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{c}, \quad (x_2 = -\sqrt{c})$

   $\int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\, c\, \sqrt{c}$

   $\frac{2}{3}\, c\, \sqrt{c} = \frac{8}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt[3]{16}$

2. $Max(0 \mid 4), \quad Min(2 \mid 0)$

   $x^3 - 3x^2 + 4 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$

   $\int_0^3 (4 - x^3 + 3x^2 - 4)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4}$

3. $ax^2 - 4ax = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4$ $\qquad \int_0^4 (ax^2 - 4ax)\, dx = -\frac{32}{3}\, a$

   $-\frac{32}{3}\, a = \frac{16}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$

4. $\int_0^{4m} (mx - \frac{1}{4}x^2)\, dx = 9 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{3}{2}$

5. a) $Min(0 \mid 0), \quad Max(\frac{2}{3}k \mid \frac{8}{27}k^2)$

   c) $\int_0^{\frac{k}{2}} (f(x) - x^2)\, dx = \frac{k^3}{96}$

6. $A = 2 \cdot \int_0^3 (6x - f(x))\, dx = 18$

7. Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Geraden $y = 4x + 1$ und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ umschlossen wird. (algebraisch oder GTR)

8. Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$, wird von einer Geraden mit positiver Steigung, die durch den Ursprung verläuft, geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die im 1. Quadranten umschlossene Fläche $\frac{9}{4}$ *FE* beträgt?

9. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ und $g(x) = x^2$ im 1. Quadranten umschlossen wird. (berechne algebraisch)
Im 1. Quadranten sind die x- und die y-Achse positiv.

10. Berechne das k ($k > 0$) so, dass der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{k}x^3 + x^2$ im 1. Quadranten mit der x-Achse eingeschlossen wird, 18 *FE* beträgt.

11. Welche Parallele zur y-Achse halbiert die Fläche unter der Parabel $f(x) = x^2$ in den Grenzen 0 bis 2? (berechne algebraisch)

12. Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = -\frac{4}{k}x^3 + 4x^2, \quad k > 0,$ und $g(x) = 2x^2$.
    a) Berechne für f_k die x-Koordinaten der Punkte mit waagerechter Tangente.
    b) Für welches k hat die von den Graphen von f_k und g eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{1}{6}$?

13. Eine nach unten geöffnete, zur y-Achse symmetrische Parabel mit dem y-Achsenabschnitt 1 schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{16}{3}$ ein. Ermittle die Parabelgleichung.

7. Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Geraden $y = 4x + 1$ und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ umschlossen wird. (algebraisch oder GTR)

$A = \frac{32}{3}\,FE$

8. Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$, wird von einer Geraden mit positiver Steigung, die durch den Ursprung verläuft, geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die im 1. Quadranten umschlossene Fläche $\frac{9}{4}$ *FE* beträgt?

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)\,dx = \ldots = \frac{1}{4}m^2 = \frac{9}{4} \quad\Longrightarrow\quad m = 3$$

9. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ und $g(x) = x^2$ im 1. Quadranten umschlossen wird. (berechne algebraisch)
Im 1. Quadranten sind die x- und die y-Achse positiv.

$A = \frac{32}{3}\,FE$

10. Berechne das k $(k > 0)$ so, dass der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{k}x^3 + x^2$ im 1. Quadranten mit der x-Achse eingeschlossen wird, 18 *FE* beträgt.

$$\int_0^k f(x)\,dx = \ldots = \frac{k^3}{12} = 18 \quad\Longrightarrow\quad k = 6$$

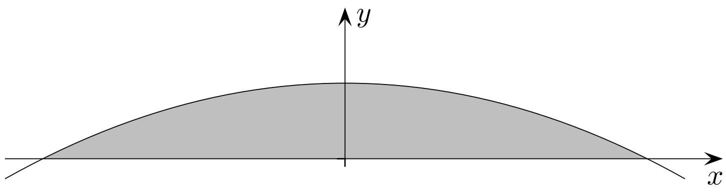
11. Welche Parallele zur <u>y-Achse</u> halbiert die Fläche unter der Parabel $f(x) = x^2$ in den Grenzen 0 bis 2? (berechne algebraisch)

$x = \sqrt[3]{4}$

12. Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = -\frac{4}{k}x^3 + 4x^2,\ \ k > 0,\quad$ und $g(x) = 2x^2$.
    a) Berechne für f_k die x-Koordinaten der Punkte mit waagerechter Tangente. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}k$
    b) Für welches k hat die von den Graphen von f_k und g eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{1}{6}$?

$$\int_0^{\frac{k}{2}} (\,f(x) - g(x)\,)\,dx = \ldots = \frac{k^3}{48} = \frac{1}{6} \quad\Longrightarrow\quad k = 2$$

13. Eine nach unten geöffnete, zur y-Achse symmetrische Parabel mit dem y-Achsenabschnitt 1 schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{16}{3}$ ein. Ermittle die Parabelgleichung.



Ansatz $f(x) = -ax^2 + 1$

Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\quad \int_0^{x_1} f(x)\,dx = \frac{8}{3} \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{1}{16}$

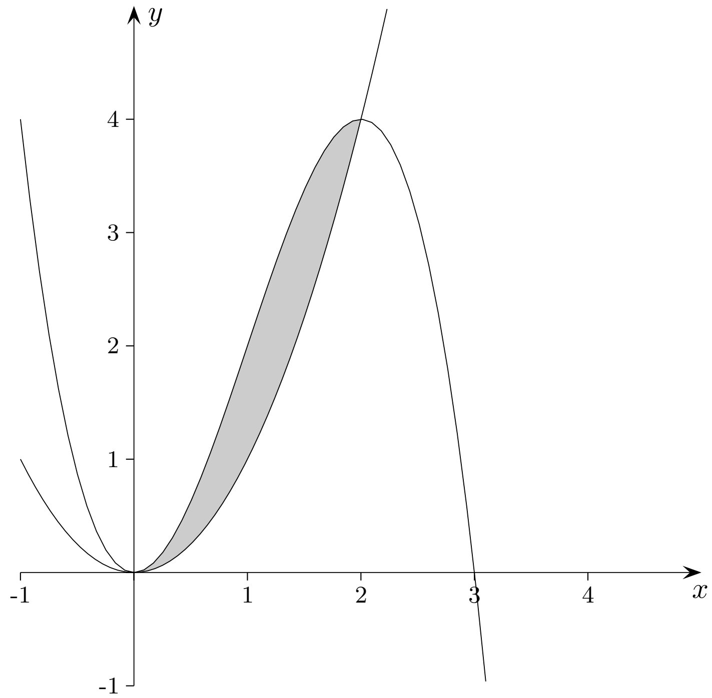
14. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 3x^2(1 - \frac{x}{k}), \quad k > 0$.

a) Bestimmen Sie für die Graphen von f_k die Schnittpunkte mit der x-Achse, sowie Extrema und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f_3.

(zur Kontrolle: $N_1(0\,|\,0)$, $N_2(k\,|\,0)$, $Min(0\,|\,0)$, $Max(\frac{2}{3}k\,|\,\frac{4}{9}k^2)$, $W(\frac{1}{3}k\,|\,\frac{2}{9}k^2)$*)*

b) Gegeben ist ferner die Funktion $g(x) = x^2$.
Berechnen Sie nun k so, dass das von den Graphen der Funktionen f_k und g eingeschlossene Flächenstück den Inhalt $\frac{4}{3}\,FE$ hat.

(zur Kontrolle: Schnittstellen $x_1 = 0$ *und* $x_2 = \frac{2}{3}k$, $\quad A = \frac{4}{81}k^3$, $\quad k = 3$ *)*



Wasserbecken

14. Ein quaderförmiges Becken mit $8\,m$ Länge, $5\,m$ Breite und $3\,m$ Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m.
Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft durch die Zulaufratenfunktion

$$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 9$$

beschrieben ($f(t)$ in m^3 pro Stunde, t in Stunden).

a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft, und berechnen Sie die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

b) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Zulaufratenfunktion f.

c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Becken?

d) Bestimmen Sie die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

e) Berechnen Sie die maximale Wassermenge im Becken.

f) Nach welcher Zeit würde des Becken überlaufen, falls die Zeitbeschränkung aufgehoben würde?

14. Ein quaderförmiges Becken mit $8\,m$ Länge, $5\,m$ Breite und $3\,m$ Höhe wird mit Wasser gefüllt. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe $0{,}1\,m$.
Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft durch die Zulaufratenfunktion

$$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 9$$

beschrieben ($f(t)$ in m^3 pro Stunde, t in Stunden).

a) Geben Sie die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft,

$t_1 = 0,\ t_2 = 5,\ t_3 = 8$

und berechnen Sie die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

$t_{\text{Max}} = 2,\ t_{\text{Min}} = \frac{20}{3}\ ,\ t_{\text{Rand}} = 9$

b) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Zulaufratenfunktion f.

c) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Becken? $4 + 83{,}25\ (m^3)$

d) Bestimmen Sie die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

$4 + 101{,}25\ (m^3), \quad h = 2{,}63\ (m)$

e) Berechnen Sie die maximale Wassermenge im Becken.

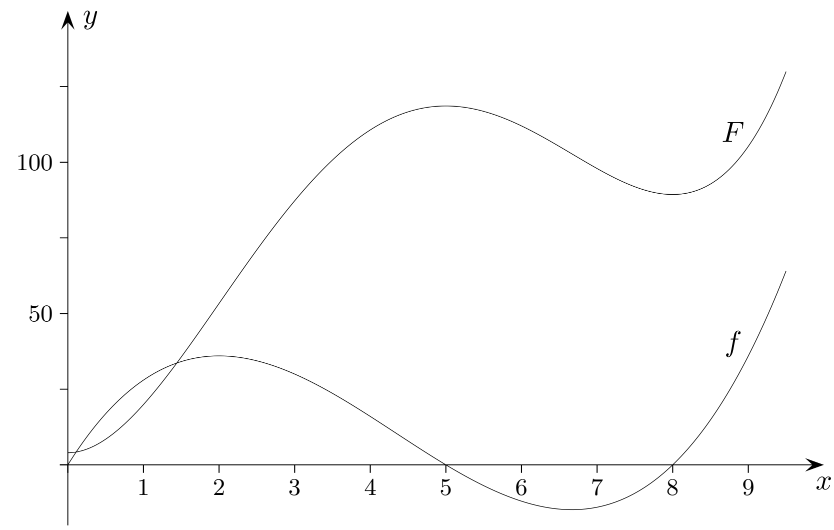
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dx + 4$$

$F(5) = 118{,}58\,(m^3)$

beachte: $F(9) = 105{,}25 < 118{,}58\,(m^3)$

f) Nach welcher Zeit würde das Becken überlaufen, falls die Zeitbeschränkung aufgehoben würde?

$F(x) = 8 \cdot 5 \cdot 3 \quad \Longrightarrow \quad x = 9{,}33\,(\text{h})$



Bergstollen-Aufgabe Baden-Württemberg 2013

15. Der Querschnitt eines 50 m langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8, \quad -4 \leq x \leq 4 \qquad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen?

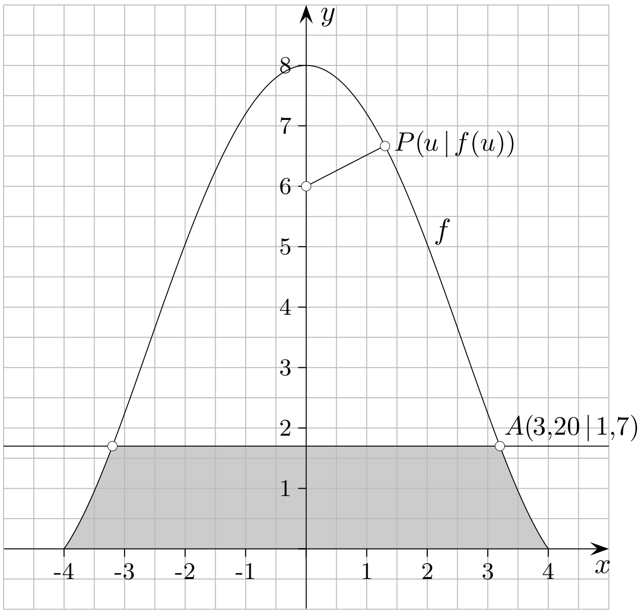
b) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

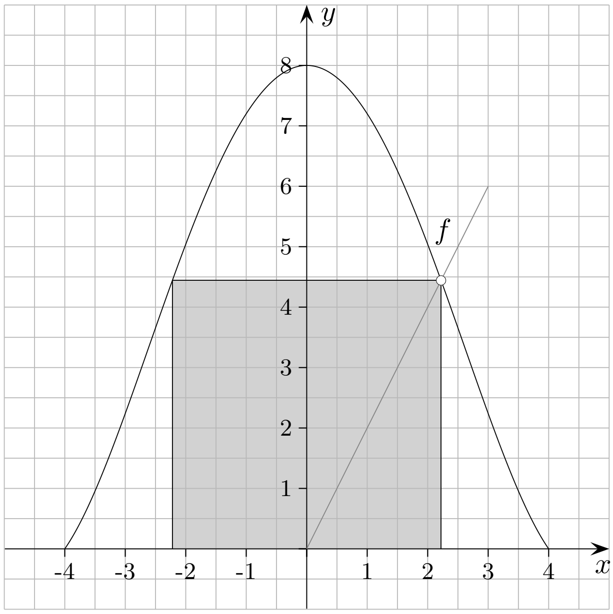
c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Wie breit darf der Behälter höchstens sein?

15. Der Querschnitt eines $50\,m$ langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8, \quad -4 \leq x \leq 4 \qquad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten? $x_{1/2} = \pm 2{,}614$
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein? $\alpha = 70{,}7°$
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen $1{,}7\,m$ hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen? $V_{\text{Wasser}} = G \cdot 50 = 605{,}71\,[m^3]$





b) Im Stollen soll in $6\,m$ Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens $1{,}4\,m$ von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

$$d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u) - 6)^2}$$

$$d_{\min}(1{,}303) = 1{,}463\,[m]$$

Mindestabstand wird eingehalten.

c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. Wie breit darf der Behälter höchstens sein?

$$2u = f(u)$$

$$2u = 4{,}442\,[m]$$

BMX-Rampe NRW 2013 geändert

16. Die Funktionenschar

$$f_a(x) = -\frac{1}{4a^2}x^3 + \frac{3}{4}x; \quad -8 \le x \le 0; \quad 3{,}2 \le a \le 4$$

beschreibt die Form einer BMX-Rampe.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionswerte im Bereich $-a\sqrt{3} < x < 0$ negativ sind.

b) Ermitteln Sie den tiefsten Punkt des Graphen.

c) Ermitteln Sie a, so dass die Steigung bei $x = -8$ genau -3 beträgt.

Für die restlichen Fragestellungen sei $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Berechnen Sie die Höhe des Startpunktes $S(-8\,|\,?)$.

d) Ermitteln Sie die durchschnittliche Steigung auf dem Intervall $[-8; 0]$.

e) Ermitteln Sie das Volumen der Erdmasse, die ausgehoben werden muss, wenn die Rampe in den Boden eingelassen wird und sie 2 Meter breit ist (die x-Achse kennzeichnet die Erdoberfläche).

f) Ein BMX-Fahrer fährt die Rampe herunter und springt knickfrei vom Absprungpunkt $A(0\,|\,0)$ ab. Die Sprunglinie ist dabei parabelförmig und er kommt im Punkt $P(4\,|\,0)$ wieder auf. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

BMX-Rampe NRW 2013 geändert

16. Die Funktionenschar

$$f_a(x) = -\frac{1}{4a^2}x^3 + \frac{3}{4}x; \quad -8 \le x \le 0\,; \quad 3{,}2 \le a \le 4$$

beschreibt die Form einer BMX-Rampe.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionswerte im Bereich $-a\sqrt{3} < x < 0$ negativ sind. $f_a(x) = 0 \quad \ldots$

b) Ermitteln Sie den tiefsten Punkt des Graphen. $T\big(-a \mid -\frac{a}{2}\big),\ f_a''(-a) = \frac{3}{2a} > 0$

c) Ermitteln Sie a, so dass die Steigung bei $x = -8$ genau -3 beträgt.

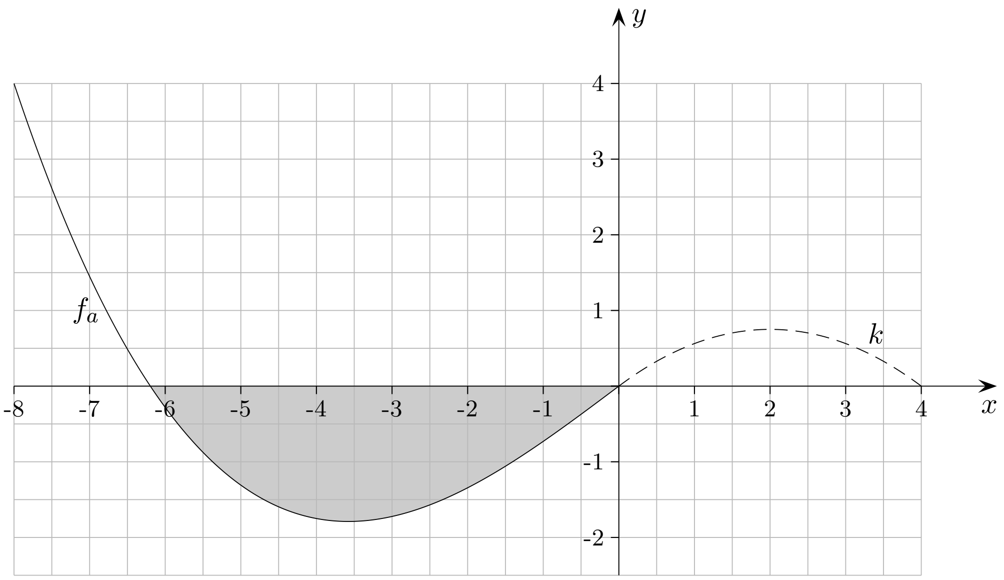
Für die restlichen Fragestellungen sei $a = \frac{8\sqrt{5}}{5} = 3{,}578$.

Berechnen Sie die Höhe des Startpunktes $S(-8 \mid ?)$. $S(-8 \mid 4)$

d) Ermitteln Sie die durchschnittliche Steigung auf dem Intervall $[-8; 0]$. $m = -\frac{1}{2}$

e) Ermitteln Sie das Volumen der Erdmasse, die ausgehoben werden muss, wenn die Rampe in den Boden eingelassen wird und sie 2 Meter breit ist (die x-Achse kennzeichnet die Erdoberfläche). $V = |-14{,}4|$

f) Ein BMX-Fahrer fährt die Rampe herunter und springt knickfrei vom Absprungpunkt $A(0 \mid 0)$ ab. Die Sprunglinie ist dabei parabelförmig und er kommt im Punkt $P(4 \mid 0)$ wieder auf. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel. $k(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x,\ f_a'(0) = \frac{3}{4}$

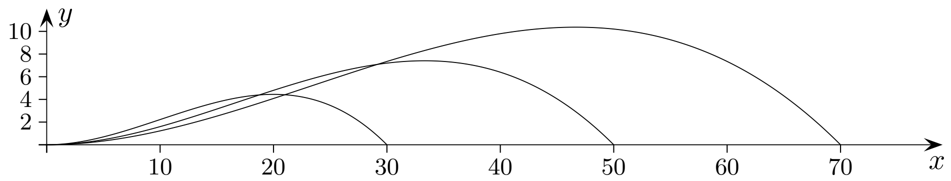


Deichquerschnitte

17. Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



a) Ordnen Sie die Graphen ihrem jeweiligen k zu.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Nullstellen und den Hochpunkt.

c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Hochpunkte.

d) Überprüfen Sie, ob die Steigung der Graphen in den Nullstellen von k abhängig ist.

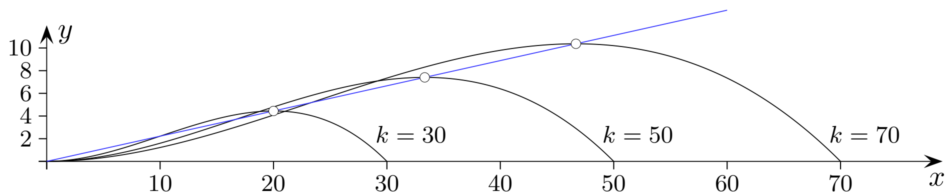
e) Wie viel m^3 Material, abhängig von k, wird für $1\,km$ Deich gebraucht?

Deichquerschnitte

17. Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



a) Ordnen Sie die Graphen ihrem jeweiligen k zu. — k stimmt mit der 2. Nullstelle überein.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Nullstellen und den Hochpunkt. — $x_{N1} = 0,\ x_{N2} = k$; $H\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{27}k\right)$

c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Hochpunkte. — $y = \frac{2}{9}x$

d) Überprüfen Sie, ob die Steigung der Graphen in den Nullstellen von k abhängig ist. — $f_k(0) = 0,\ f_k(k) = -1$

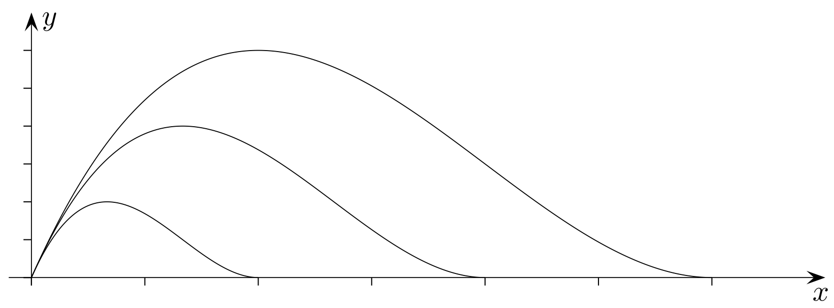
e) Wie viel m^3 Material, abhängig von k, wird für $1\,km$ Deich gebraucht? — $\frac{k^2}{12}1000\,m^3$

Wachstum von Wildblumen

18. Das Wachstum von Wildblumen wird durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{135}{k^2}x^3 - \frac{270}{k}x^2 + 135x, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad 0 \leq x \leq k$$

modelliert. $f_k(x)$ gibt dabei die Wachstumsgeschwindigkeit in cm pro Monat zum Zeitpunkt x an. Der Parameter k ist für jede Wildblumenart spezifisch.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{1, 2, 3\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist das Pflanzenwachstums maximal und wie groß ist es dann?

c) Wie groß wird eine Pflanze?

d) Wie lange ist eine Pflanze gewachsen, die am Ende 80,2 cm groß geworden ist?

e) Ermitteln Sie die Wendepunkte von $f_k(x)$.
Welche Bedeutung hat ein Wendepunkt für das Wachstum?

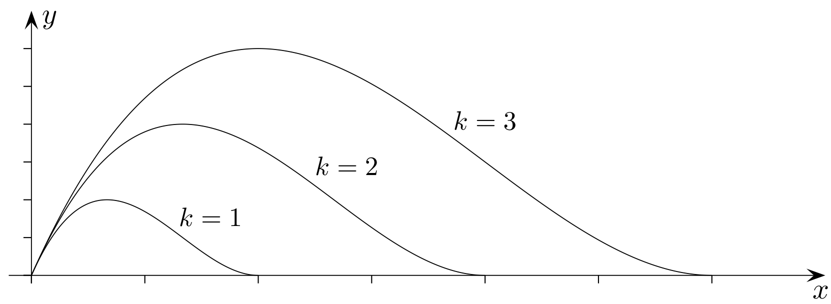
f) Wir wollen das Modell verbessern. Die Wachstumsgeschwindigkeit soll unabhängig von der Wachstumsdauer (Parameter k) durch einen Parameter beeinflusst werden. Wie konnte eine Funktionenschar nun aussehen?

Wachstum von Wildblumen

18. Das Wachstum von Wildblumen wird durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{135}{k^2}x^3 - \frac{270}{k}x^2 + 135x, \quad 1 \le k \le 3, \quad 0 \le x \le k$$

modelliert. $f_k(x)$ gibt dabei die Wachstumsgeschwindigkeit in cm pro Monat zum Zeitpunkt x an. Der Parameter k ist für jede Wildblumenart spezifisch.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{1, 2, 3\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist das Pflanzenwachstums maximal und wie groß ist es dann? $Max\left(\frac{k}{3} \mid 20a\right)$

c) Wie groß wird eine Pflanze? $\displaystyle\int_0^k f_k(x)\,dx = \frac{45k^2}{4}$

d) Wie lange ist eine Pflanze gewachsen, die am Ende 80,2 cm groß geworden ist? 2,7 Monate

e) Ermitteln Sie die Wendepunkte von $f_k(x)$. $W\left(\frac{2k}{3} \mid 10a\right)$
Welche Bedeutung hat ein Wendepunkt für das Wachstum?

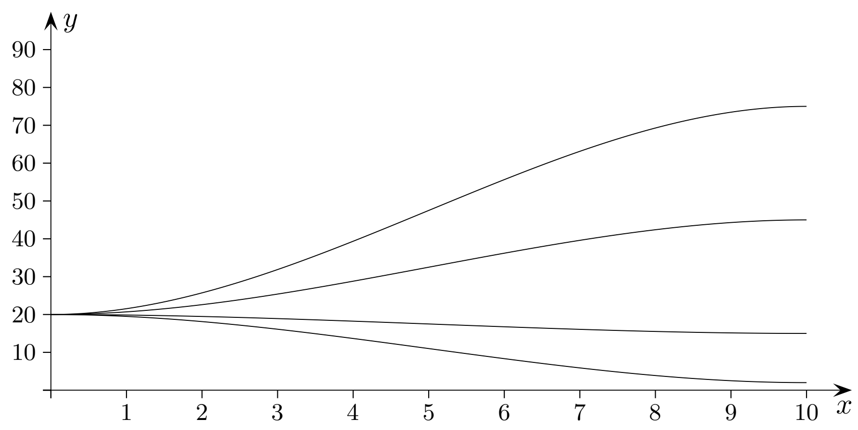
f) Wir wollen das Modell verbessern. Die Wachstumsgeschwindigkeit soll unabhängig von der Wachstumsdauer (Parameter k) durch einen Parameter beeinflusst werden.
Wie konnte eine Funktionenschar nun aussehen? z.B. $f_{k,a}(x) = a \cdot f_k(x)$

Zuschauerquote

19. Der Sender VTV beginnt eine neue Talkshow. Die Zuschauerquote der Pilotsendung und der folgenden 10 Sendungen in Prozent wird sich erfahrungsgemäß mit

$$f_k(x) = -\frac{k-20}{500}x^3 + \frac{3k-60}{100}x^2 + 20, \quad 0 \le k \le 100, \quad 0 \le x \le 10$$

entwickeln. Für das k liegen unterschiedliche Vermutungen vor.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{2, 15, 45, 75\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.

b) Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte der Funktionenschar.
Welche Bedeutung hat der Wendepunkt im Sachzusammenhang?

c) Bei der 5. Folgesendung (also $x = 5$) wird eine Zuschauerquote von 22 % ermittelt.
Der Sendung soll ein günstigerer Sendetermin zugewiesen werden, wenn es mehr als 25 % werden.
Besteht diese Möglichkeit?

d) Warum ist die Beschränkung auf $0 \le x \le 10$ sinnvoll?

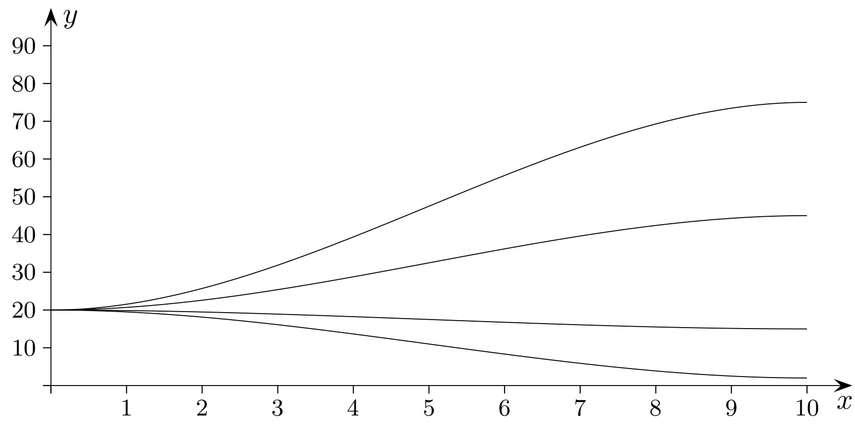
e) Zeigen Sie (auf einfache Weise unter Beachtung der Symmetrie zum Wendepunkt), dass die durchschnittliche Zuschauerquote $10 + \frac{k}{2}$ beträgt.

Zuschauerquote

19. Der Sender VTV beginnt eine neue Talkshow. Die Zuschauerquote der Pilotsendung und der folgenden 10 Sendungen in Prozent wird sich erfahrungsgemäß mit

$$f_k(x) = -\frac{k-20}{500}x^3 + \frac{3k-60}{100}x^2 + 20, \quad 0 \le k \le 100, \quad 0 \le x \le 10$$

entwickeln. Für das k liegen unterschiedliche Vermutungen vor.



a) Zu sehen sind die Graphen für $k \in \{2, 15, 45, 75\}$.
Ordnen Sie die Graphen dem jeweiligen k begründet zu und beschreiben Sie den Einfluss von k.
$f_k(10) = k$

b) Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte der Funktionenschar.
$E_1(0 \mid 20)$, $E_2\big(10 \mid k\big)$, $W\big(5 \mid \frac{k+20}{2}\big)$

Welche Bedeutung hat der Wendepunkt im Sachzusammenhang?
Hier ist der Zuschauerschwund (-zuwachs) am stärksten.

c) Bei der 5. Folgesendung (also $x = 5$) wird eine Zuschauerquote von 22 % ermittelt.
Der Sendung soll ein günstigerer Sendetermin zugewiesen werden, wenn es mehr als 25 % werden.
Besteht diese Möglichkeit? $k = 24$, $f_{24}(10) = 24$ Die Möglichkeit besteht nicht.

d) Warum ist die Beschränkung auf $0 \le x \le 10$ sinnvoll?
An der Stelle $x = 10$ wechselt der Graph von steigend auf fallend bzw. umgekehrt.

e) Zeigen Sie (auf einfache Weise unter Beachtung der Symmetrie zum Wendepunkt), dass die durchschnittliche Zuschauerquote $10 + \frac{k}{2}$ beträgt.

Wasserbecken

20. Ein quaderförmiges Wasserbecken mit $3\,m$ Länge, $2\,m$ Breite und $2\,m$ Höhe hat einen Wasser Zu- und Ablauf. Die Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}11x^2 + 5x, \quad 0 \leq x \leq 8\,,$$

beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken,
x in Stunden und $f(x)$ in Kubikmeter pro Stunde. Zu Beginn ist das Becken leer.

a) Ermitteln Sie die Höhe des Wasserstandes im Becken nach 3 Stunden.

b) In der Abbildung ist der Graph von f dargestellt. Begründen Sie mithilfe dieser Grafik, dass sich, abgesehen vom Beginn $x = 0$, immer Wasser im Becken befindet.

c) Ermitteln Sie für die Gesamtzeitdauer von 8 Stunden den zeitlichen Anteil in Prozent, für den die Wassermenge im Becken abnimmt.

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Becken zum zweiten Mal genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist.

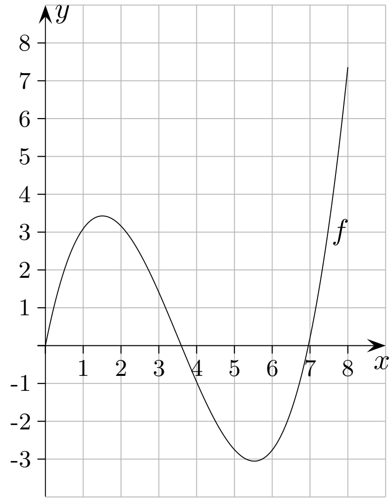
e) Es gibt bestimmte Wasserstandshöhen im Becken, die innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden genau dreimal angenommen werden.
Welche Wasserstandshöhen sind das?

f) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar

$$f_k(x) = 0{,}2x^3 - kx^2 + 5x,\ k > 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{betrachtet.}$$

Die Tangenten an die Graphen von f_k in den Punkten $Q_k(5 \mid f_k(5))$ werden mit t_k bezeichnet. Überprüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist:
Für alle $k > 0$ ist die Gerade durch $R(2{,}5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ gleichzeitig auch Tangente im Punkt $Q_k(5 \mid f_k(5))$.

Wasserbecken Ergebnisse



20. Ein quaderförmiges Wasserbecken mit $3\,m$ Länge, $2\,m$ Breite und $2\,m$ Höhe hat einen Wasser Zu- und Ablauf. Die Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}11x^2 + 5x, \quad 0 \leq x \leq 8\,,$$

beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken, x in Stunden und $f(x)$ in Kubikmeter pro Stunde. Zu Beginn ist das Becken leer.

a) Ermitteln Sie die Höhe des Wasserstandes im Becken nach 3 Stunden. $\frac{1}{6}\int_0^3 f(x)\,dx = 1{,}26$

b) In der Abbildung ist der Graph von f dargestellt. Begründen Sie mithilfe dieser Grafik, dass sich, abgesehen vom Beginn $x = 0$, immer Wasser im Becken befindet.

Tipp: Inhalte der Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse abschätzen

c) Ermitteln Sie für die Gesamtzeitdauer von 8 Stunden den zeitlichen Anteil in Prozent, für den die Wassermenge im Becken abnimmt. $(6{,}956 - 3{,}594)/8 = 42{,}0\,\%$

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Becken zum zweiten Mal genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. $x = 4{,}94$

e) Es gibt bestimmte Wasserstandshöhen im Becken, die innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden genau dreimal angenommen werden.

Welche Wasserstandshöhen sind das? $h(x) = \frac{1}{6}\int_0^x f(t)\,dt$

$h(x_{\min}) = 0{,}217 < x \leq 0{,}782 = h(8)$

f) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar

$$f_k(x) = 0{,}2x^3 - kx^2 + 5x,\ k > 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{betrachtet.}$$

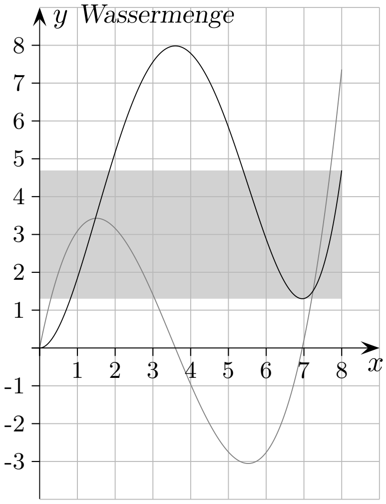
Die Tangenten an die Graphen von f_k in den Punkten $Q_k(5 \mid f_k(5))$ werden mit t_k bezeichnet. Überprüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist:
Für alle $k > 0$ ist die Gerade durch $R(2{,}5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ gleichzeitig auch Tangente im Punkt $Q_k(5 \mid f_k(5))$.

$$m = \frac{f_k(5) - 0}{5 - 2{,}5} = \frac{50 - 25k}{2{,}5} = 20 - 10k$$

$$f'(5) = 20 - 10k$$

Jede Gerade durch die vorgegebenen Punkte ist somit auch Tangente im Punkt $Q_k(5 \mid f_k(5))$.

zu e)



21. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x), \quad 0 \le x \le 4.$
Für jedes $u > 0$ sind $O(0\,|\,0)$, $P(u\,|\,0)$, $Q(u\,|\,f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.

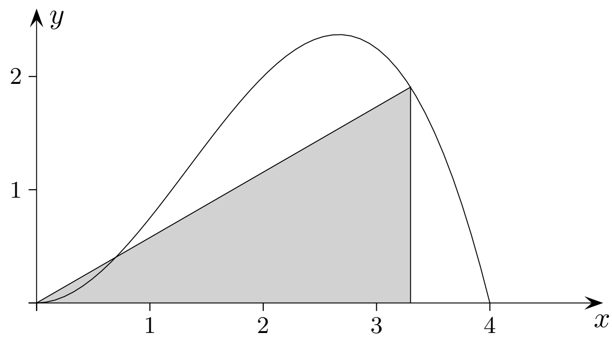
Bestimmen Sie u so, dass dieses Dreieck

a) maximalen Flächeninhalt hat,

b) den Flächeninhalt 3 besitzt,

c) gleichschenklig ist.

Auf welchen Intervallen der Länge 1 hat f den mittleren Funktionswert 2?
Bestimmen Sie die Grenzen dieser Intervalle.



21. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x), \quad 0 \leq x \leq 4.$
Für jedes $u > 0$ sind $O(0\,|\,0)$, $P(u\,|\,0)$, $Q(u\,|\,f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.

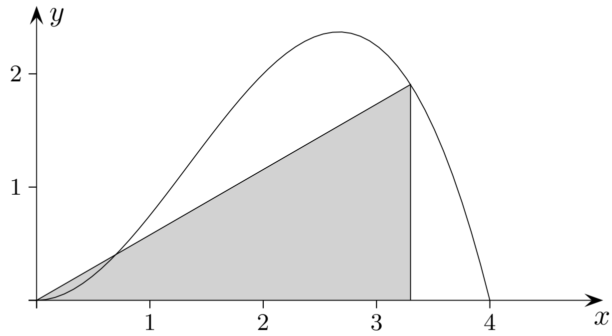
Bestimmen Sie u so, dass dieses Dreieck

a) maximalen Flächeninhalt hat, $u = 3$

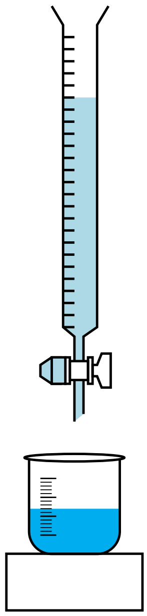
b) den Flächeninhalt 3 besitzt, $u_1 = 2{,}55;\ u_2 = 3{,}38$

c) gleichschenklig ist. $u = 2$

Auf welchen Intervallen der Länge 1 hat f den mittleren Funktionswert 2?
Bestimmen Sie die Grenzen dieser Intervalle. $[1{,}55; 2{,}55]$, $[2{,}65; 3{,}65]$

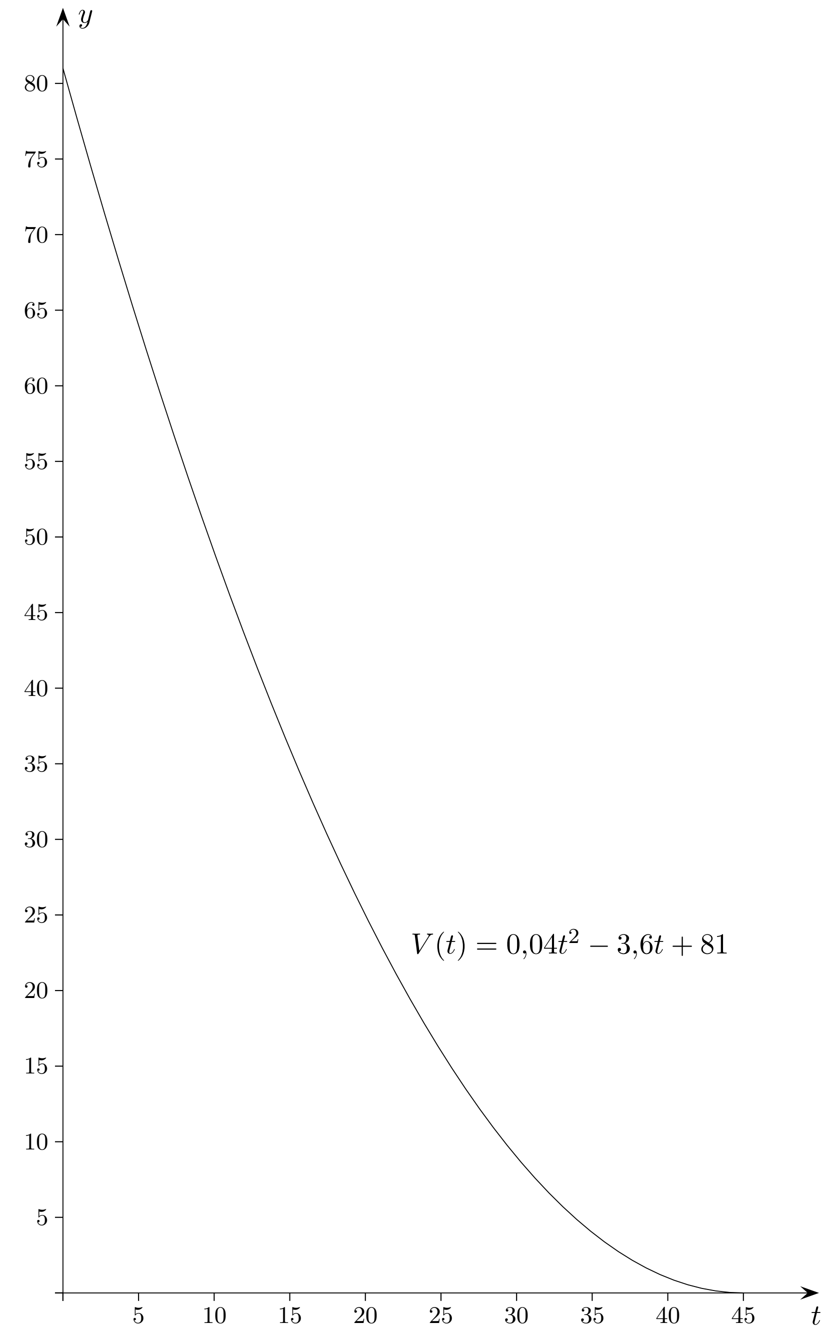


Ausflussgeschwindigkeit



Es wird die Ausflussgeschwindigkeit von Wasser aus einer Bürette
in Abhängigkeit von der Zeit gemessen und dabei folgender Zusammenhang
ermittelt: $v(t) = 0{,}08t - 3{,}6$, Zeit in s, Ausflussgeschwindigkeit in $\frac{cm}{s}$.
Die anfängliche Höhe der Wassersäule beträgt $81\,cm$.
Nach welcher Zeit ist die Bürette leer?

Ausflussgeschwindigkeit



$V'(t) = v(t),\ V(0) = 81$
Nullstelle $t_N = 45\ [s]$
Alternativ ist die Gleichung $\displaystyle\int_0^{t_N} v(t)\,dt = -81$ zu lösen.

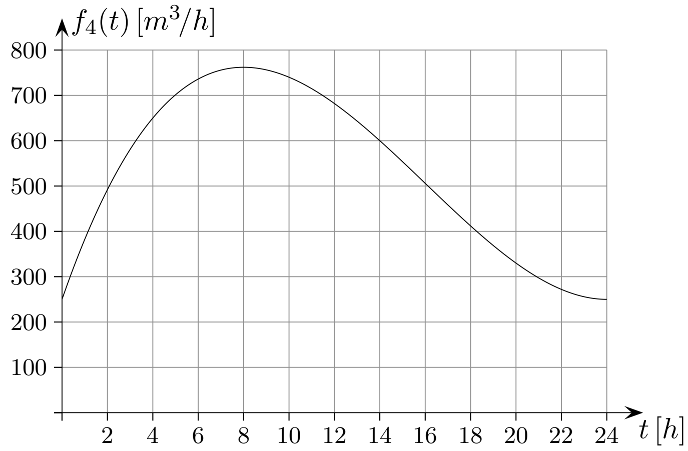
Beachte: Da $V(t)$ auf dem Intervall $[0, 45]$ monoton fallend ist, ist $v(t) < 0$.

Staubecken

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließt ein Bach. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke kann die (momentane) Zuflussrate aus dem Bach jeweils durch eine der Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3at^2 + 9a^2t + 250, \quad t \in \mathbb{R},$$

für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden, wobei a eine positive reelle Zahl ist und t als Maßzahl zur Einheit $1\,h$, $f_a(t)$ als Maßzahl zur Einheit $1\ m^3/h$ aufgefasst wird.
Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$.
Der Graph von f_4 ist in der Abbildung dargestellt.



a) Berechnen Sie die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt.

b) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen der Funktion f_a.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert.
Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang an.

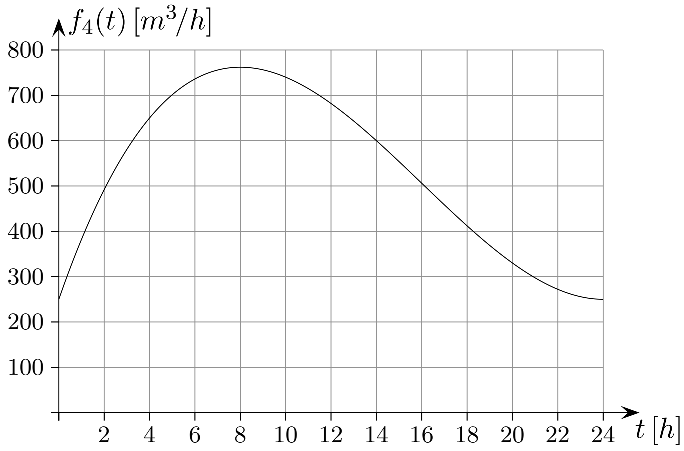
c) Im Folgenden sei $a = 4$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch $4500\,m^3$ Wasser aufnehmen.

Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.

Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 6$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von $600\ m^3/h$ aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Zuflussrate für $6 \leq t < 14$ größer und für $14 < t \leq 24$ kleiner als $600\ m^3/h$ ist.

Interpretieren Sie den Ausdruck $\displaystyle\int_0^6 f_4(t)\,dt + \int_6^{14} \big(f_4(t) - 600\big)\,dt$ im Sachzusammenhang.
Entscheiden Sie nun, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.
Bestimmen Sie den spätest möglichen Zeitpunkt $t_s \in [0; 24]$, zu dem der Notablauf geöffnet werden müsste, damit das Staubecken nicht überläuft.

Staubecken



a) $f_a(0) = 250\ [m^3/h],\ \ f_a(6a) = 250\ [m^3/h]$
$f_a'(t_m) = 0,\ t_{m_1} = 2a,\ t_{m_2} = 6a$
$f_a(2a) = 8a^2 + 250$, Vergleich mit den Randwerten:
Zum Zeitpunkt t_{m_1} nimmt die Zuflussrate ihr Maximum an.

b) Funktion 3. Grades, die Wendestelle liegt mittig zwischen den Extremstellen, $t_W = 4a$
alternativ: $f_a''(t_W) = 0,\ t_{t_W} = 4a,\ f_a'''(t_W) = \frac{3}{2} \neq 0$
Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt t_W oder an den Randstellen des Intervalls $[0; 6a]$.
Der Vergleich der Werte $f_a'(0) = 9a^2$, $f_a'(t_W) = -3a^2$ und $f_a'(6a) = 0$ ergibt:
Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.
An der Stelle $t_W = 4a$ ist die Abnahme pro Zeiteinheit (Änderungsrate) der Zuflussrate am stärksten.

c) $\int_0^{24} f_4(t)\,dt = 12912$ Das Staubecken könnte die $12912\,m^3$ Wasser nicht aufnehmen.
$\int_0^{b} f_4(t)\,dt = 4500, \quad b \approx 7{,}59$ Nach ungefähr 7,59 Stunden wäre das Staubecken voll.

$$\int_0^{6} f_4(t)\,dt + \int_6^{14} \big(f_4(t) - 600\big)\,dt$$

Der Ausdruck gibt an, um wie viel m^3 das Wasser im Staubecken
während der ersten 14 Stunden des Beobachtungszeitraums zunimmt.

Wegen $f_4(14) = 600$ sind zum Zeitpunkt Zulauf- und Ablaufrate gleich groß, siehe Aufgabenstellung. Zum Zeitpunkt $t = 14$ ist am meisten Wasser im Staubecken.

$$\int_0^{6} f_4(t)\,dt + \int_6^{14} \big(f_4(t) - 600\big)\,dt = 4237$$

$4500\,m^3$ werden nicht erreicht, so dass das Staubecken nicht überläuft.

Für den gesuchten Zeitpunkt t_s gilt

$$\int_0^{t_s} f_4(t)\,dt + \int_{t_s}^{14} \big(f_4(t) - 600\big)\,dt = 4500, \qquad t_s \approx 6{,}44$$

Spätestens nach ca. 6,44 Stunden müsste der Notablauf geöffnet werden,
damit das Staubecken nicht überläuft.

Gastank

Für einen geplanten Produktionszweig, dem kontinuierlich Gas zuzuführen ist, benötigt man zu Beginn eines Arbeitstages ($t = 0$) 1100 L/h (Liter pro Stunde) und nach 2 und 12 Stunden (Ende eines Arbeitstages) jeweils maximal 3100 L/h und 1100 L/h.
Der Gasverbrauch pro Stunde wird mit einer ganzrationalen Funktion modelliert.

a) Zeigen Sie, dass diese Modellierung möglich ist.

Das Gas fließt aus einem Tank, der anfänglich 6000 L enthält.
Das sind 4/5 des Tankinhalts.

b) Gleichzeitig mit dem Verbrauch des Gases wird der Tank mit einem konstanten Zufluss von 1300 L/h befüllt. Ermitteln Sie den Tankinhalt nach 12 Stunden.
Bestimmen Sie die Zeiträume, in denen das Gasvolumen im Tank zu- bzw. abnimmt.

c) Für welchen konstanten Zufluss wäre der Tank nach 12 Stunden vollständig gefüllt?

Gastank

Für einen geplanten Produktionszweig, dem kontinuierlich Gas zuzuführen ist, benötigt man zu Beginn eines Arbeitstages ($t = 0$) 1100 L/h (Liter pro Stunde) und nach 2 und 12 Stunden (Ende eines Arbeitstages) jeweils maximal 3100 L/h und 1100 L/h.
Der Gasverbrauch pro Stunde wird mit einer ganzrationalen Funktion modelliert.

a) Zeigen Sie, dass diese Modellierung möglich ist.

$$f(0) = 1100,\ f(2) = 3100,\ f'(2) = 0,\ f(12) = 1100,\ f'(12) = 0$$
$$f(t) = -3t^4 + 88t^3 - 816t^2 + 2304t + 1100,\ f(t) \geq 0$$

Das Gas fließt aus einem Tank, der anfänglich 6000 L enthält.
Das sind 4/5 des Tankinhalts.

b) Gleichzeitig mit dem Verbrauch des Gases wird der Tank mit einem konstanten Zufluss von 1300 L/h befüllt. Ermitteln Sie den Tankinhalt nach 12 Stunden.

$$g(t) = 6000 - \int_0^t f(u)\,du + 1300t, \quad g(12) = 5635{,}20$$

Bestimmen Sie die Zeiträume, in denen das Gasvolumen im Tank zu- bzw. abnimmt. $f(t) = 1300$

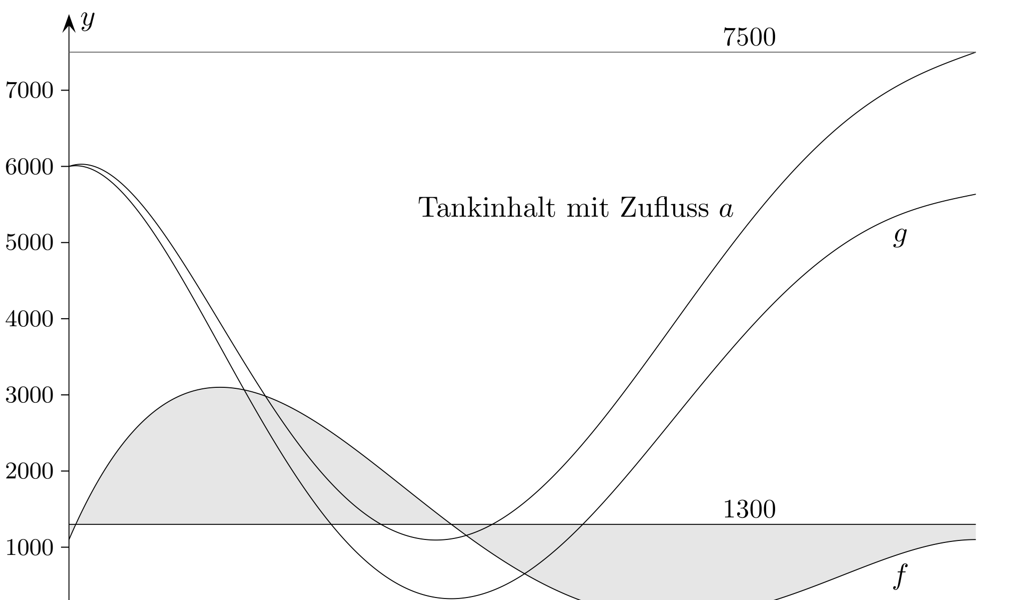
$f(0) = 1100 < 1300$, daher Zunahme $0 \leq t \leq 0{,}10$

Abnahme $0{,}10 \leq t \leq 5{,}06$

Zunahme $5{,}06 \leq t \leq 12$

c) Für welchen konstanten Zufluss wäre der Tank nach 12 Stunden vollständig gefüllt?

$$6000 - \int_0^{12} f(u)\,du + a \cdot 12 = 7500, \quad a = 1455{,}40$$



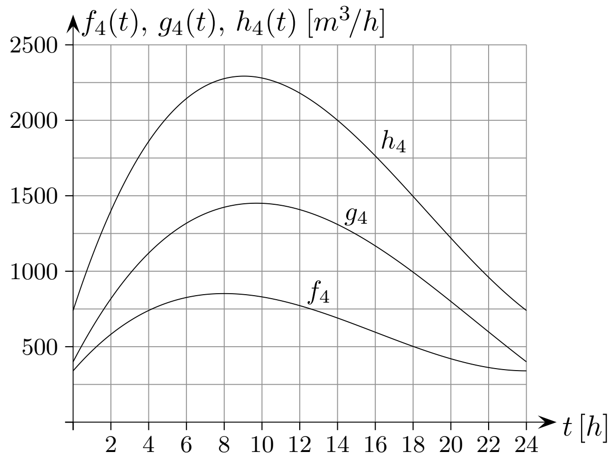
Staubecken

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließen zwei Bäche. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke können die momentanen[1] Zuflussraten aus den beiden Bächen durch Funktionen f_a für den Bach 1 und g_a für den Bach 2 und die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen durch eine Funktion h_a für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Gegeben sind für $a > 0$ zunächst die Funktionsgleichungen

$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3at^2 + 9a^2t + 340,\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{und}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2}t^3 - 7at^2 + 24a^2t + 740,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit $1\,h$ und $f_a(t)$, $g_a(t)$ sowie $h_a(t)$ als Maßzahlen zur Einheit $1\,m^3/h$ auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$. Die Graphen von f_4, g_4 und h_4 sind in der Abbildung dargestellt.



a) (1) Berechnen Sie die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.

(2) Zeigen Sie, dass für die Funktion g_a, die die Zuflussrate aus Bach 2 beschreibt, gilt:

$$g_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4at^2 + 15a^2t + 400.$$

(3) Begründen Sie, dass unabhängig vom Parameter a ($a > 0$) die Zuflussrate aus Bach 2 für alle $t \in [0; 6a]$ größer ist als die Zuflussrate aus Bach 1.

(4) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate ihr Maximum annimmt.

(5) In der Vergangenheit betrug die Gesamtzuflussrate im Beobachtungszeitraum $[0; 6a]$ maximal $3800\,m^3/h$.
Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Wert des Parameters a.

b) (1) Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion h_a.

(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Gesamtzulaufrate am stärksten ändert.

(3) Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.

c) Im Folgenden sei $a = 4$: $h_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t + 740,\ t \in [0; 24]$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch $20000\,m^3$ Wasser aufnehmen.

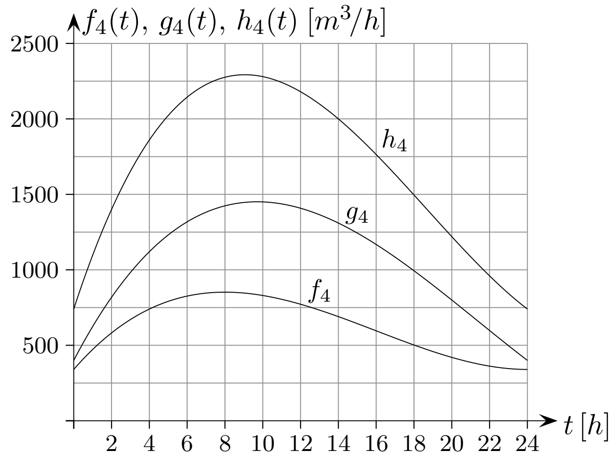
[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff Zuflussrate verwendet; darunter ist stets die momentane Zuflussrate zu verstehen.

(1) Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus den beiden Bächen während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.

(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.

(3) Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 10$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von $2000\,m^3/h$ aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Gesamtzuflussrate für $10 \leq t < 14$ größer und für $14 < t \leq 24$ kleiner als $2000\,m^3/h$ ist (vgl. die Abbildung).
Untersuchen Sie, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.

Staubecken



a) $a > 0$ wird stets vorausgesetzt.

(1) $h_a(0) = 740\ [m^3/h],\ \ h_a(6a) = 740\ [m^3/h]$

(2) $g_a(t) = h_a(t) - f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4at^2 + 15a^2t + 400$

(3) $d_a(t) = g_a(t) - f_a(t) = -at^2 + 6a^2t + 60$

Der Graph von d_a ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen

$t_1 = 3a - \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} < 3a - \sqrt{9a^2} = 0$ und $t_2 = 3a + \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} > 3a + \sqrt{9a^2} = 6a.$

Für $t \in [0; 6a]$ gilt somit $d_a(t) > 0$ bzw. $g_a(t) > f_a(t)$.

$h'_a(t) = 0$ hat im Intervall $[0; 6a]$ die einzige Lösung $t_m = \frac{14}{3}a - \frac{\sqrt{52}}{3}a \approx 2{,}26a$

Wegen $h''_a(t) = 3t_m - 14a \approx 6{,}8a - 14a < 0$ ist t_m lokale Maximalstelle und als einzige lokale Extremstelle von h_a auch globale Maximalstelle im Intervall $[0; 6a]$.

(4) $h_a(t_m) = 3800$ hat die Lösung $a \approx 5{,}0$.
Der zum Maximum der Zuflussrate von $3800\,m^3/h$ gehörige Parameterwert ist $a \approx 5{,}0$.

b) (1) Aus $h''_a(t_W) = 0 \iff t_W = \frac{14}{3}a$ und $h'''_a(t_W) = 3$ folgt, dass t_W die einzige Wendestelle der Funktion h_a ist.

(2) Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt t_W $[0 < t_W < 6a]$ oder an den Randstellen des Intervalls $[0; 6a]$.
Der Vergleich der Werte $h'_a(0) = 24a^2$, $h'_a(t_W) = -\frac{26}{3}a^2$ und $h'_a(6a) = -6a^2$ ergibt:
Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

(3) Die Wendestelle $t_W = \frac{14}{3}a$ der Funktion h_a bezeichnet den Zeitpunkt des Intervalls $[0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate am stärksten abnimmt.

c) (1) $\int_0^{24} h_4(t)\,dt = 40800$

Das Staubecken könnte die $40800\,m^3$ Wasser nicht aufnehmen.

(2) Die Gleichung $\int_0^{b} h_4(t)\,dt = 20000$ hat die einzige positive Lösung $b \approx 10{,}65$.
Nach ungefähr 10,65 Stunden wäre das Staubecken voll.

(3) Für $0 \le t < 10$ ist der Notablauf verschlossen, so dass die Ablaufrate $0\,m^3/h$ beträgt.
Unter Berücksichtigung der Angaben aus der Aufgabenstellung ist somit die Gesamtzuflussrate nur für $0 \le t < 14$ größer als die Ablaufrate. Folglich ist zum Zeitpunkt $t = 14$ am meisten Wasser im Staubecken:

$$\int_0^{10} h_4(t)\,dt + \int_{10}^{14} (h_4(t) - 2000)\,dt = 19183\tfrac{1}{3}.$$

Die vorgegebenen $20000\,m^3$ werden nicht erreicht, so dass das Staubecken nicht überläuft.