Aufgaben Analysis

Flächenberechnung

Ganzrationale Funktion

Tangenten

ohne Einsatz des GTR

Integralfunktion

Graphen zuordnen und Funktionsterme ermitteln

Wahr oder falsch?

Integralfunktion

Wahr oder falsch?

Aufgaben Analysis

Tangentendreieck

Tangenten

Tangenten Hinweise

Seilbahn

Torricelli-Trompete

Ohne GTR

Aufgaben ohne GTR

Hunde-Aufgabe

Funktionenschar

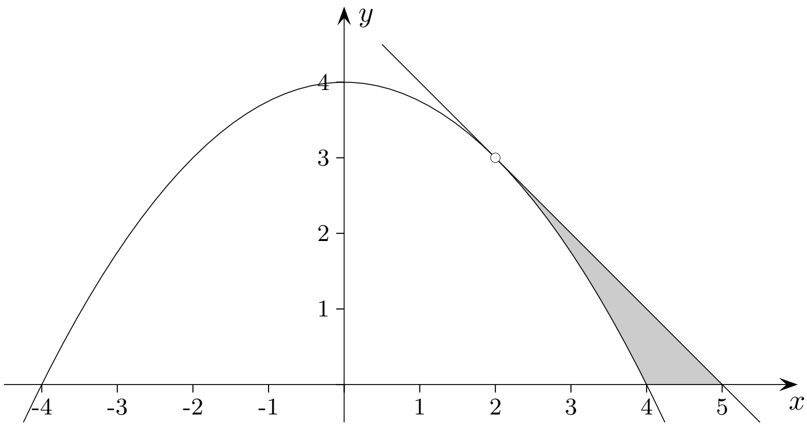
Ohne GTR

Integralfunktion

Klausur, 3stündig

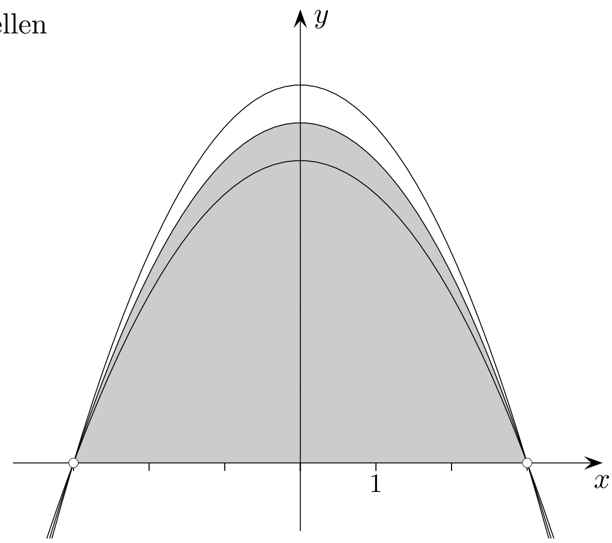
Weitere Aufgaben

Aufgaben Analysis



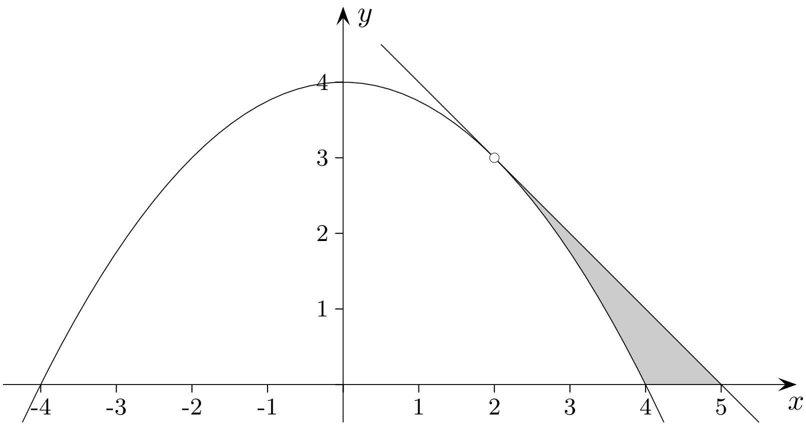
1. a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?
   b) An der Stelle $x = 2$ ist die Tangente gezeichnet.
   Ermittle den Inhalt der gefärbten Fläche.

2. Für welche Parabel mit den Nullstellen $x_{1/2} = \pm 3$ gilt $A = 18\,FE$?



3. Welche nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A = 18\ FE$ ein?

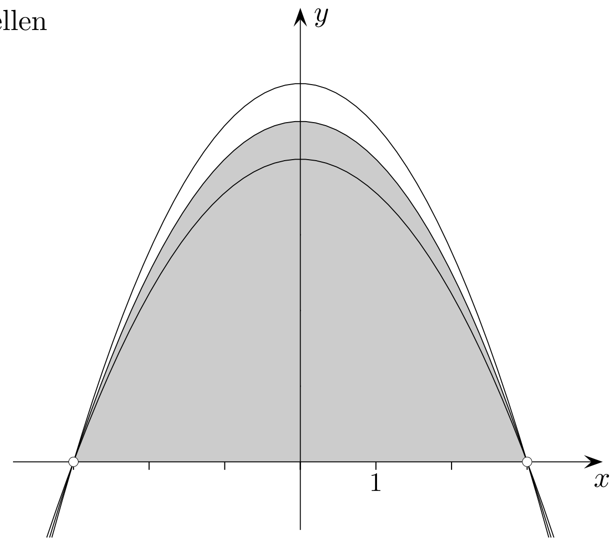
Flächenberechnung



1. a) Wie lautet die Gleichung der Parabel? $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

   b) An der Stelle $x = 2$ ist die Tangente gezeichnet.
   Ermittle den Inhalt der gefärbten Fläche. $A = \frac{7}{6}$

2. Für welche Parabel mit den Nullstellen
   $x_{1/2} = \pm 3$ gilt: $A = 18\,FE$ $a = -\frac{1}{2}$



3. Welche nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$
   schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A = 18\ FE$ ein? $f(x) = -ax(x-3)$

$$A = \frac{9a}{2}$$

$$a = 4,\ f(x) = -4x(x-3)$$

Ganzrationale Funktion

Welche ganzrationale Funktion 2. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 2$, hat an der Stelle $x = 1$ ein Extremum und schließt (genauer ihr Graph) mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{8}{3}\,FE$ ein?

Ganzrationale Funktion

Welche ganzrationale Funktion 2. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 2$, hat an der Stelle $x = 1$ ein Extremum und schließt (genauer ihr Graph) mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{8}{3}\,FE$ ein?

Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen:

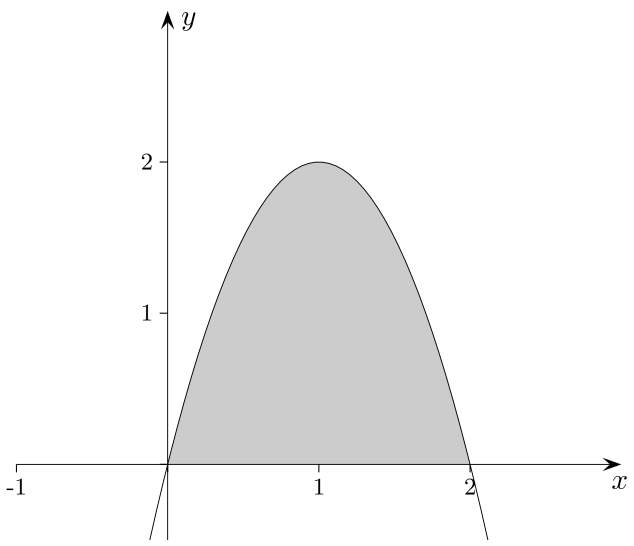
$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(2) & = & 0 \\ 2. & f'(1) & = & 0 \\ 3. & \int_0^2 f(x)\ dx & = & \frac{8}{3} \end{array}$$

Die Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = 1$, daher ist $c = 0$, beachte $f(2) = 0$.

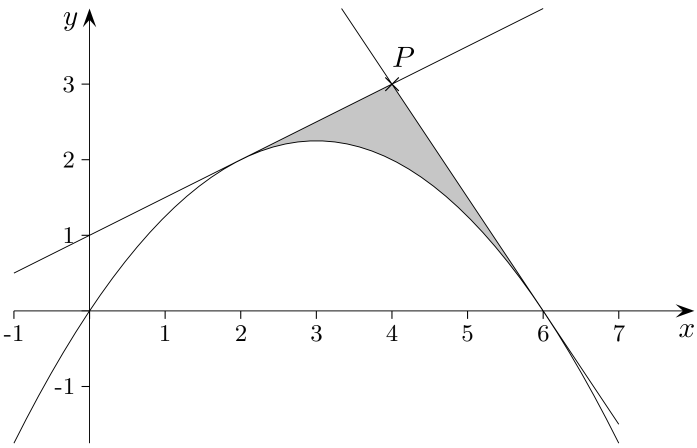
$$\begin{array}{lrcl} 1. & 4a + 2b & = & 0 \\ 2. & 2a + b & = & 0 \\ 3. & \frac{8}{3}a + 2b & = & \frac{8}{3} \end{array}$$

Die 2. Gleichung ist zur ersten äquivalent und kann entfallen.

Die Funktion lautet: $f(x) = -2x^2 + 4x$



Tangenten



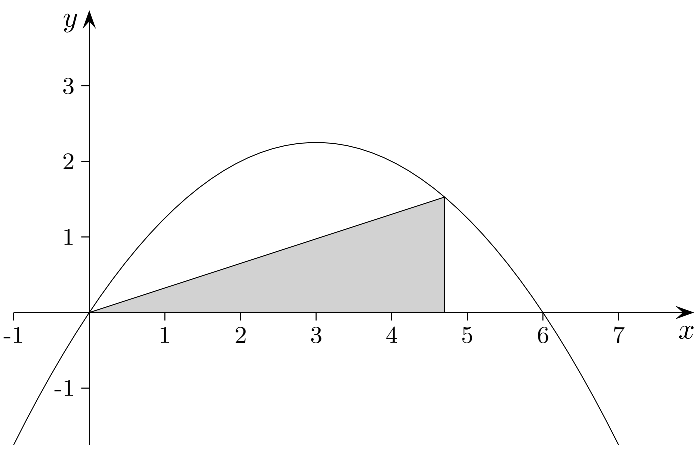
Gegeben ist die Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}x(x-6)$.

a) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die durch den Punkt $P(4 \mid 3)$ verlaufen?

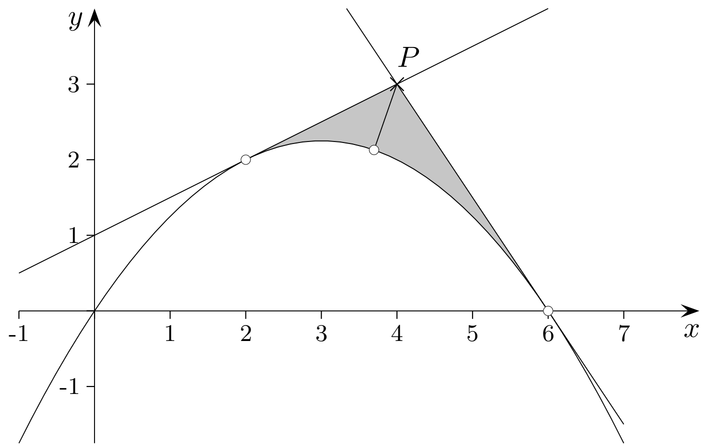
b) Welcher Punkt auf der Parabel liegt P am nächsten?

c) Welches rechtwinklige Dreieck (siehe Zeichnung) hat maximalen Flächeninhalt?

d) Wie groß ist der von den Tangenten und dem Graphen von f eingeschlossene Flächeninhalt?



Tangenten



Gegeben ist die Parabel $f(x) = -\frac{1}{4}x(x-6)$.

a) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die durch den Punkt $P(4\,|\,3)$ verlaufen?

Gleichung der Tangente an der Stelle x_0: $\quad t(x) = (-\frac{x_0}{2} + \frac{3}{2})(x - x_0) - \frac{1}{4}x_0(x_0 - 6)$

$$t(4) = 3 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2, \;\; x_2 = 6$$

$$t_1(x) = \frac{1}{2}x + 1, \;\; t_2(x) = -\frac{3}{2}x + 9$$

b) Welcher Punkt auf der Parabel liegt P am nächsten?

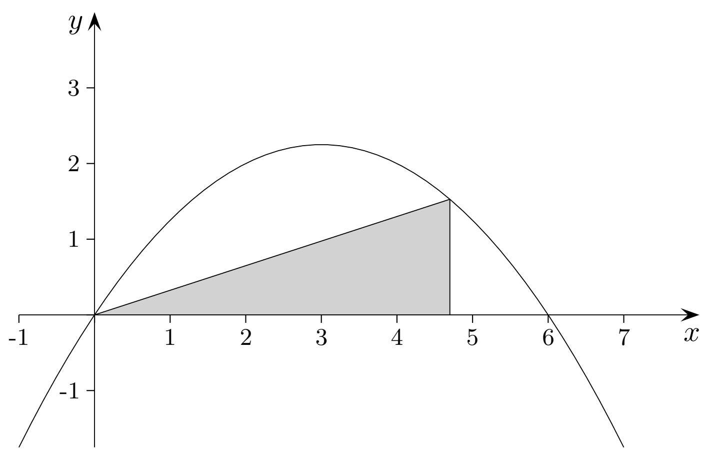
Die Distanzfunktion $\;d(x) = \sqrt{(4-x)^2 + (3-f(x))^2}$
nimmt das Minimum an der Stelle $x = 3{,}70$ (GTR) an.

c) Welches rechtwinklige Dreieck (siehe Zeichnung) hat maximalen Flächeninhalt?

Maximum von $A(x) = \frac{1}{2}xf(x)$ an der Stelle $x = 4$

d) Wie groß ist der von den Tangenten und dem Graphen von f eingeschlossene Flächeninhalt?

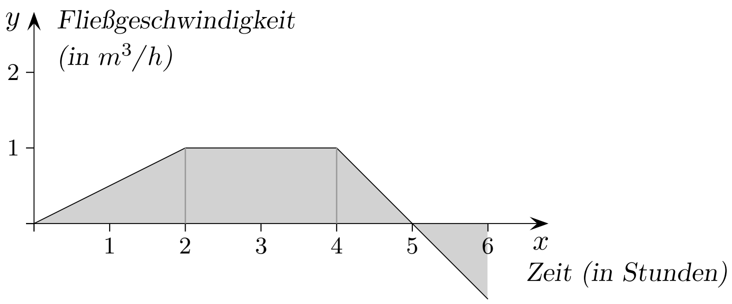
$\frac{4}{3}$ *FE*



ohne Einsatz des GTR

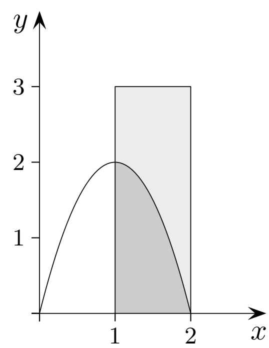
1. Berechnen Sie folgende Integrale.

   a) $\int\limits_{-2}^{2} x \cdot (x^2 - 3)\, dx$ b) $\int\limits_{-k}^{2k} (3x^2 - 2kx)\, dx$ c) $\int\limits_{0}^{9} \sqrt{x}\, dx$



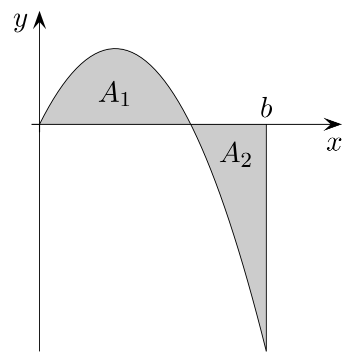
2. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines quaderförmigen Beckens mit der Grundfläche $3\,m^2$ geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
   Zur Zeit $x = 0$ sind $4\,m^3$ im Becken.
   Skizzieren Sie den Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Wie groß ist die Höhe des Flüssigkeitsstandes im Becken nach 6 Stunden?

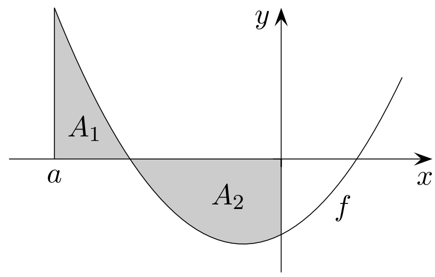
3. Ermitteln Sie die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 + 2$, deren Graph durch den Punkt $P(1 \mid 2)$ verläuft.



4. Das nebenstehende Rechteck wird durch den Graphen einer Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid 2)$ in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x(x-2)$. Bestimmen Sie b so, dass die Inhalte der Flächen A_1 und A_2 gleich groß sind.

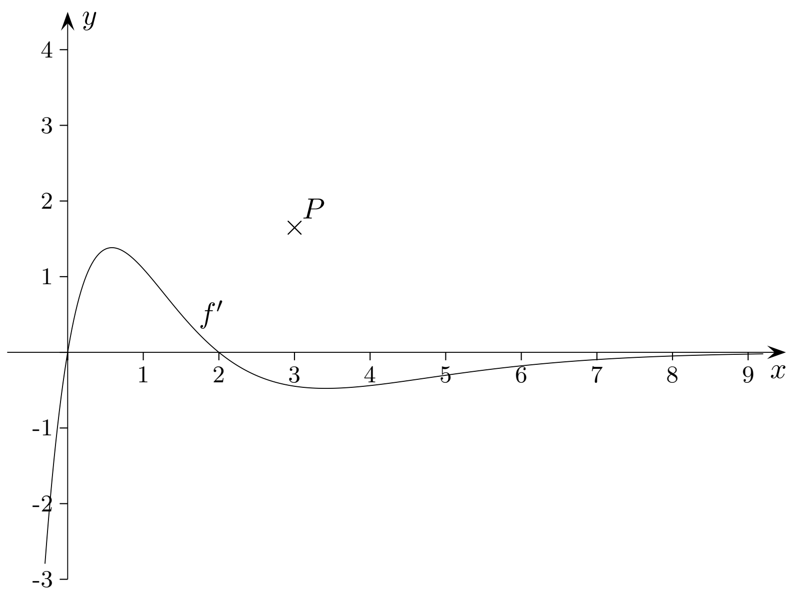




6. Die Abbildung zeigt den Graphen von f.
   A_1, A_2 sind die Inhalte der oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegenden Flächen. Es gilt: $0 < A_1 < A_2$.
   Untersuchen Sie, welche der folgenden Antworten richtig ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   Der Wert von $\int\limits_a^0 f(x)\,dx$ ist

   a) $A_1 + A_2$ b) $A_1 - A_2$ c) $A_2 - A_1$ d) $|\,A_1 - A_2\,|$



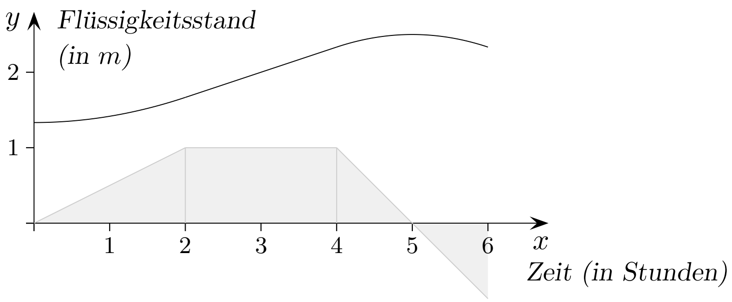
7. Gegeben ist die Ableitungsfunktion von f. Der Graph von f verläuft durch P.
   Skizzieren Sie den Graphen von f.

8. Geben Sie alle Funktionen an, die die 2. Ableitung $f''(x) = (x-1)^2$ besitzen.
   Welche Aussage über den Verlauf der Graphen in der Umgebung von $x = 1$ ist möglich?

ohne Einsatz des GTR

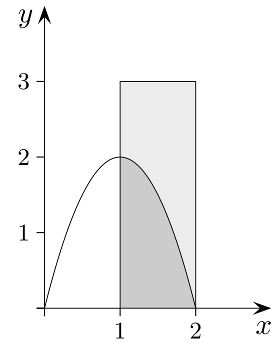
1. Berechnen Sie folgende Integrale.

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x \cdot (x^2 - 3)\, dx = 0$ b) $\displaystyle\int_{-k}^{2k} (3x^2 - 2kx)\, dx = 6k^3$ c) $\displaystyle\int_{0}^{9} \sqrt{x}\, dx = 18$



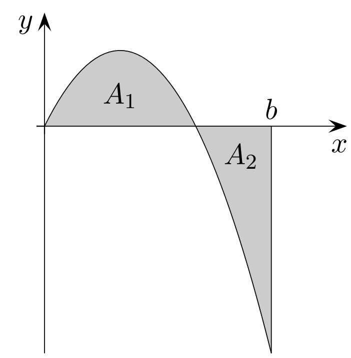
2. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines quaderförmigen Beckens mit der Grundfläche $3\, m^2$ geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
   Zur Zeit $x = 0$ sind $4\, m^3$ im Becken.
   Skizzieren Sie den Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Wie groß ist die Höhe des Flüssigkeitsstandes im Becken nach 6 Stunden?
   $\frac{7}{3}$

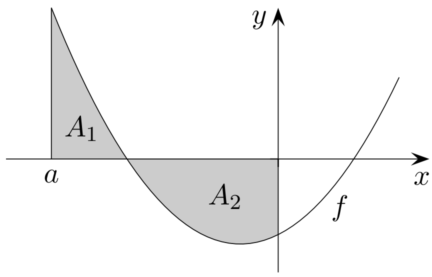
3. Ermitteln Sie die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 + 2$,
   deren Graph durch den Punkt $P(1 \mid 2)$ verläuft.
   $F(x) = x^3 + 2x - 1$



4. Das nebenstehende Rechteck wird durch den Graphen einer Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid 2)$ in zwei Teilflächen zerlegt.
   Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.
   5 : 4 oben/unten

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x(x - 2)$.
   Bestimmen Sie b so, dass die Inhalte der Flächen A_1 und A_2 gleich groß sind.
   $b = 3$

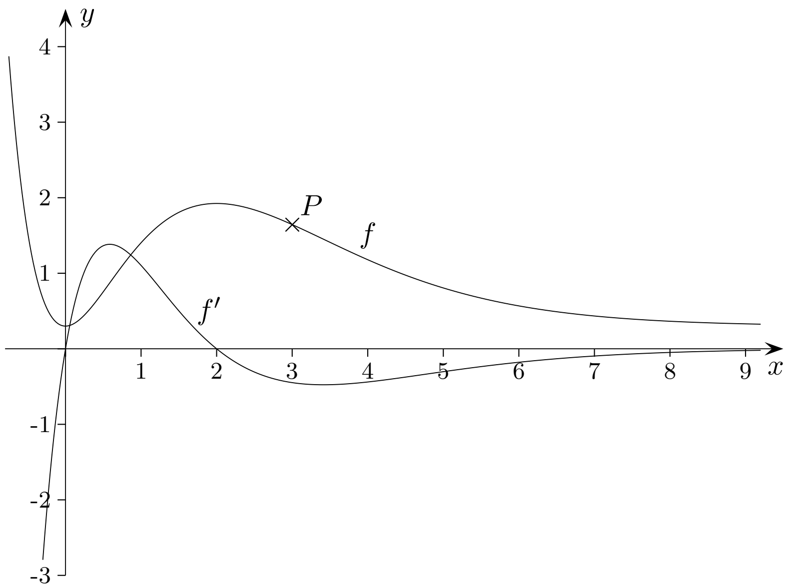




6. Die Abbildung zeigt den Graphen von f.
   A_1, A_2 sind die Inhalte der oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegenden Flächen. Es gilt: $0 < A_1 < A_2$.
   Untersuchen Sie, welche der folgenden Antworten richtig ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   Der Wert von $\int\limits_a^0 f(x)\,dx$ ist

   a) $A_1 + A_2$ b) $A_1 - A_2$ c) $A_2 - A_1$ d) $|\,A_1 - A_2\,|$ b)

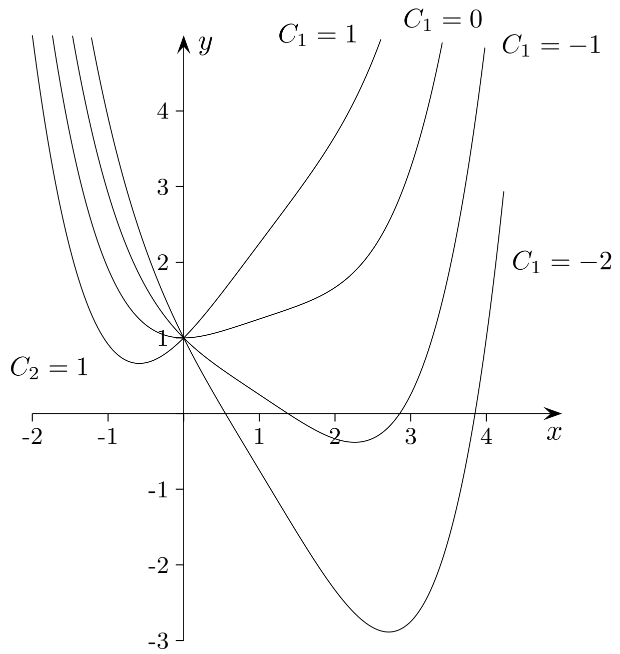


7. Gegeben ist die Ableitungsfunktion von f. Der Graph von f verläuft durch P.
   Skizzieren Sie den Graphen von f.

8. Geben Sie alle Funktionen an, die die 2. Ableitung $f''(x) = (x-1)^2$ besitzen.
   Welche Aussage über den Verlauf der Graphen in der Umgebung von $x = 1$ ist möglich?

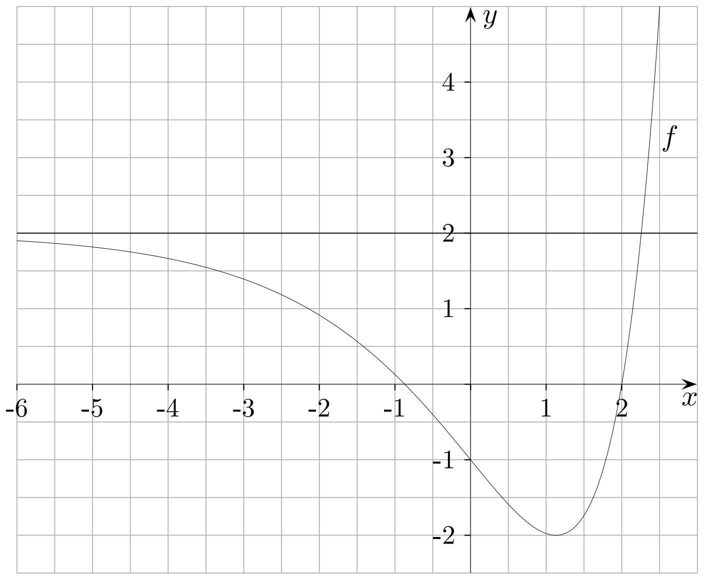
   $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$
   In einer Umgebung von $x = 1$ verlaufen die Graphen
   nahezu geradlinig mit pos. bez. neg. Steigung, $f'(1) = \frac{1}{3} + C_1$.
   Die Graphen sind linksgekrümmt, $f''(x) \geq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$



Integralfunktion

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

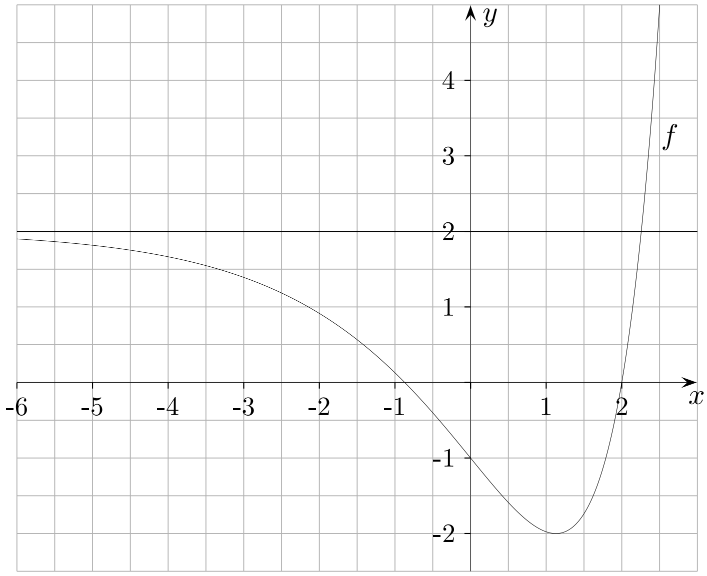


Skizzieren Sie die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ für $a = 0$ und $a = 2$.

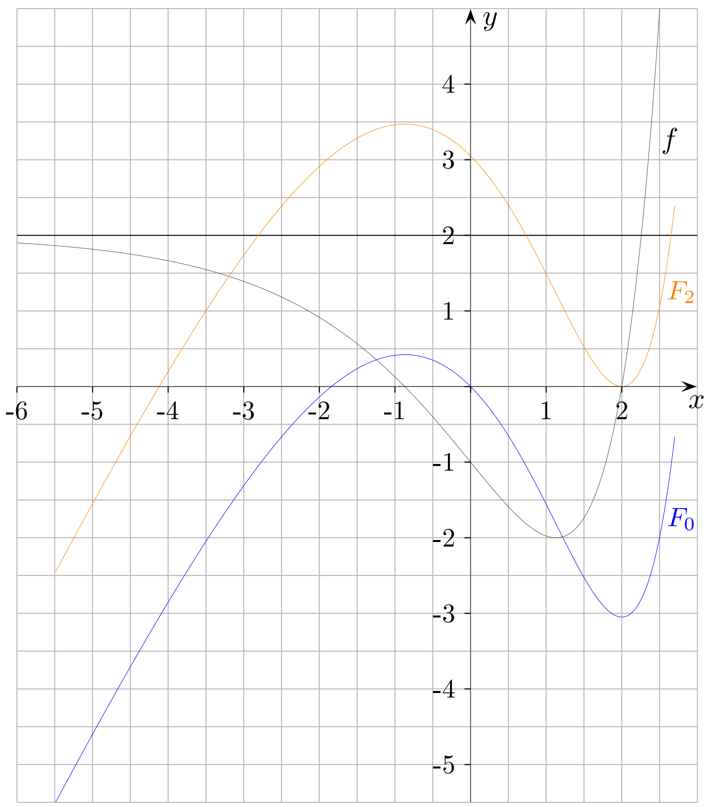
Anmerkung
Verwendet wurde $f(x) = (e^{ax} - 2)^2 - 2$
mit $a = \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{2})$, so dass $f(2) = 0$ vorliegt.

Integralfunktion

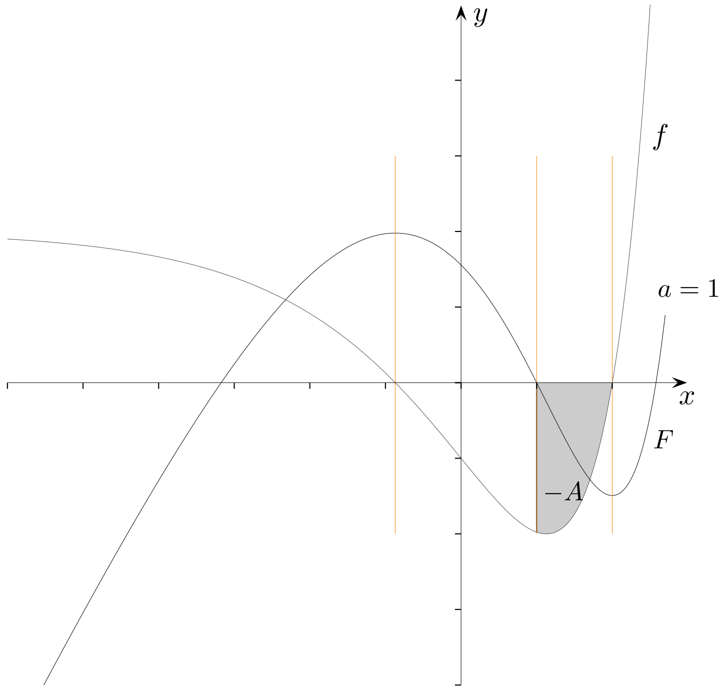
Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



Skizzieren Sie die Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $F_a(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ für $a = 0$ und $a = 2$.



Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ (besser $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$)



Um eine Integralfunktion skizzieren zu können, sollte Folgendes bekannt sein:

a) $F'(x) = f(x)$

b) Nullstelle x_N von f mit Vorzeichenwechsel $\Longrightarrow$ Extremum von F an der Stelle x_N,
genauer: Vorzeichenwechsel $+/-$ Maximum von F, Vorzeichenwechsel $-/+$ Minimum von F

c) Extremstelle x_E von f $\Longrightarrow$ Wendestelle x_E von F.

d) $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) Eine Fläche A unterhalb der x-Achse liefert den negativen Beitrag $-A$ zum Integral.

f) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ beachte: $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

Tipp fürs Vorgehen:

a) Nullstellen von f hinsichtlich Minimum/Maximum von F auswerten
b) Nullstelle von F markieren
c) …

Graphen zuordnen und Funktionsterme ermitteln

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

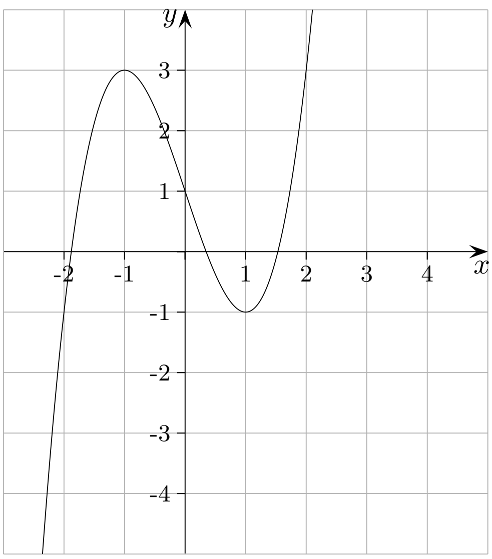


Abb. 1

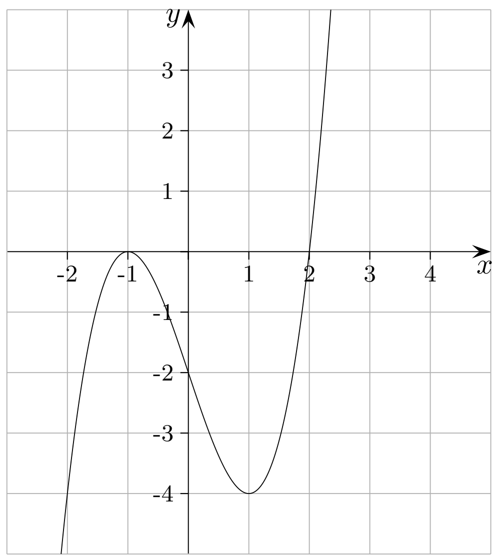


Abb. 2

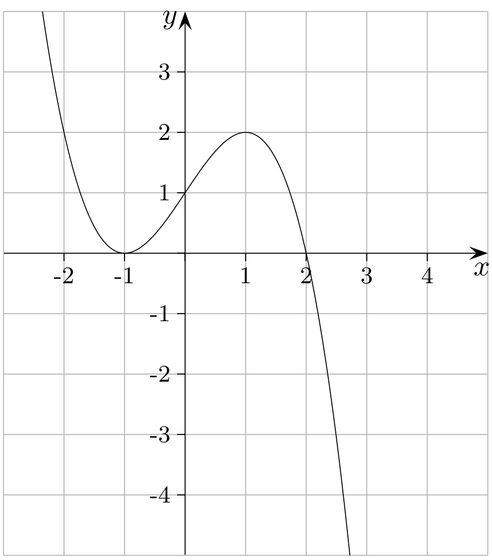


Abb. 3

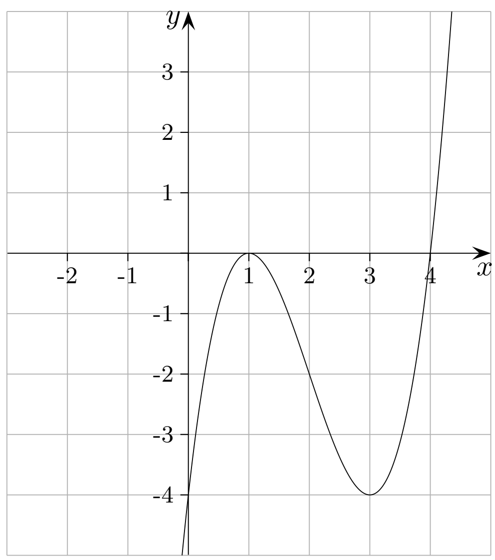


Abb. 4

a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion $g(x) = f(x - a)$ und eine zur Funktion $h(x) = b \cdot f(x)$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie die Werte für a und b an.

c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k.
Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

Graphen zuordnen und Funktionsterme ermitteln

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

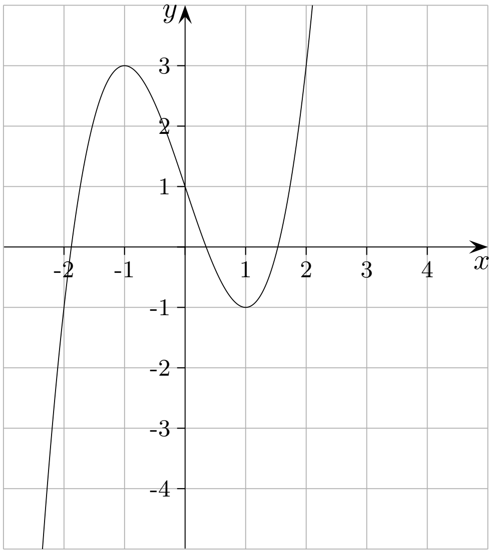


Abb. 1

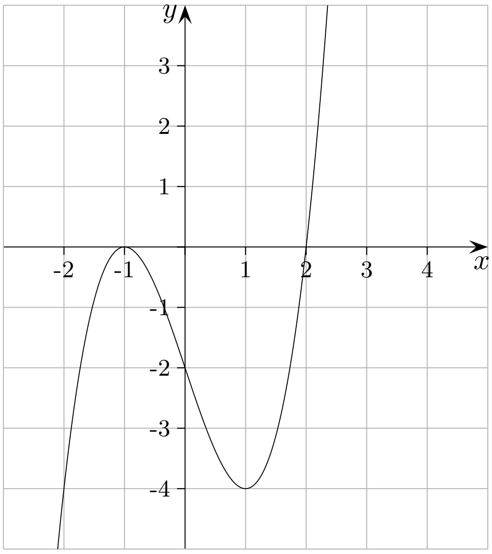


Abb. 2

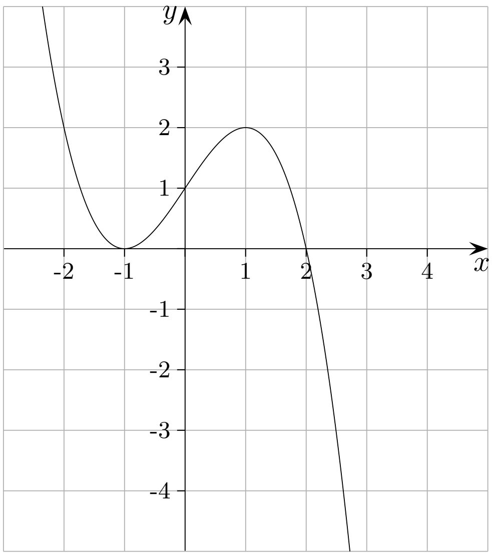


Abb. 3

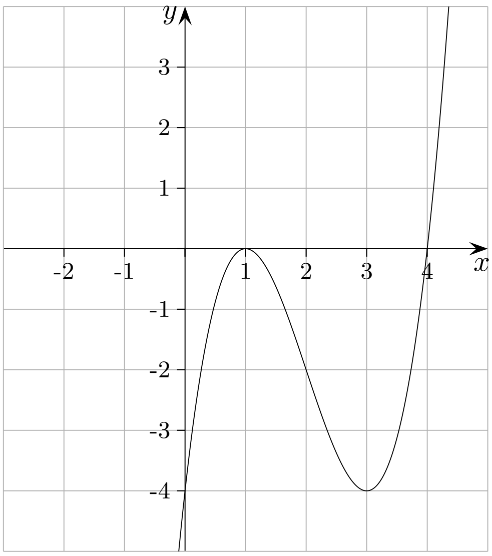


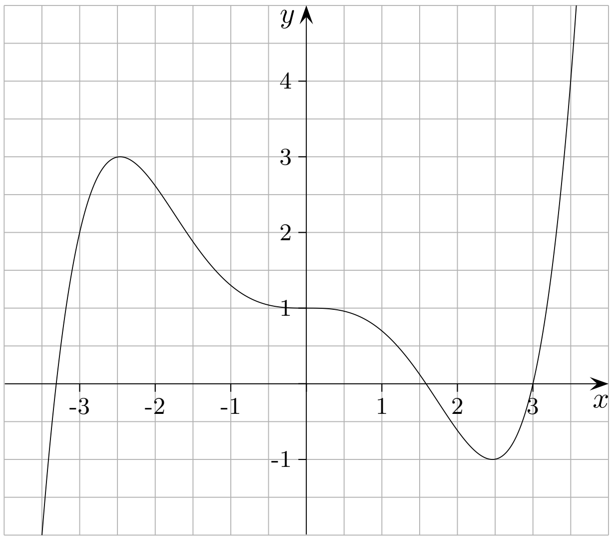
Abb. 4

a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt. z. B. $P(0 \mid -2)$ oder $Q(1 \mid -4)$

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion $g(x) = f(x - a)$ Abb. 4, $a = 2$
und eine zur Funktion $h(x) = b \cdot f(x)$. Abb. 3, $b = -\frac{1}{2}$
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie die Werte für a und b an.

c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k. Abb. 1
Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an. $k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$

Wahr oder falsch?



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

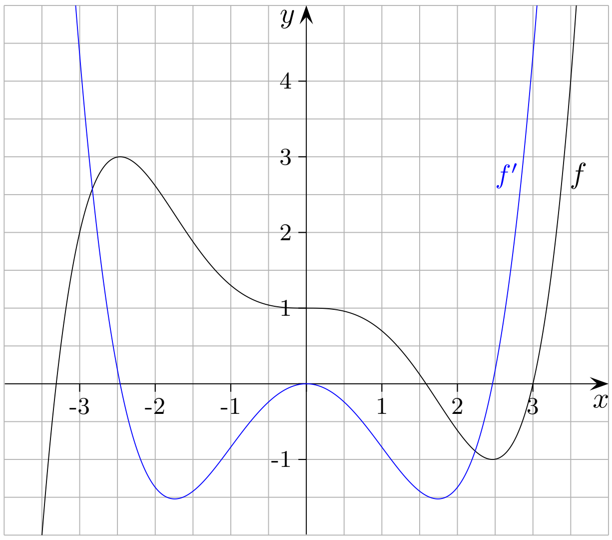
(1) F ist im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.

(2) f' hat im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ drei Nullstellen.

(3) $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,dx = -1$

(4) $H(0 \mid 0)$ ist Maximum von f'.

Wahr oder falsch?



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

Alle Aussagen sind wahr.

(1) F ist im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.

$f(x) > 0$ in diesem Intervall

(2) f' hat im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ drei Nullstellen.

f besitzt 3 waagrechte Tangenten.

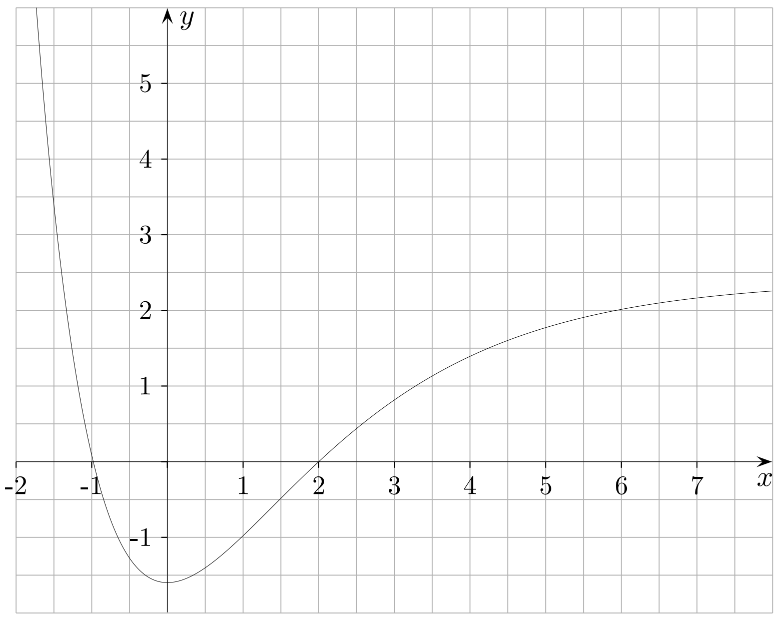
(3) $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,dx = -1$

$\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(0) = -1$

(4) $H(0\,|\,0)$ ist Maximum von f'.

$f'(0) = 0$ und
$f'(x) < 0$ links und rechts von $x = 0$

Integralfunktion



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.

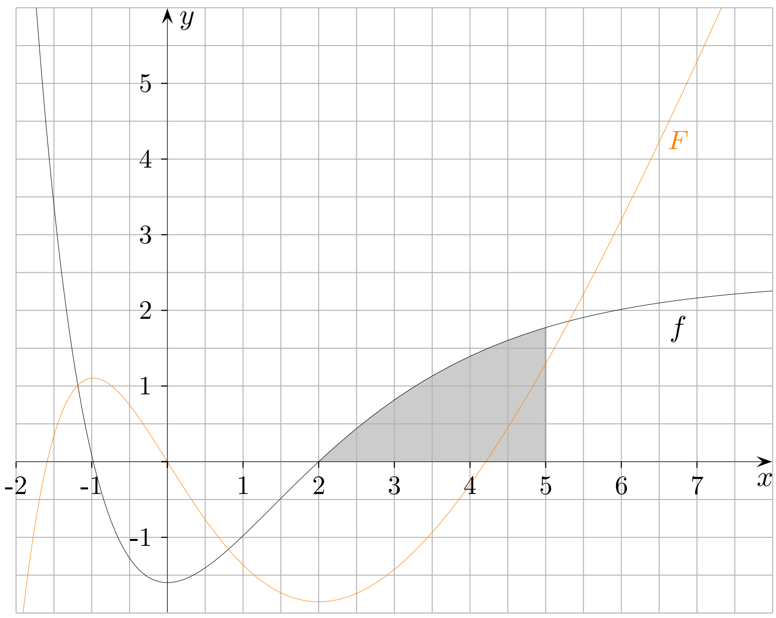
a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich $-2 < x < 8$ hinsichtlich

- Extremstellen
- Wendestellen
- Nullstellen?

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass $F(5) - F(2) \approx 3$ gilt.

Integralfunktion



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.

a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich $-2 < x < 8$ hinsichtlich

- Extremstellen

Nullstelle $x_N = -1$ von f mit Vorzeichenwechsel $+/-$
$\Longrightarrow$ Maximum an der Stelle $x_N = -1$ von F

Nullstelle $x_N = 2$ von f mit Vorzeichenwechsel $-/+$
$\Longrightarrow$ Minimum an der Stelle $x_N = 2$ von F

- Wendestellen

Extremstelle $x_E = 0$ von f $\Longrightarrow$ Wendestelle $x_E = 0$ von F.

- Nullstellen?

Ob F in diesem Intervall Nullstellen besitzt,
hängt von der Integrationskonstanten C ab.
Jede Stammfunktion F besitzt auf $\mathbb{R}$ jedoch mindestens eine Nullstelle …

Begründen Sie Ihre Antworten.

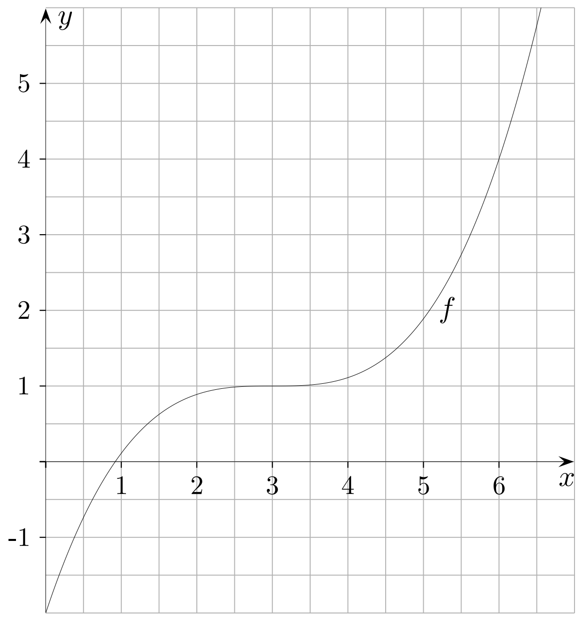
b) Begründen Sie, dass $F(5) - F(2) \approx 3$ gilt.

$$F(5) - F(2) = \int_2^5 f(x)\,dx$$

Durch die Zusammensetzung der Kästchen kann erkennt werden,
dass der Flächeninhalt näherungsweise 3 ist.

Integralfunktion

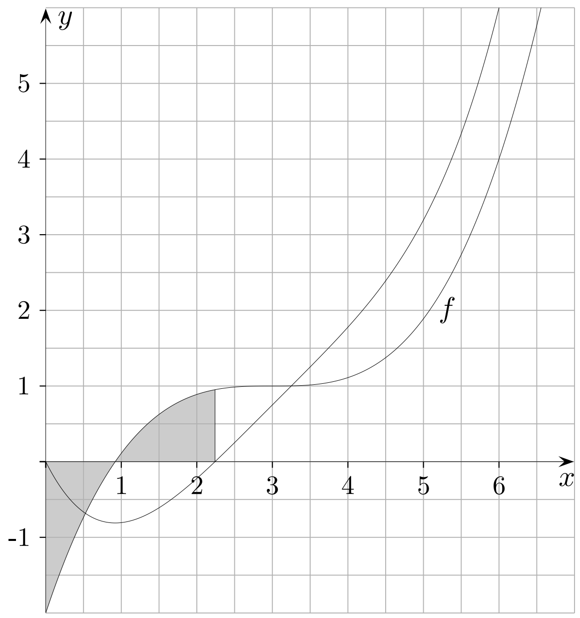
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Skizzieren Sie für $x \geq 0$ den Graphen von $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
Welche Aussage über Flächeninhalte ermöglicht die größere Nullstelle von F?

Integralfunktion

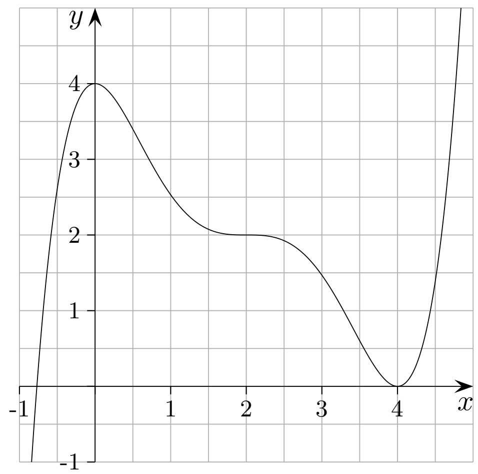
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Skizzieren Sie für $x \geq 0$ den Graphen von $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
Welche Aussage über Flächeninhalte ermöglicht die größere Nullstelle von F?

Die Inhalte der Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse bis zur Nullstelle sind gleich groß.

Wahr oder falsch?



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

(1) f hat mindestens den Grad 5.

(2) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

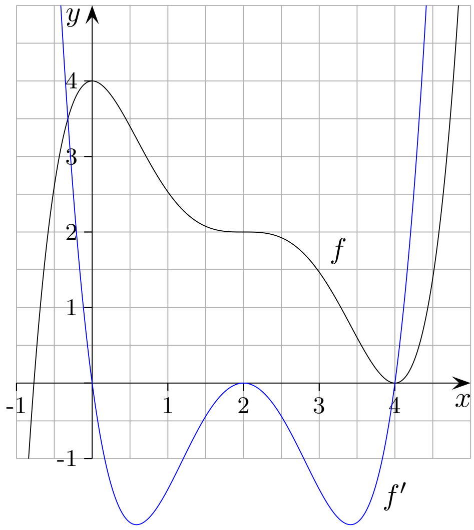
(3) Für den Bereich $0 < x < 2$ gilt $f'(x) < 0$.

(4) Die Ableitungsfunktion f' ist im Bereich $0 \leq x \leq 4$ monoton fallend.

(5) Gehen Sie davon aus, dass die Funktion 5. Grades ist. Geben Sie die Mindestanzahl an Bedingungen an ($f(\ldots) = \ldots$, $f'(\ldots) = \ldots$,usw.), die die Funktion festlegen.

(6) Der Graph ist vermutlich punktsymmetrisch zu einem Punkt P.
Stellen Sie die Bedingung auf, mit der das nachgeprüft werden könnte (CAS).

Wahr oder falsch?



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

(1) f hat mindestens den Grad 5. wahr, 3 Wendepunkte, f'' mindestens 3. Grades

(2) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt. wahr

(3) Für den Bereich $0 < x < 2$ gilt $f'(x) < 0$. wahr

(4) Die Ableitungsfunktion f' ist im Bereich $0 \leq x \leq 4$ monoton fallend. falsch

(5) Gehen Sie davon aus, dass die Funktion 5. Grades ist. Geben Sie die Mindestanzahl an Bedingungen an ($f(\ldots) = \ldots$, $f'(\ldots) = \ldots$,usw.), die die Funktion festlegen.

1. $f(0)=4$
2. $f'(0)=0$
3. $f'(2)=0$
4. $f''(2)=0$
5. $f(4)=0$
6. $f'(4)=0$

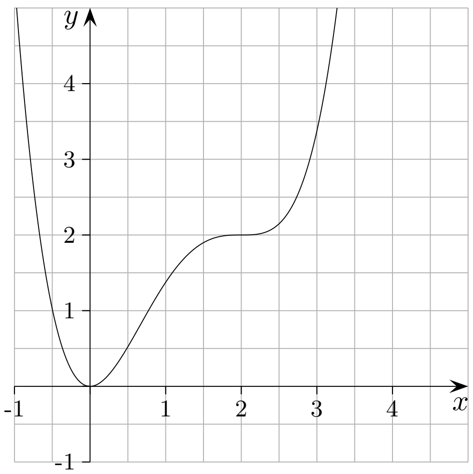
(6) Der Graph ist vermutlich punktsymmetrisch zu einem Punkt P.
Stellen Sie die Bedingung auf, mit der das nachgeprüft werden könnte (CAS).

$P(2 \mid 2)$ und den Graphen in den Ursprung verschieben.

Auf $g(x) = f(x+2) - 2$ die Bedingung für die Punktsymmetrie $g(x) = -g(-x)$ anwenden.

$f(x+2) - 2 = 2 - f(2-x)$

Wahr oder falsch?



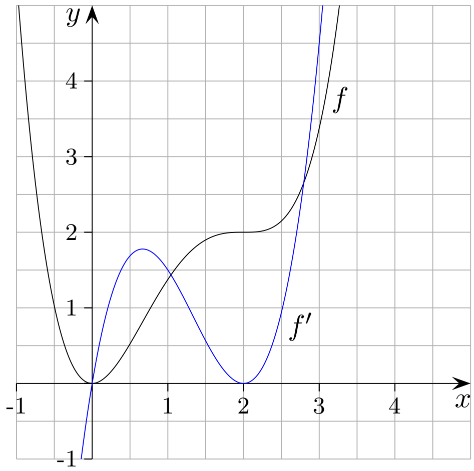
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

(1) f hat mindestens den Grad 4.

(2) Die Ableitungsfunktion f' ist im Bereich $0 \leq x \leq 3$ monoton steigend.

(3) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt.

Wahr oder falsch?



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

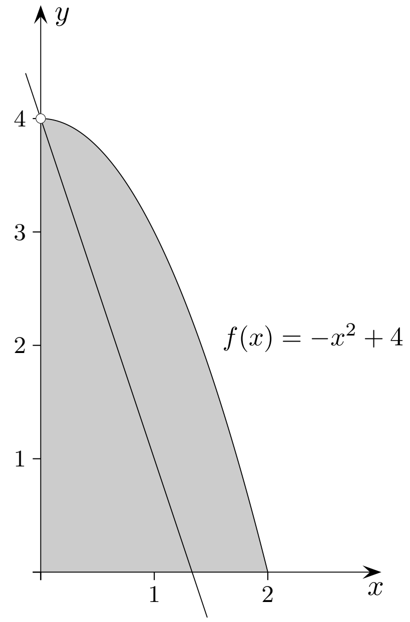
(1) f hat mindestens den Grad 4. wahr, 2 Wendepunkte, f'' mindestens 2. Grades

(2) Die Ableitungsfunktion f' ist im Bereich $0 \leq x \leq 3$ monoton steigend. falsch

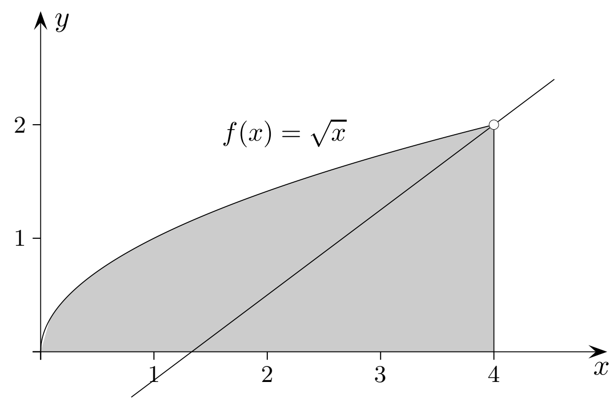
(3) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 2 einen Extrempunkt. wahr

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch $P(0\,|\,4)$, die die gezeichnete Fläche halbiert?

a)



b)



a) $y = -3x + 4$

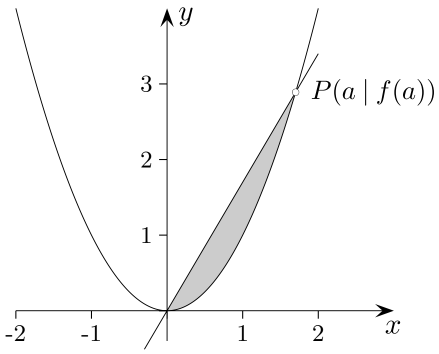
b) $y = \frac{3}{4}(x - 4) + 2$

$y = \frac{3}{4}x - 1$

1. Der Punkt $P(a \mid f(a)),\ a > 0$, liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^2$.
   Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den dieser Graph mit der Ursprungsgeraden durch P einschließt.

2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades soll die beiden Extrempunkte $E_1(2 \mid 0)$ und $E_2(-2 \mid 0)$ haben. Der Graph soll die y-Achse bei $y = 4$ schneiden.
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

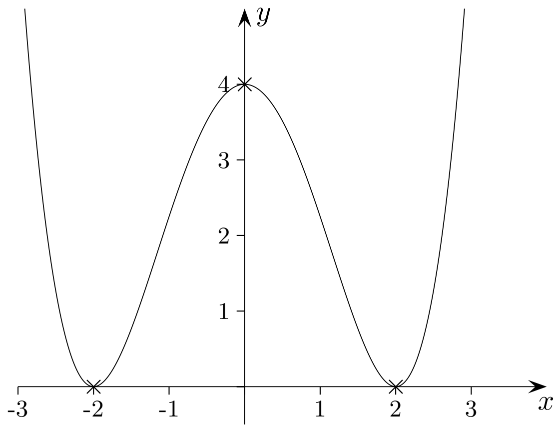
1. Der Punkt $P(a \mid f(a)),\ a > 0$, liegt auf dem Graphen von $f(x) = x^2$.
   Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den dieser Graph mit der Ursprungsgeraden durch P einschließt.



Die Ursprungsgerade hat die Gleichung $y = mx,\ m = \dfrac{a^2}{a} = a$.

$A = \displaystyle\int_0^a (ax - x^2)\, dx = \ldots = \frac{a^3}{6}$

2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades soll die beiden Extrempunkte $E_1(2 \mid 0)$ und $E_2(-2 \mid 0)$ haben. Der Graph soll die y-Achse bei $y = 4$ schneiden.
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.



Ansatz (Symmetrie beachten) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

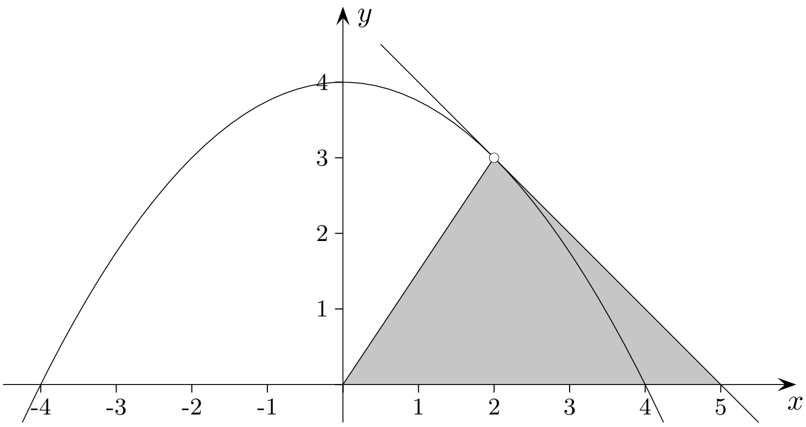
Bedingungen:

1. $f(2) = 0$
2. $f'(2) = 0$
3. $f(0) = 4$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & 16a + 4b + c & = & 0 \\ 2. & 32a + 4b & = & 0 \\ 3. & c & = & 4 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$

Tangentendreieck

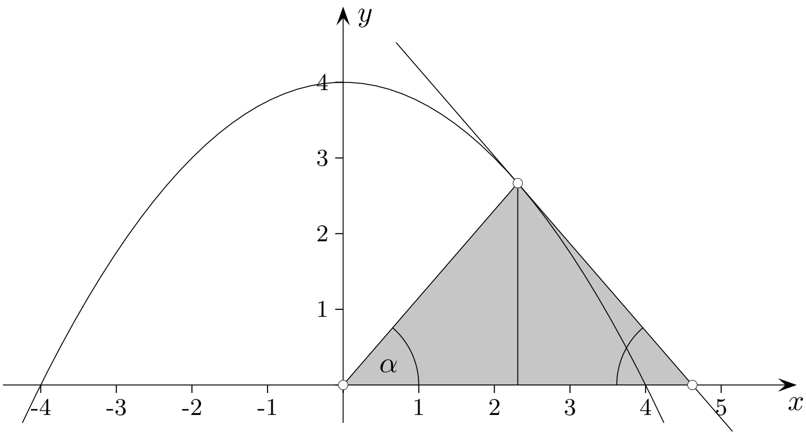


Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

a) Ermittle allgemein die Nullstelle der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$.

b) Für welches x_0 entsteht ein gleichschenkliges Dreieck?
Leite allgemein die Bedingung $f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 0$ her und veranschauliche sie.
Hierzu darf die Bedingung auch umgestellt werden.
Wie groß sind die Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks?

Tangentendreieck



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

a) Ermittle allgemein die Nullstelle der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$.

b) Für welches x_0 entsteht ein gleichschenkliges Dreieck?
Leite allgemein die Bedingung $f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 0$ her und veranschauliche sie.
Hierzu darf die Bedingung auch umgestellt werden.
Wie groß sind die Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks?

a)

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0) \\ &= -\frac{1}{2}x_0(x - x_0) - \frac{1}{4}x_0^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x_N) &= 0 \\ x_N &= \frac{x_0^2 + 16}{2x_0} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_0 &= x_N \\ x_0 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0} = -f'(x_0)$$

$$\alpha = \beta = 49{,}1°, \quad \gamma = 81{,}8°$$

Tangenten

1. In welchen Punkten $P(x_0 \mid f(x_0))$ und $Q(x_0 \mid g(x_0))$ haben die Graphen von $f(x) = e^x + 3$ und $g(x) = \frac{e}{2}x^2$ parallele Tangenten?

2. Welche Tangente von $f(x) = e^x$ geht durch den Ursprung?

3. Zeigen Sie: Jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ vom Grad $n \geq 1$ hat im Ursprung die Tangente $t(x) = a_0 + a_1x$.
   Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.

4. Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes des Graphen von $f(x) = x^2 + 1$, für den die Tangente durch $Q(2 \mid 4)$ verläuft.

5. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = kx^2$.
   Zeigen Sie, dass sich die Tangenten im Punkt $P(a \mid f_k(a))$ für allgemeines k in einem Punkt auf der x-Achse schneiden.

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(2 - x)^2$.
   a) Begründen Sie den Verlauf des Graphen von f mithilfe des Funktionsterms.
   b) Ermitteln Sie für $x \geq 0$ die Gleichung derjenigen Tangente an den Graphen von f mit maximalem y-Achsenabschnitt.

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(2 - x)$.
   a) Zeigen Sie, dass $t_a\colon\ y = (2 - 2a)x + a^2$ die Tangentenschar an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ ist.
   b) Begründen Sie: Um eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ zu zeichnen, genügt es, die Gerade durch die beiden Punkte $(a \mid f(a))$ und $\left(0 \mid a^2\right)$ zu zeichnen.

8. Wie groß ist der Winkel, den die Tangenten von $f(x) = x^2 + 1$ an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ einschließen?

Tangenten Hinweise

1. In welchen Punkten $P(x_0 \mid f(x_0))$ und $Q(x_0 \mid g(x_0))$ haben die Graphen von $f(x) = e^x + 3$ und $g(x) = \frac{e}{2}x^2$ parallele Tangenten?

   $f'(x) = g'(x), \;\; e^{x-1} = x, \; x = 1$ kann nur bestätigt werden.

2. Welche Tangente von $f(x) = e^x$ geht durch den Ursprung?

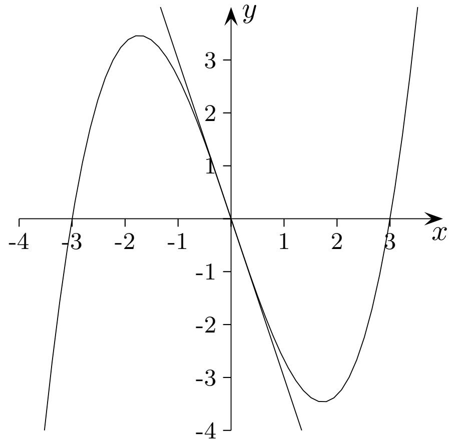
   $t_a(x) = e^a(x - a) + e^a$

   $t_a(0) = 0 \implies a = 1, \; y = e(x - 1) + e$

3. Zeigen Sie: Jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ vom Grad $n \geq 1$ hat im Ursprung die Tangente $t(x) = a_0 + a_1x$.

   $p(0) = t(0) = a_0, \; p'(0) = t'(0) = a_1$

   Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.



4. Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes des Graphen von $f(x) = x^2 + 1$, für den die Tangente durch $Q(2 \mid 4)$ verläuft.

   $t_a(x) = 2a(x - a) + a^2 + 1$

   $t_a(2) = 4 \implies a_1 = 1, \, a_2 = 3$

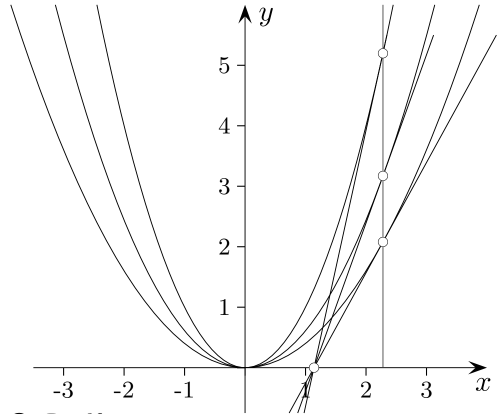
   $a_1 = 1, \; y = 2x, \; Q_1(1 \mid 2)$

   $a_2 = 3, \; y = 6x - 8, \; Q_2(3 \mid 10)$

5. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = kx^2$.
   Zeigen Sie, dass sich die Tangenten im Punkt $P(a \mid f_k(a))$ für allgemeines k in einem Punkt auf der x-Achse schneiden.

   $y = 2kax - ka^2, \;\; x_N = \frac{a}{2}$

   alternativ: Streckung mit dem Faktor k in y-Achsenrichtung betrachten, $N(x_N \mid 0)$ bleibt fix.



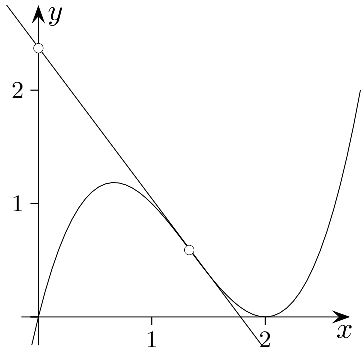
6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(2-x)^2$.

   a) Begründen Sie den Verlauf des Graphen von f mithilfe des Funktionsterms.

   Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ (doppelt, d. h. parabelförmig in der Umgebung von x_2)

   b) Ermitteln Sie für $x \geq 0$ die Gleichung derjenigen Tangente an den Graphen von f mit maximalem y-Achsenabschnitt.

   Tangente an der Wendestelle $x_W = \frac{4}{3},\ b_{max} = (\frac{4}{3})^3$



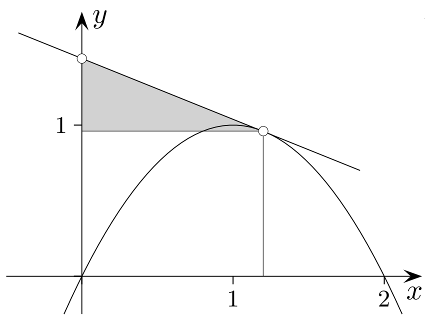
7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(2-x)$.

   a) Zeigen Sie, dass t_a: $y = (2-2a)x + a^2$ die Tangentenschar an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ ist.

   $t_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

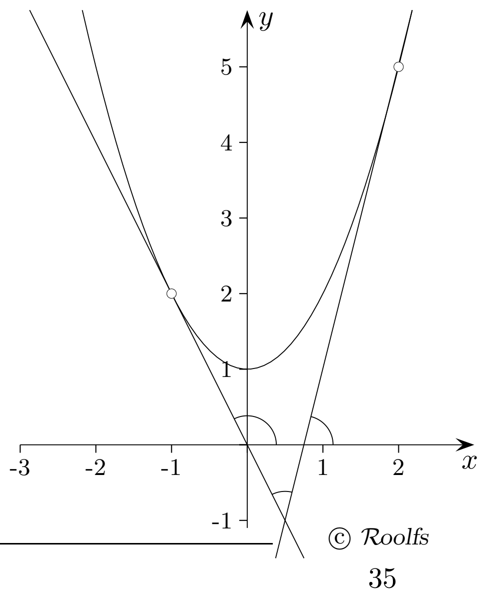
   b) Begründen Sie: Um eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ zu zeichnen, genügt es, die Gerade durch die beiden Punkte $(a \mid f(a))$ und $\big(0 \mid a^2\big)$ zu zeichnen.

$$-\frac{a^2 - f(a)}{a} = 2 - 2a$$

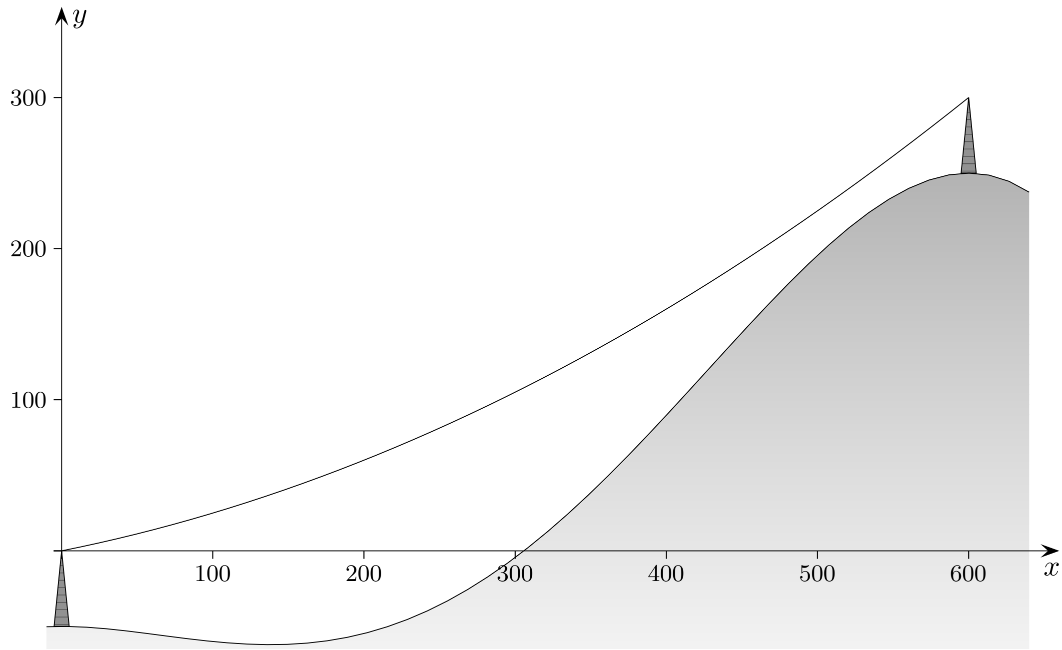


8. Wie groß ist der Winkel, den die Tangenten von $f(x) = x^2 + 1$ an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ einschließen?

   $116{,}6° - 76{,}0° = 40{,}6°$



Seilbahn



Zwei Masten A und B einer geplanten Seilbahn haben einen horizontalen Abstand von 600 m. Das Seil zwischen den beiden Masten kann in grober Näherung durch die Graphen der Funktionenschar

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{1200} - \frac{k}{600}\right)x^2 + kx$$

beschrieben werden (Einheiten in Meter, Spitze von A im Koordinatenursprung).

a) Welche anschauliche Bedeutung hat der Parameter k?

b) Untersuchen Sie, für welchen Parameter k das Seil in der Bergstation B unter einem Winkel von 40° ankommt. Bestimmen Sie anschließend, unter welchem Winkel das Seil die Talstation A in diesem Fall verlässt.

c) Unter dem Durchhang des Seiles an einer Stelle x versteht man den vertikalen Abstand zwischen der Strecke, die die beiden Masten verbindet, und dem Funktionsgraphen. Ermitteln Sie für allgemeines k die Stelle x, an der der Durchhang am größten ist.

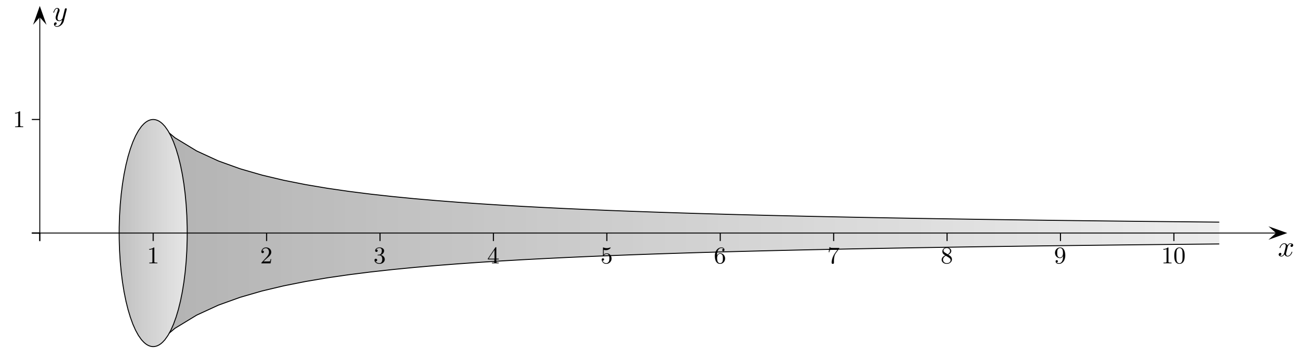
d) Der maximale Durchhang soll im Bereich von 25 m bis 40 m liegen. Geben Sie an, in welchem Intervall der Parameter k liegen muss, damit diese Bedingungen erfüllt werden.

e) Das Profil des Hanges, an dem die Seilbahn gebaut wird, kann näherungsweise durch die Funktion

$$h(x) = -\frac{29}{225 \cdot 10^7}x^4 + \frac{571}{45 \cdot 10^6}x^3 - \frac{107}{5 \cdot 10^3}x^2 - 50$$

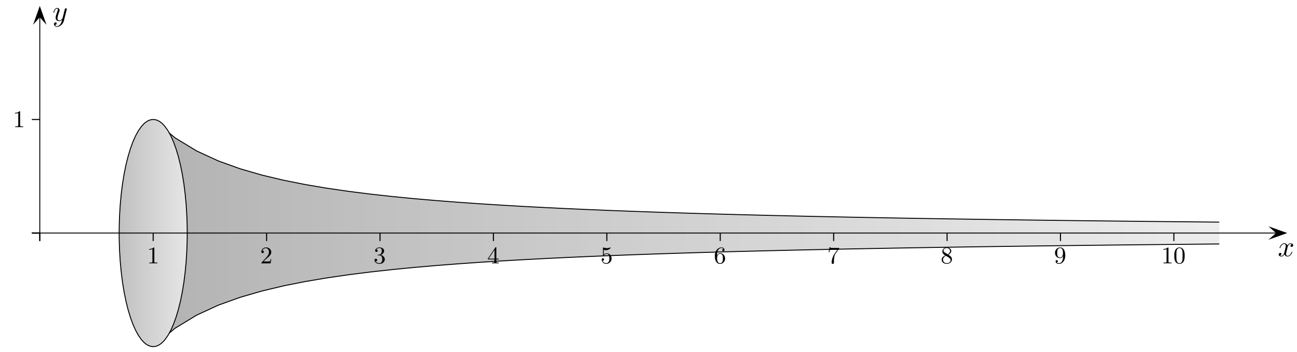
modelliert werden.
Wie hoch sind die Masten?
Untersuchen Sie, ob für $k = 0{,}2$ ein vertikaler Sicherheitsabstand zum Hang von 25 m eingehalten werden kann.

Torricelli-Trompete



Rotiert der Graph von $f(x) = \dfrac{1}{x}$ über dem Intervall $[1, \infty)$ um die x-Achse, so entsteht ein trichterförmiges Gebilde. Ermittle das Volumen und den Inhalt der Längsschnittfläche. Welche paradoxe Situation entstände, wenn der Trichter mit Farbe gefüllt würde?

Torricelli-Trompete



Rotiert der Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ über dem Intervall $[1, \infty)$ um die x-Achse,
so entsteht ein trichterförmiges Gebilde. Ermittle das Volumen und den Inhalt der Längsschnittfläche.
Welche paradoxe Situation entstände, wenn der Trichter mit Farbe gefüllt würde?

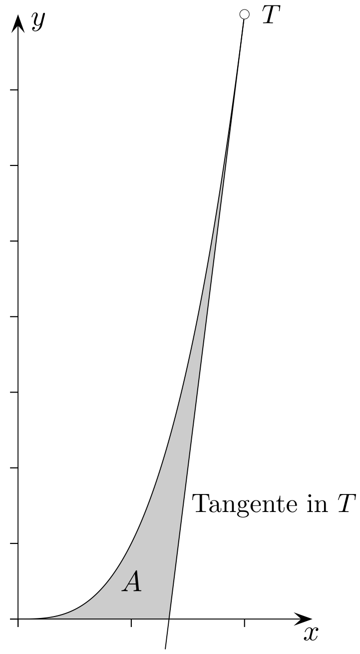
$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{u\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^u = \pi \lim_{u\to\infty} \Big[-\frac{1}{u} + 1\Big] = \pi$$

$$A = 2\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = 2\lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x}\,dx = 2\lim_{u\to\infty} \big[\ln(x)\big]_1^u = 2\lim_{u\to\infty} \big[\ln(u) - 0\big] = \infty$$ Der Grenzwert existiert nicht.

Der Trichter kann mit $\pi\, VE$ Farbe gefüllt werden.
Zum Streichen der Längsschnittfläche wird keine Farbe ausreichen.

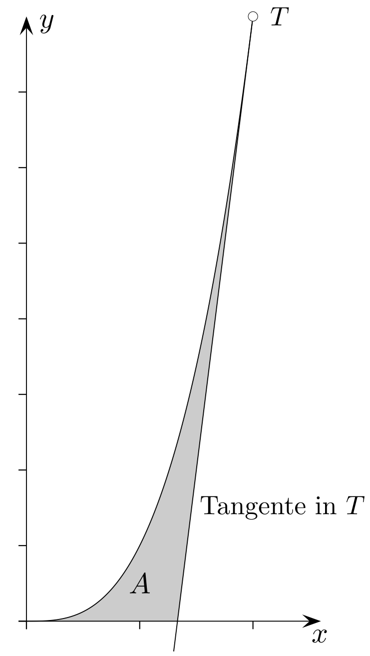
Ohne GTR

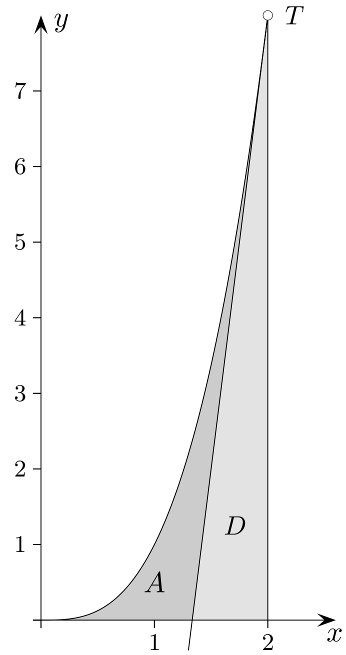
Auf dem Graphen zu $f(x) = x^3$ liegt der Punkt $T(2 \mid f(2))$.
Berechnen Sie den Inhalt der in der Skizze angegebenen Fläche A.



Ohne GTR

Auf dem Graphen zu $f(x) = x^3$ liegt der Punkt $T(2 \mid f(2))$.
Berechnen Sie den Inhalt der in der Skizze angegebenen Fläche A.





Tangentengleichung $y = 12x - 16$
Schnittstelle mit der x-Achse $a = \frac{4}{3}$
Dreiecksfläche $D = \frac{8}{3}$
$A = \int_0^2 x^3\,dx - D = \frac{4}{3}$

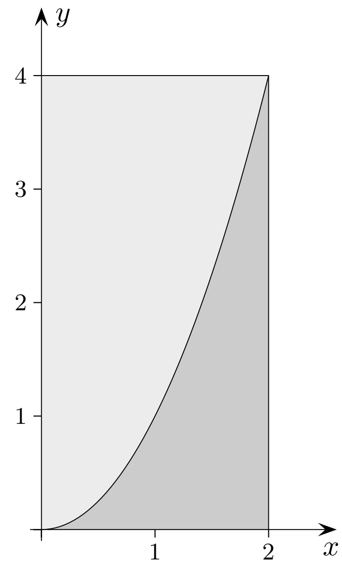
Ohne GTR

1. a) Geben Sie für $f(x) = (x-2)(x+2)$ alle Stammfunktionen an.
   b) Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Integralfunktion $J(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt$.
   c) In welchen Bereichen ist die Funktion $J(x)$ streng monoton steigend?
   (keine Rechnung erforderlich)

2. Untersuchen Sie, ob die nach rechts ins Unendliche reichende Fläche mit der linken Grenze $a = 1$ unter dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{x^3}$ einen endlichen Inhalt hat.

3. Die Funktion f hat folgende Eigenschaft:
   Rotiert der Graph von f über dem Intervall $[0;1]$ um die x-Achse, dann hat der entstehende Rotationskörper das Volumen 1. Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten für f an.

4. In ein anfänglich leeres quaderförmiges Becken mit der Grundfläche $4\,m^2$ wird 2 Stunden lang Wasser gepumpt.
   Die Funktion $f(t) = -t(t-2)$ beschreibt den Wasserzufluss, f in $m^3/Stunde$, t in Stunden.
   Wie hoch steht das Wasser im Becken nach 1 Stunde (in cm)?



5. Das Rechteck $ABCD$ mit $A(0\,|\,0)$, $B(2\,|\,0)$, $C(2\,|\,4)$, $D(0\,|\,4)$ wird durch den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ in zwei Teile zerlegt.
   a) Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.
   b) Bestimmen Sie mit dem Verhältnis 2:1 ohne Integralrechnung den Inhalt der dunkelgrauen Fläche.
   c) Welche quadratische Funktion zerlegt das Quadrat $A(0\,|\,0)$, $B(2\,|\,0)$, $E(2\,|\,2)$, $F(0\,|\,2)$ in zwei Teilflächen im Verhältnis 2:1? *Tipp: Das Ergebnis ist direkt zu sehen.*

6. Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1\,|\,0)$, $B(4\,|\,0)$, $C(4\,|\,2)$, und $D(1\,|\,2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ in zwei Teilflächen zerlegt.
   Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

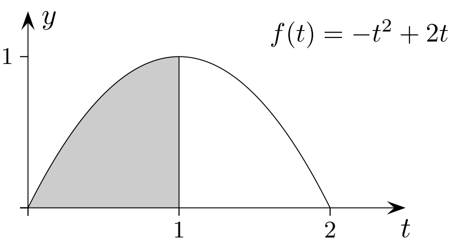
Ohne GTR

1. a) Geben Sie für $f(x) = (x-2)(x+2)$ alle Stammfunktionen an.
   b) Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Integralfunktion $J(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt$.
   $J(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{11}{3}$
   c) In welchen Bereichen ist die Funktion $J(x)$ streng monoton steigend? $x \le -2,\ x \ge 2$
   (keine Rechnung erforderlich)

2. Untersuchen Sie, ob die nach rechts ins Unendliche reichende Fläche mit der linken Grenze $a = 1$ unter dem Graphen von $f(x) = \frac{1}{x^3}$ einen endlichen Inhalt hat. $A = \frac{1}{2}$

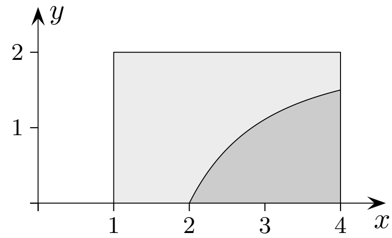
3. Die Funktion f hat folgende Eigenschaft:
   Rotiert der Graph von f über dem Intervall $[0;1]$ um die x-Achse, dann hat der entstehende Rotationskörper das Volumen 1. Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten für f an.
   $f_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

4. In ein anfänglich leeres quaderförmiges Becken mit der Grundfläche $4\,m^2$ wird 2 Stunden lang Wasser gepumpt. Die Funktion $f(t) = -t(t-2)$ beschreibt den Wasserzufluss, f in $m^3/Stunde$, t in Stunden. Wie hoch steht das Wasser im Becken nach 1 Stunde (in cm)? 16,7 cm



5. 5. a) Verhältnis 2:1, b) $\frac{8}{3}$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

6. Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1\,|\,0)$, $B(4\,|\,0)$, $C(4\,|\,2)$, und $D(1\,|\,2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ in zwei Teilflächen zerlegt.
   Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.



$$\int_2^4 f(x)\,dx = 2$$

Inhalt des Rechtecks 6

Verhältnis 2:1

Aufgaben ohne GTR

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = 4kx - kx^2$.
   Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den

   a) die Tangente an der Stelle k die y-Achse im Punkt $P(0\,|\,8)$ schneidet,

   b) f_k an der Stelle $x = 3$ eine Tangente hat, die parallel zur Winkelhalbierenden verläuft.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$. Berechnen Sie $\int\limits_0^2 f'(x)\,dx$.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^3 - kx$.
   Bestimmen Sie denjenigen (diejenigen) Wert(e) für k, für den

   a) die x-Koordinate des Hochpunktes den Wert -3 hat,

   b) f_k nur eine Nullstelle besitzt,

   c) $\int\limits_0^2 f_k(x)\,dx = 0$ gilt.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$.

   a) Weisen Sie nach, dass der Tiefpunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 3$ liegt.

   b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $P(3\,|\,18)$ des Graphen besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(8\,|\,2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung für diese Verschiebung.

5. Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,1\,|\,-1)$, $B(4\,|\,-3\,|\,3)$ und $C_t(2\,|\,-t\,|\,t+1)$.

   a) Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die auf der Geraden durch A und B liegen und von A den Abstand 1 LE haben.

   b) Die Punkte A, B und C_t bilden für jedes t ein Dreieck. Ermitteln Sie den Wert für t, für den das Dreieck in B rechtwinklig ist und ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgaben ohne GTR

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = 4kx - kx^2$.
   Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den

   a) die Tangente an der Stelle k die y-Achse im Punkt $P(0 \mid 8)$ schneidet,
   $t(x) = (4k - 2k^2)(x - k) + 4k^2 - k^3,\ t(0) = k^3,\ k = 2$

   b) f_k an der Stelle $x = 3$ eine Tangente hat, die parallel zur Winkelhalbierenden verläuft.
   $f'(3) = -2k,\ -2k = 1,\quad k = -\frac{1}{2}$

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,dx$. $\quad [\,f(x)]_0^2 = 0$

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^3 - kx$.
   Bestimmen Sie denjenigen (diejenigen) Wert(e) für k, für den

   a) die x-Koordinate des Hochpunktes den Wert -3 hat, $\quad -\sqrt{\frac{k}{3}} = -3,\ k = 27$

   b) f_k nur eine Nullstelle besitzt, $\quad$ 3 Nullstellen für $k > 0$ $\{0, \pm\sqrt{k}\},\ k \leq 0$

   c) $\displaystyle\int_0^2 f_k(x)\,dx = 0$ gilt. $\quad 4 - 2k = 0,\ k = 2$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$.

   a) Weisen Sie nach, dass der Tiefpunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 3$ liegt. $\quad T(1 \mid -2)$

   b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $P(3 \mid 18)$ des Graphen besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(8 \mid 2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung für diese Verschiebung. $\quad g(x) = f(x - 5) - 16$

5. Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1 \mid -1)$, $B(4 \mid -3 \mid 3)$ und $C_t(2 \mid -t \mid t + 1)$.

   a) Ermitteln Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, die auf der Geraden durch A und B liegen und von A den Abstand 1 LE haben.
   $|\overrightarrow{AB}| = 6,\ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$
   $A_1\left(\frac{7}{3} \mid \ldots \mid \ldots\right),\quad A_2(\ldots \mid \ldots \mid \ldots)$

   b) Die Punkte A, B und C_t bilden für jedes t ein Dreieck. Ermitteln Sie den Wert für t, für den das Dreieck in B rechtwinklig ist und ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
   $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC_t},\ 24 - 8t = 0,\ t = 3$
   $|\overrightarrow{BA}| = 6,\ |\overrightarrow{BC_3}| = \sqrt{5},\ A_{\text{Dreieck}} = 3\sqrt{5}$

Aufgaben ohne GTR

Die Funktion g hat folgende Eigenschaften:

(1) $g(3) = 0$ und $g'(3) = 0$

(2) $g'(1) > 0$

(3) $g''(4) > 0$

(4) $\displaystyle\int_0^6 g(x)\,dx = 0$

Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für den Graphen von g?
Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von g im Bereich $0 \leq x \leq 6$.

Aufgaben ohne GTR

Die Funktion g hat folgende Eigenschaften:

(1) $g(3) = 0$ und $g'(3) = 0$

(2) $g'(1) > 0$

(3) $g''(4) > 0$

(4) $\displaystyle\int_0^6 g(x)\,dx = 0$

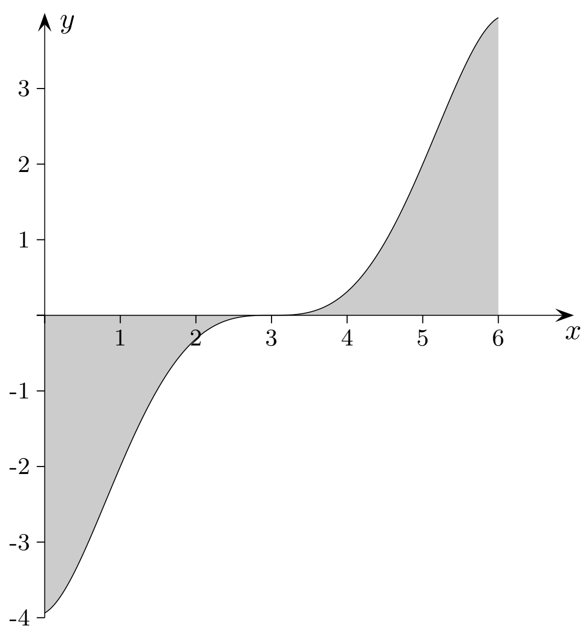
Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für den Graphen von g?
Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von g im Bereich $0 \leq x \leq 6$.

(1) Der Punkt $P(3\,|\,0)$ liegt auf dem Graphen von g und besitzt eine waagrechte Tangente.

(2) An der Stelle $x = 1$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von g positiv.
In einer Umgebung U von $x = 0$ ist g streng monoton steigend.
Für $x_1, x_2 \in U$ und $x_1 < x_2$ gilt: $g(x_1) < g(x_2)$.

(3) g' ist bei $x = 4$ steigend. Die Steigungen der Tangenten an g nehmen zu.
An der Stelle $x = 4$ ist der Graph von g linksgekrümmt (konvex).

(4) Zwischen $x = 0$ und $x = 6$ sind die Flächen, die der Graph von g oberhalb und unterhalb der x-Achse begrenzt, gleich groß.



Ohne GTR

1. Ermitteln Sie ohne zu integrieren die Extremstellen von $I(x) = \int\limits_1^x t(t-2)\,dt$.

2. Rechnen Sie aus:

   a) $\int\limits_{-1}^{2} (t^2x^2 - x)\,dt$

   b) $\int\limits_{-1}^{2} (t^2x^2 - x)\,dx$

   c) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2}{x^2}\,dx$

   d) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{4x+4}\,dx$

   e) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$

3. Für welches c hat die von dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2cx$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = 144\ FE$?

4. Untersuchen Sie für $k > 0$, welche Auswirkung eine Vervierfachung von k auf den Abstand der Extremstellen $x_1 = \frac{0{,}3 - \sqrt{k}}{k}$ und $x_2 = \frac{0{,}3 + \sqrt{k}}{k}$ hat.

5. Gegeben ist die Funktionenschar

   f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{6}{k}x^2 + 9x,\ \ k > 0$

   Zeigen Sie, dass $W_k(2k|2k)$ die Wendepunkte der Schar sind und dass alle Graphen von f_k im Wendepunkt W_k die gleiche Steigung haben.

Ohne GTR

1. Ermitteln Sie ohne zu integrieren die Extremstellen von $I(x) = \int\limits_1^x t(t-2)\,dt$. $\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$

2. Rechnen Sie aus:

   a) $\int\limits_{-1}^{2} (t^2x^2 - x)\,dt = 3x^2 - 3x$

   b) $\int\limits_{-1}^{2} (t^2x^2 - x)\,dx = 3t^2 - \frac{3}{2}$

   c) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2}{x^2}\ dx = 1$

   d) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{4x+4}\ dx = \frac{28}{3}$

   e) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$

3. Für welches c hat die von dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2cx$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = 144\ FE$?

   $$\int\limits_0^{4c} f(x)\,dx = -144$$
   $$-\frac{16c^3}{3} = -144$$
   $$c = 3$$

4. Untersuchen Sie für $k > 0$, welche Auswirkung eine Vervierfachung von k auf den Abstand der Extremstellen $x_1 = \frac{0{,}3 - \sqrt{k}}{k}$ und $x_2 = \frac{0{,}3 + \sqrt{k}}{k}$ hat.

   $x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{k}}{k}$

   für $4k$: $\ x_2^* - x_1^* = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$

5. Gegeben ist die Funktionenschar

   f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{6}{k}x^2 + 9x,\ \ k > 0.$

   Zeigen Sie, dass $W_k(2k|2k)$ die Wendepunkte der Schar sind und dass alle Graphen von f_k im Wendepunkt W_k die gleiche Steigung haben.

   $f_k'(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{12}{k}x + 9$

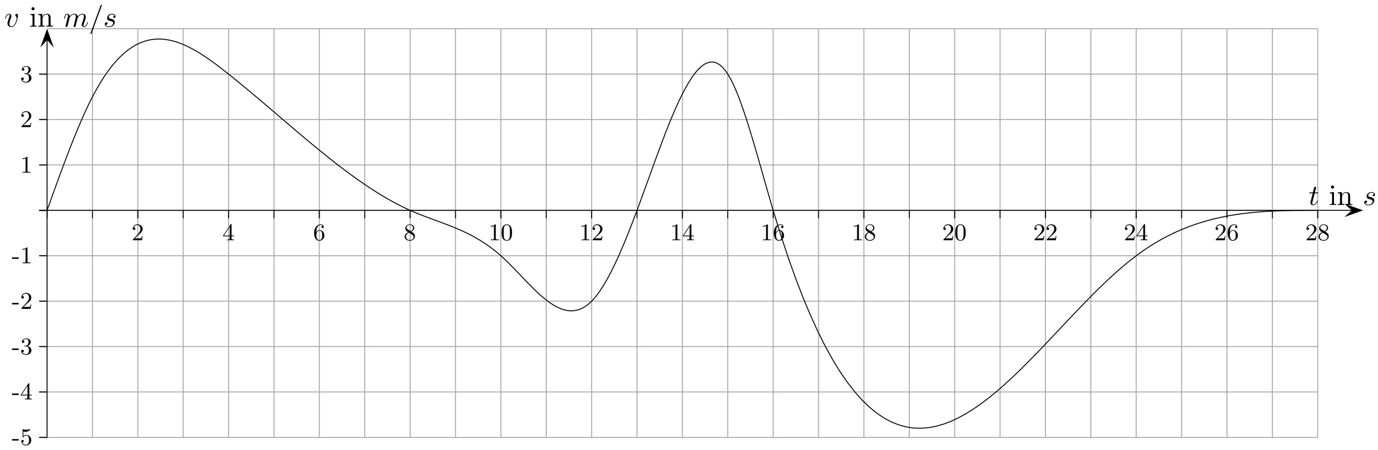
   $f_k''(x) = \frac{6}{k^2}x - \frac{12}{k}, \qquad f_k''(x) = 0 \implies \ \ldots$

   $f_k'''(x) = \frac{6}{k^2} > 0$

   $f_k'(2k) = -3$

Hunde-Aufgabe

Ein Hund rennt im Garten am Zaun hin und her und jagt die Passanten.
Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit v des Hundes, wobei positives v die Bewegung nach rechts, negatives v die Bewegung nach links bedeutet.
Die Geschwindigkeit v wird dabei in Meter pro Sekunde (m/s) gemessen, die Zeit t in Sekunden s.
Der Hund startet zur Zeit $t = 0$ in der Mitte des Zauns.



Beantworten Sie begründet die folgenden Fragen anhand des Graphen
(Zeiten und Bereiche bitte markieren):

a) In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Hund nach rechts bzw. links?

b) Wann hat er die größte Geschwindigkeit nach rechts bzw. links erreicht?

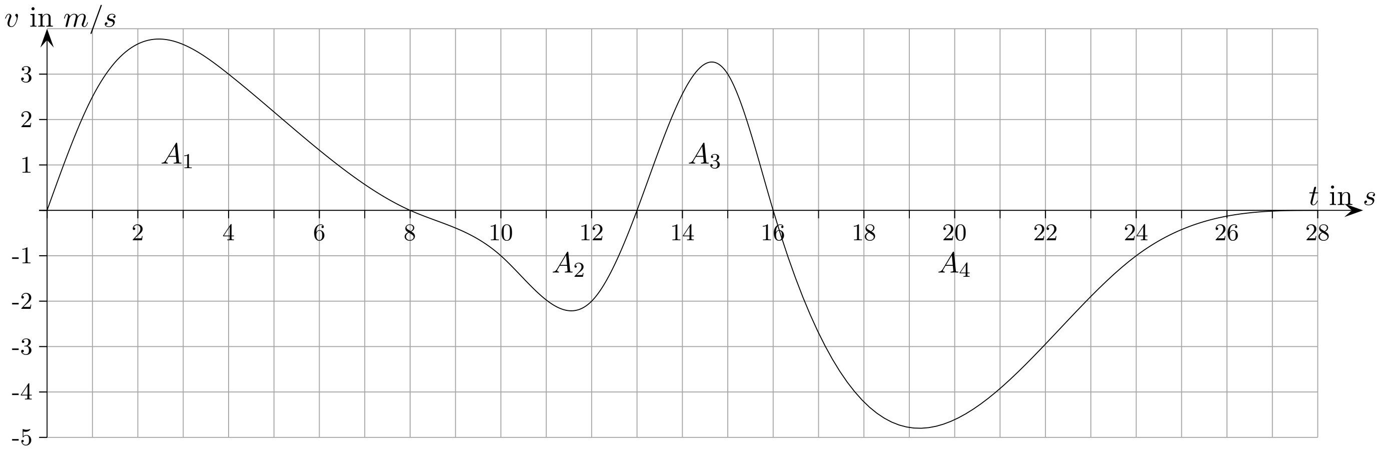
c) Wann wird der Hund schneller, wann wird er langsamer?

d) Der Hund hat zum Zeitpunkt $t = 16\,s$ eine Grundstücksgrenze erreicht.
Schätzen Sie die Breite des Grundstücks.

e) Schätzen Sie, wie weit der Hund nach 28 Sekunden rechts oder links von der Zaunmitte entfernt ist.

Hunde-Aufgabe

Ein Hund rennt im Garten am Zaun hin und her und jagt die Passanten.
Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit v des Hundes, wobei positives v die Bewegung nach rechts, negatives v die Bewegung nach links bedeutet.
Die Geschwindigkeit v wird dabei in Meter pro Sekunde (m/s) gemessen, die Zeit t in Sekunden s.
Der Hund startet zur Zeit $t = 0$ in der Mitte des Zauns.



Beantworten Sie begründet die folgenden Fragen anhand des Graphen
(Zeiten und Bereiche bitte markieren):

a) In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Hund nach rechts bzw. links?

b) Wann hat er die größte Geschwindigkeit nach rechts bzw. links erreicht?

c) Wann wird der Hund schneller, wann wird er langsamer?

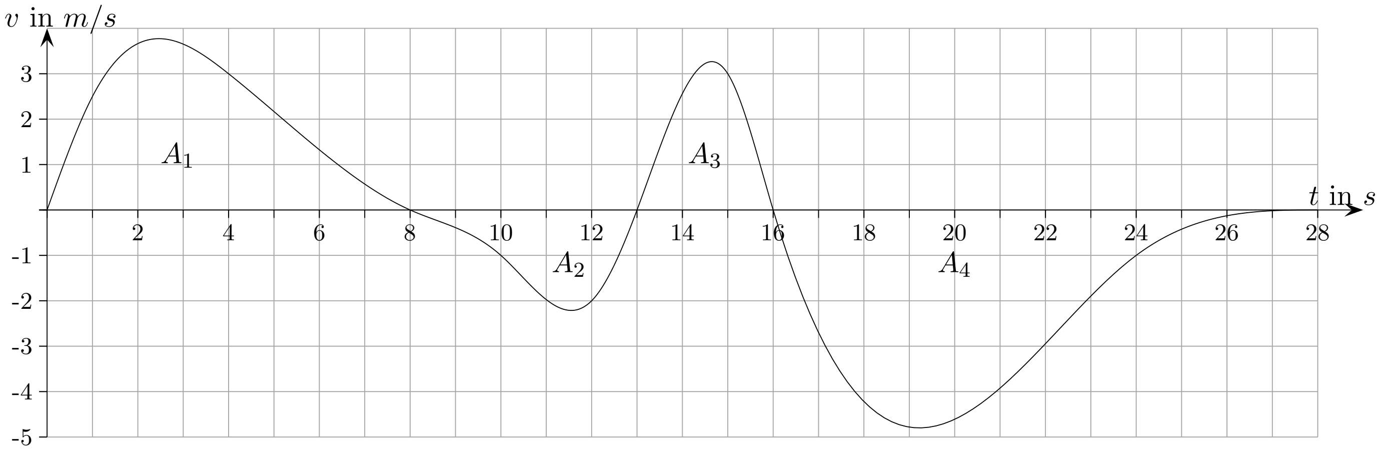
d) Der Hund hat zum Zeitpunkt $t = 16\,s$ eine Grundstücksgrenze erreicht.
Ermitteln Sie die Breite des Grundstücks.

e) Wie weit ist der Hund nach 28 Sekunden rechts oder links von der Mitte des Zauns entfernt?

Benutzt werden darf (in FE):
$A_1 = 17{,}12$
$A_2 = 5{,}62$
$A_3 = 6{,}07$
$A_4 = 26{,}92$

Hunde-Aufgabe Hinweise

Ein Hund rennt im Garten am Zaun hin und her und jagt die Passanten.
Das Diagramm zeigt die Geschwindigkeit v des Hundes, wobei positives v die Bewegung nach rechts, negatives v die Bewegung nach links bedeutet.
Die Geschwindigkeit v wird dabei in Meter pro Sekunde (m/s) gemessen, die Zeit t in Sekunden s.
Der Hund startet zur Zeit $t = 0$ in der Mitte des Zauns.



Beantworten Sie begründet die folgenden Fragen anhand des Graphen
(Zeiten und Bereiche bitte markieren):

a) In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Hund nach rechts bzw. links?

Graph oberhalb der x-Achse: Hund bewegt sich nach rechts.

b) Wann hat er die größte Geschwindigkeit nach rechts bzw. links erreicht?

nach rechts (in s): 2,5; 14,6
nach links (in s): 11,6; 19,2

c) Wann wird der Hund schneller, wann wird er langsamer?

nach rechts schneller: Graph monoton steigend
nach links schneller: Graph monoton fallend

d) Der Hund hat zum Zeitpunkt $t = 16\,s$ eine Grundstücksgrenze erreicht.
Ermitteln Sie die Breite des Grundstücks. 35,17 m

e) Wie weit ist der Hund nach 28 Sekunden rechts oder links von der Mitte des Zauns entfernt?

9,35 m nach links

Benutzt werden darf (in FE):

$A_1 = 17{,}12$

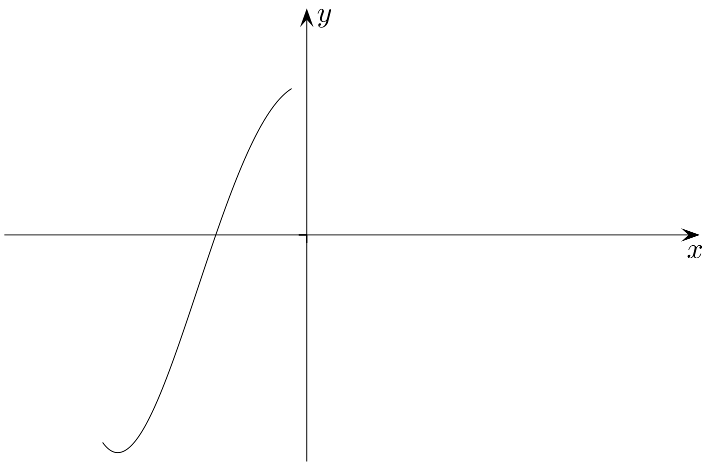
$A_2 = 5{,}62$

$A_3 = 6{,}07$

$A_4 = 26{,}92$

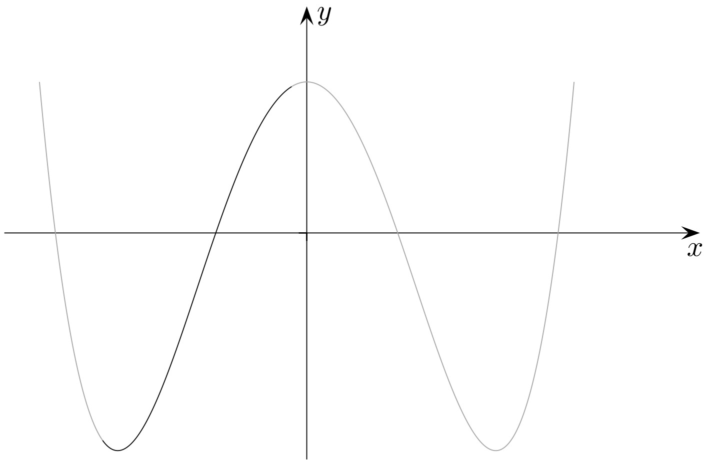
Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - 2k^2x^2 + 1,\ k > 0.$
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f_{k^*}.
Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_{k^*}.
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k keine Nullstellen hat.



Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - 2k^2x^2 + 1,\ k > 0.$
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f_{k^*}.
Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_{k^*}.
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k keine Nullstellen hat.

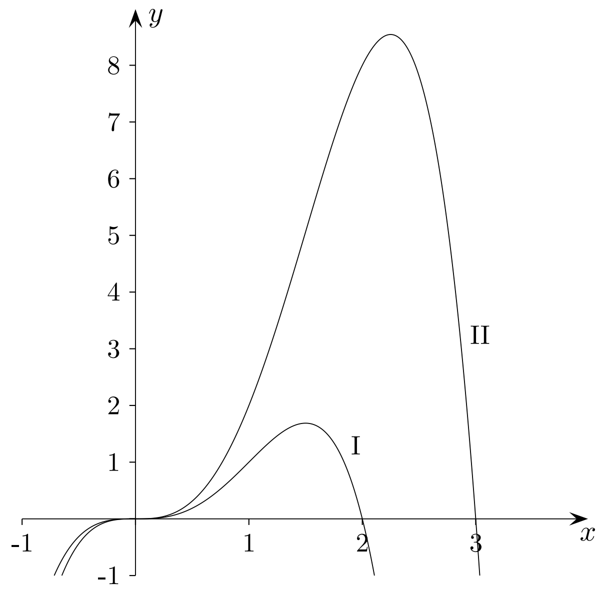


Jede Funktion der Schar ist symmetrisch zur y-Achse.
Also gibt es eine weitere zur y-Achse symmetrisch gelegene Nullstelle für $x > 0$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f_k(x) \to \infty$.
Also wird der Graph die x-Achse für $x < 0$ noch einmal schneiden.
Aus Symmetriegründen existiert dann eine weitere Nullstelle für $x > 0$.
Weitere Nullstellen können nicht existieren, da die Funktionen der Schar den Grad vier haben.

$T_{1/2}\big(\pm k \mid 1 - k^4\big)$, Zwischenergebnis: $f_k''(k) = 8k^2 > 0$
Aus $1 - k^4 > 0$ folgt $k < 1$.

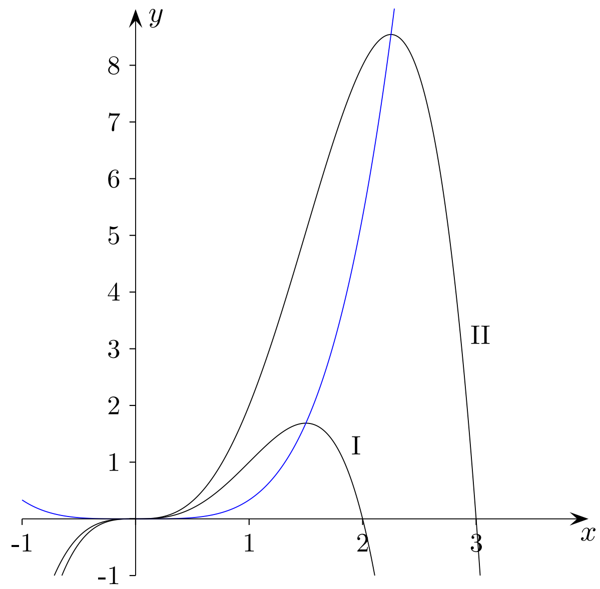
Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = -x^4 + 4kx^3,\ k > 0$.
Ermitteln Sie die Scharparameter der abgebildeten Graphen und die Ortslinie der Hochpunkte.



Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = -x^4 + 4kx^3,\ k > 0$.
Ermitteln Sie die Scharparameter der abgebildeten Graphen und die Ortslinie der Hochpunkte.



I: $k = \frac{1}{2}$

II: $k = \frac{3}{4}$

$HP\left(3k \mid 27k^4\right), \quad y = \frac{1}{3}x^4$

Ohne GTR

1. Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist die Funktion f_a durch $f_a(x) = ax^6 - x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

   a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

   b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
   Bestimmen Sie diesen Wert von a.

2. Welche Terme geben den Inhalt des markierten Flächenstücks A richtig an?

   a) $\left| \int\limits_d^b g(x)\,dx - \int\limits_c^a f(x)\,dx \right|$

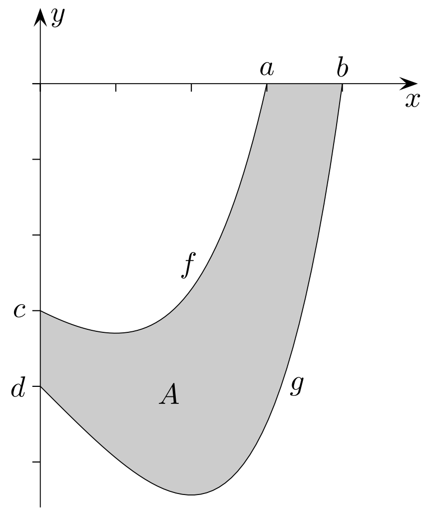
   b) $\left| \int\limits_0^a g(x)\,dx - \int\limits_0^b f(x)\,dx \right|$

   c) $\left| \int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx \right|$

   d) $\int\limits_0^b g(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$

   e) $\int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx$

   f) $\int\limits_0^b \big| f(x) - g(x) \big|\,dx$



3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

   a) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

   b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $P(2 \mid 0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3 \mid 2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie die Gleichung von h an.

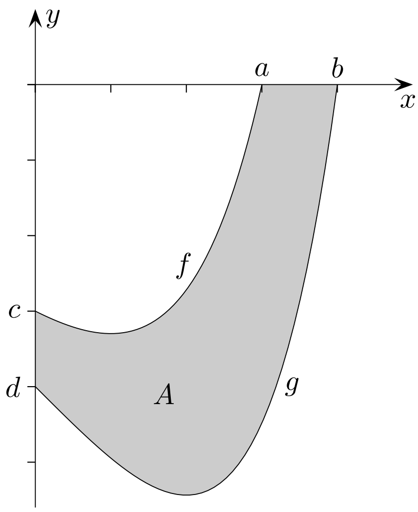
Ohne GTR

1. Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist die Funktion f_a durch
$f_a(x) = ax^6 - x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

   a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat. $a > 0$

   b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
   Bestimmen Sie diesen Wert von a. $a = \frac{2}{3}$

2. Welche Terme geben den Inhalt des markierten Flächenstücks A richtig an?



   a) $\left| \int\limits_d^b g(x)\,dx - \int\limits_c^a f(x)\,dx \right|$

   b) $\left| \int\limits_0^a g(x)\,dx - \int\limits_0^b f(x)\,dx \right|$

   c) $\left| \int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx \right|$ richtig

   d) $\int\limits_0^b g(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$

   e) $\int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx$ richtig

   f) $\int\limits_0^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

   a) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden
   mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt. $W(2 \mid 0)$, W liegt auf der Geraden.

   b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $P(2 \mid 0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3 \mid 2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h.
   Geben Sie die Gleichung von h an. $h(x) = f(x-1) + 2$

   $h(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 4$

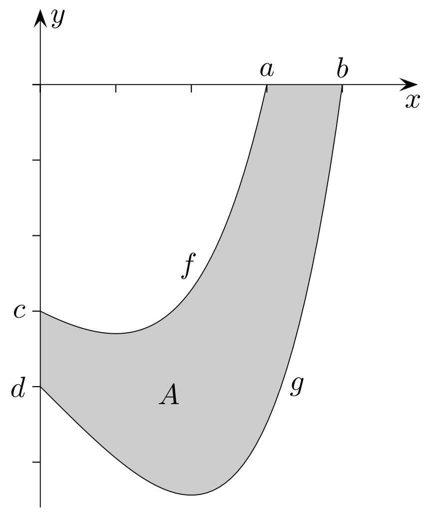
Ohne GTR

1. Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist die Funktion f_a durch
$f_a(x) = ax^6 - x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

   a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat. $a > 0$

   b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
   Bestimmen Sie diesen Wert von a. $a = \frac{2}{3}$

2. Welche Terme geben den Inhalt des markierten Flächenstücks A richtig an?



   a) $\left| \int\limits_d^b g(x)\,dx - \int\limits_c^a f(x)\,dx \right|$

   b) $\left| \int\limits_0^a g(x)\,dx - \int\limits_0^b f(x)\,dx \right|$

   c) $\left| \int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx \right|$ richtig

   d) $\int\limits_0^b g(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$

   e) $\int\limits_0^a f(x)\,dx - \int\limits_0^b g(x)\,dx$ richtig

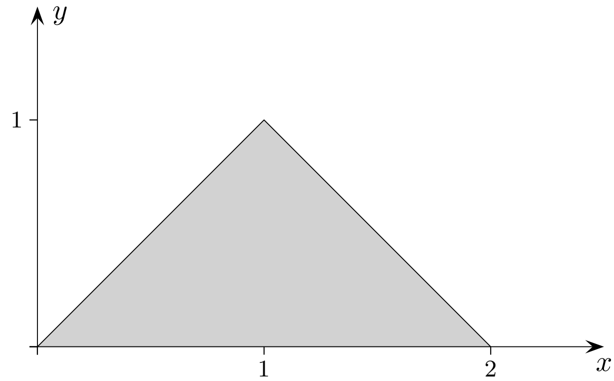
   f) $\int\limits_0^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

   a) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden
   mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt. $W(2 \mid 0)$, W liegt auf der Geraden.

   b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $P(2 \mid 0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3 \mid 2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h.
   Geben Sie die Gleichung von h an. $h(x) = f(x-1) + 2$
   $h(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 4$

Integralfunktion

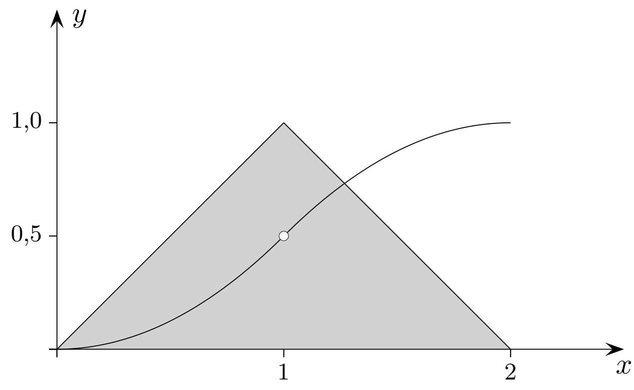


Der Graph einer Funktion f im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ist abgebildet.
Wie lautet die Integralfunktion F mit $F(0) = 0$?

$$F(x) = \begin{cases} ? & 0 \leq x \leq 1 \\ ? & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

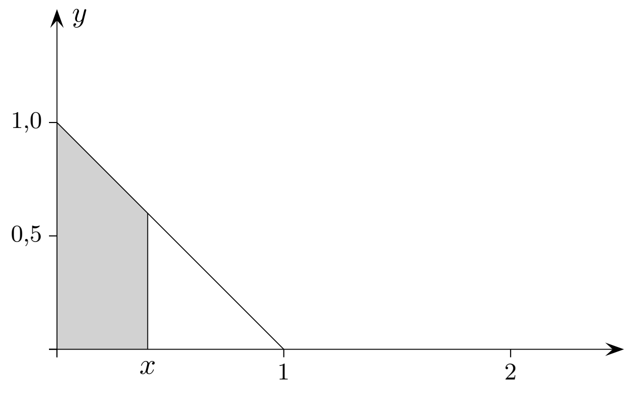
Ist F differenzierbar?

Integralfunktion



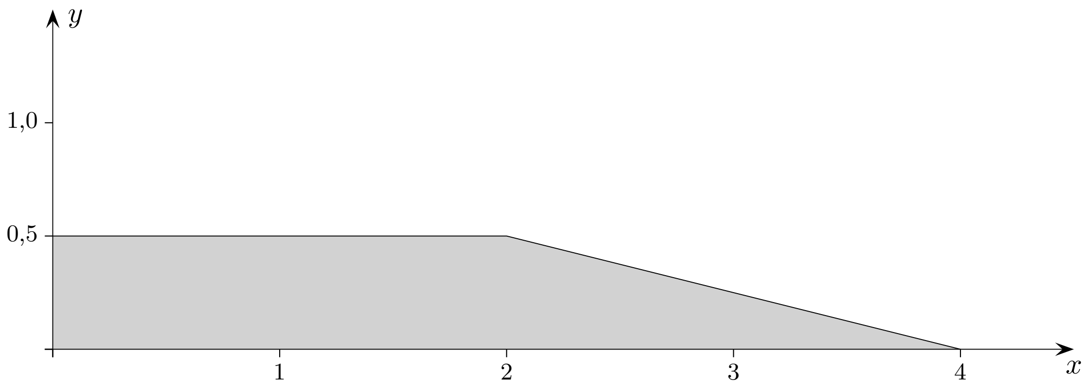
Der Graph einer Funktion f im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ist abgebildet.
Wie lautet die Integralfunktion F mit $F(0) = 0$?

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1) + 0{,}5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Tipp für den Bereich $1 < x \leq 2$:
Ermittle die Integralfunktion (evt. durch Bestimmung des Inhalts eines Tapezes) von $g(x) = -x + 1$ und verschiebe sie.
$F'(1) = 1$, links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen offensichtlich überein.

Integralfunktion

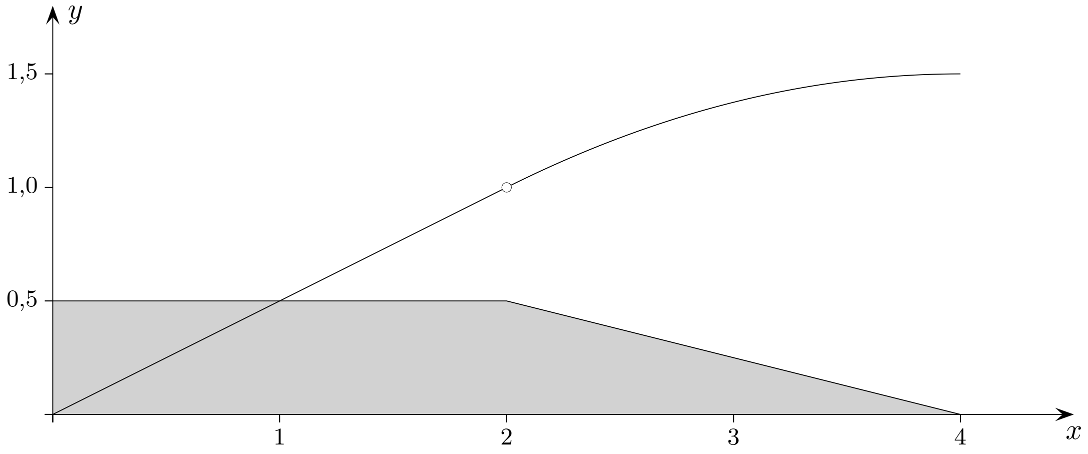


Der Graph einer Funktion f im Bereich $0 \leq x \leq 4$ ist abgebildet.
Wie lautet die Integralfunktion F mit $F(0) = 0$?

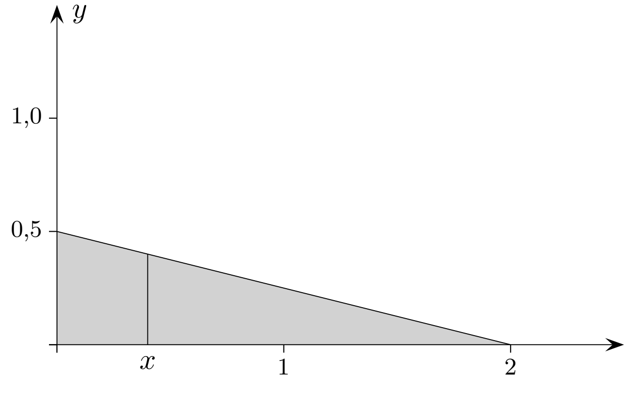
$$F(x) = \begin{cases} ? & 0 \leq x \leq 2 \\ ? & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Aufgabe und der Begründung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung?

Integralfunktion



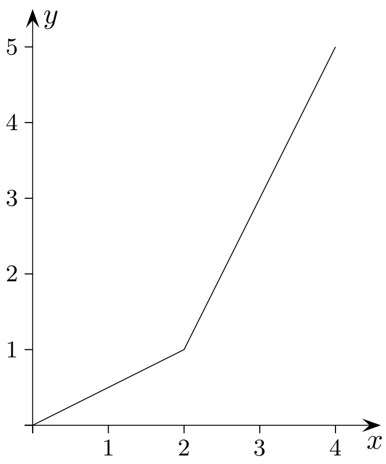
$$F(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2) + 1 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$



Tipp für den Bereich $2 < x \leq 4$:
Ermittle die Integralfunktion (evt. durch Bestimmung des Inhalts eines Tapezes) von $g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ und verschiebe sie.

Eine stetige Funktion kann beliebig genau durch Streckenzüge approximiert werden.

Integralfunktion



Gegeben ist die Funktion

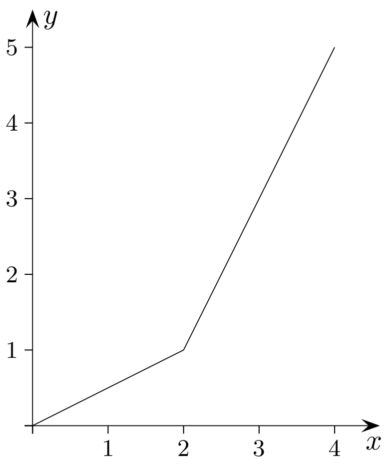
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

Ermittle die Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$

a) mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

b) elementargeometrisch.

Integralfunktion



Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

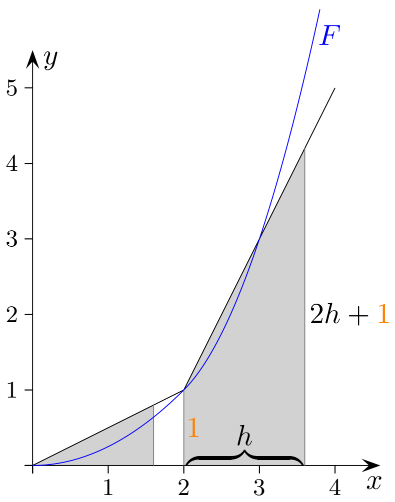
Ermittle die Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$

a) mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 3 & 2 < x \end{cases} \qquad \text{beachte} \quad F(2) = 1$$

b) elementargeometrisch.

$$F(x) = \begin{cases} \text{Dreiecksinhalt} & 0 \leq x \leq 2 \\ \text{Trapezinhalt} + 1 & 2 < x \end{cases}$$



$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x^2$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1 + 2h + 1}{2}h = h + h^2$$

$$= x - 2 + (x-2)^2 = x^2 - 3x + 2 \qquad (h = x - 2)$$

1. Löse nach k auf:

   a) $1 - A(1 - \frac{k}{2}) = 0$ b) $C = 2 - \frac{1}{2}(k-1)$

2. Löse die Gleichungen <u>ohne</u> GTR:

   a) $x^3 - 9x = 0$ b) $x^2 - x = 2$

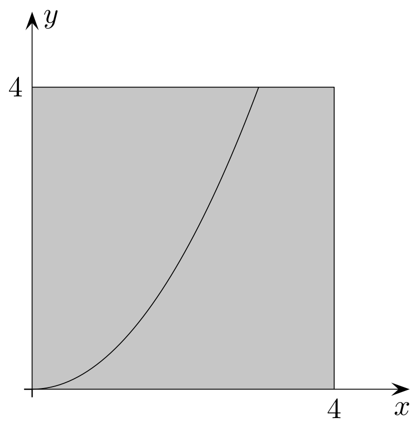
3. Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = -ax(x-a), \quad a > 0$.

   a) Ermittle die Nullstellen der Funktionen f_a.

   b) Bestimme denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt.

4. Berechne $\int_{-k}^{2k} x \cdot (x - 2k)\, dx$.

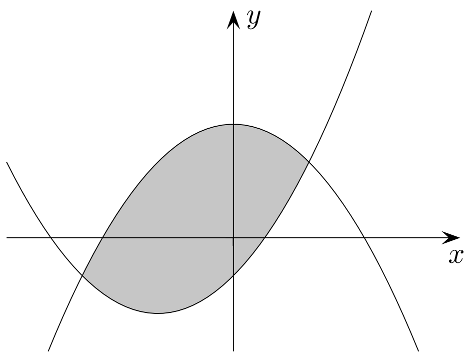
5. Ermittle die Parabel, die das nebenstehende Quadrat in zwei gleichgroße Teilflächen zerlegt.

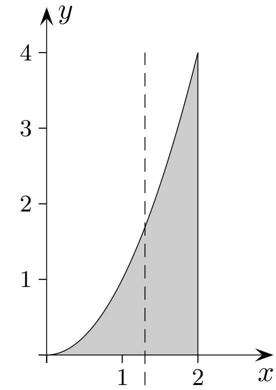


6. Die Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ schließen die Fläche A ein.

   a) Ermittle den Inhalt von A.

   b) Wieviel Prozent von A liegt unterhalb der x-Achse?

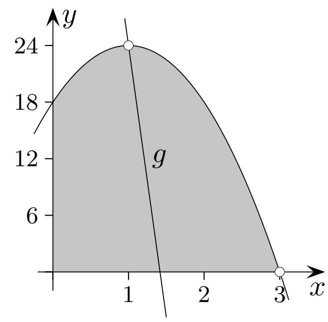




7. Die Parabel $f(x) = x^2$, die Gerade $x = 2$ (Parallele zur <u>y-Achse</u>) und die x-Achse umschließen eine Fläche A. Welche Parallele zur y-Achse halbiert die Fläche A?
   (exakte Lösung <u>ohne</u> GTR verlangt)

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3$.
   Ermittle die Koordinaten (auf 3 Stellen gerundet) des Punktes auf dem Graphen von f, der dem Punkt $A(3 \mid 1)$ am nächsten liegt.

9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -6x^2 + 12x + 18$.
   Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1 \mid 24)$ und $N(3 \mid 0)$ verläuft. Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt die grau gefärbte Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts. Ermittle die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet.
   Tipp: Überlege, ob die Geradengleichung erforderlich ist.



1. Löse nach k auf:

a) $1 - A(1 - \frac{k}{2}) = 0$ b) $C = 2 - \frac{1}{2}(k-1)$

$k = 2 - \frac{2}{A}$ $k = 5 - 2C$

2. Löse die Gleichungen ohne GTR:

a) $x^3 - 9x = 0$ b) $x^2 - x = 2$

$x_1 = 0,\ \ x_{2/3} = \pm 3$ $x_1 = 2,\ \ x_2 = -1$

3. Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = -ax(x-a), \quad a > 0$.

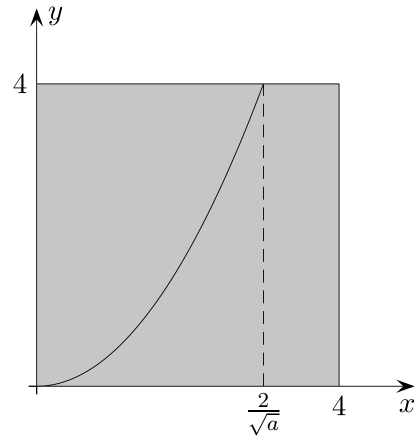
a) Ermittle die Nullstellen der Funktionen f_a. $x_1 = 0,\ \ x_2 = a$

b) Bestimme denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt. $a = 2$

4. Berechne $\int_{-k}^{2k} x \cdot (x - 2k)\ dx$. 0

5. Ermittle die Parabel, die das nebenstehende Quadrat in zwei gleichgroße Teilflächen zerlegt.

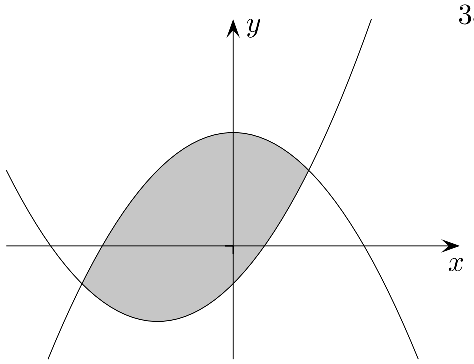
$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}} (4 - ax^2)\,dx = 8 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{4}{9}x^2$$

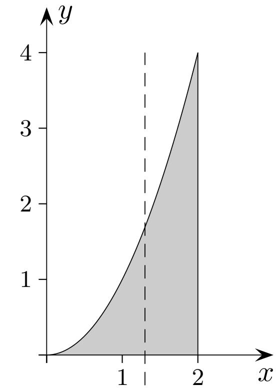


6. Die Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ schließen die Fläche A ein.

a) Ermittle den Inhalt von A. 4,5 *(FE)*

b) Wieviel Prozent von A liegt unterhalb der x-Achse? 38,0 %

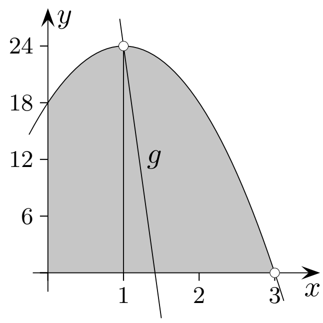




7. Die Parabel $f(x) = x^2$, die Gerade $x = 2$ (Parallele zur <u>y-Achse</u>) und die x-Achse umschließen eine Fläche A. Welche Parallele zur y-Achse halbiert die Fläche A? $x = \sqrt[3]{4}$
(exakte Lösung <u>ohne</u> GTR verlangt)

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3$.
Ermittle die Koordinaten (auf 3 Stellen gerundet) des Punktes auf dem Graphen von f, der dem Punkt $A(3 \mid 1)$ am nächsten liegt. $d(x) = \sqrt{(f(x) - 1)^2 + (3 - x)^2}$
$P(0{,}538 \mid 3{,}289)$

9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -6x^2 + 12x + 18$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1 \mid 24)$ und $N(3 \mid 0)$ verläuft.
Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt die grau gefärbte Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts. Ermittle die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet.
Tipp: Überlege, ob die Geradengleichung erforderlich ist.

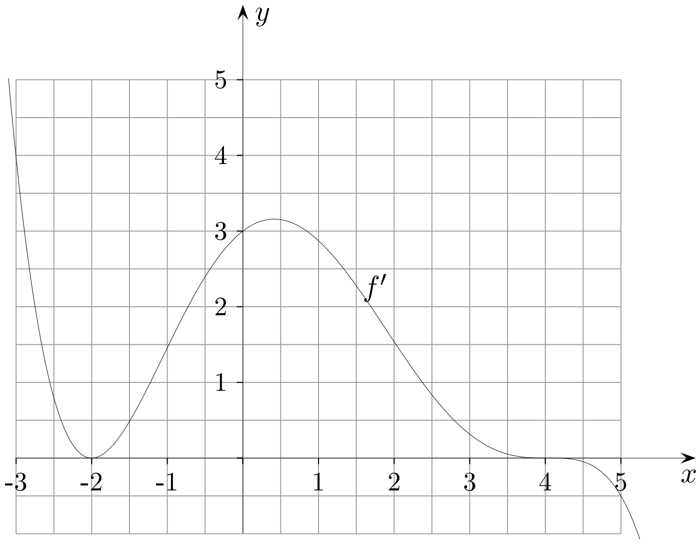


$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{54}{2} - 22 = 5$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{a \cdot 24}{2} = 5 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{5}{12}$$

$$x = 1 + \frac{5}{12}$$

Differentialrechnung



Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

(2) Der Graph von f hat für $-3 \leq x \leq 5$ genau zwei Wendepunkte.

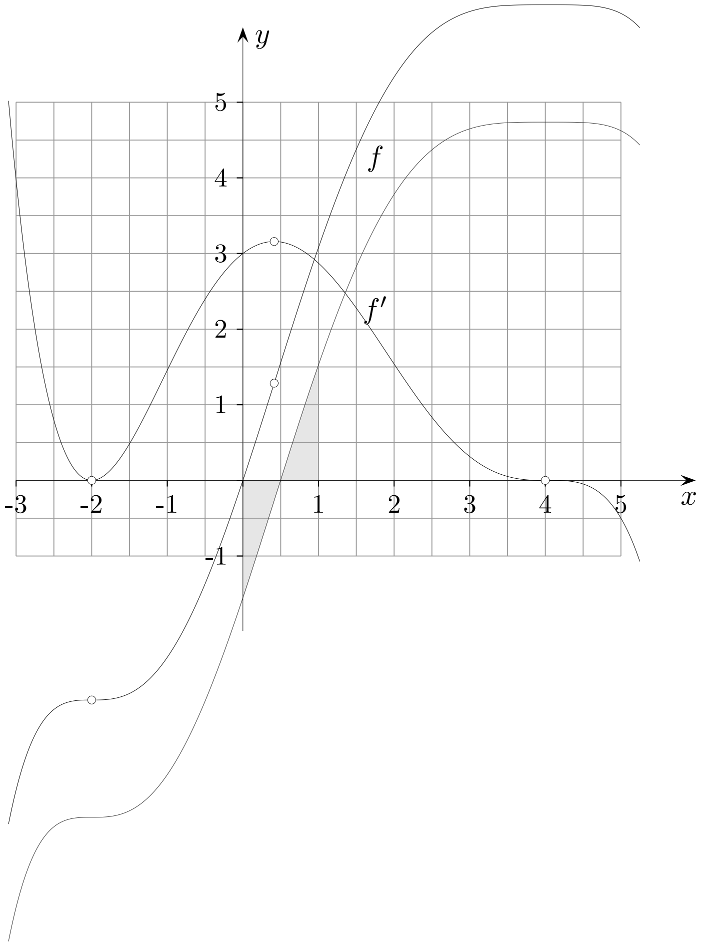
(3) Der Graph von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.

(4) $f(0) > f(4)$

(5) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von f.

(6) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

Differentialrechnung



Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt. falsch, $f'(-2-h) > 0$

(2) Der Graph von f hat für $-3 \leq x \leq 5$ genau zwei Wendepunkte. richtig, f' hat zwei Extrema

(3) Der Graph von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende. richtig, $f'(0) = 3$

(4) $f(0) > f(4)$ falsch, f im Bereich $0 \leq x \leq 4$ monoton steigend

(5) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von f.

(5) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ nicht entscheidbar, f nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Differentialrechnung

1. Untersuchen Sie, ob bei der Funktionenschar

   $$f_k(x) = x^2 - kx, \quad k > 0$$

   die relative Extremstelle in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.

2. Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema der Funktionenschar

   $$f_k(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{2k^2}{x}, \quad k > 0.$$

3. Untersuchen Sie die Funktionenschar

   $$f_k(x) = x^4 - kx^2, \quad k > 0, \qquad \text{auf}$$

   a) Symmetrie

   b) Nullstellen

   c) Extrema

4. Gegeben ist die Funktionenschar

   $$f_k(x) = kx^2 + x - \frac{2}{k}, \quad k \neq 0$$

   a) Bestimmen Sie k so, dass $x = 1$ eine Extremstelle der Funktion ist.

   b) Um welche Art von Extremum handelt es sich?

5. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \leq 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$$

   an der Stelle $x = 1$ differenzierbar ist, d. h. einen knickfreien Übergang besitzt? Ist der Übergang an der Stelle $x = 1$ dann ohne Krümmungsruck?

6. Gegeben ist eine Schar ganzrationaler Funktionen

   $$f_a(x) = ax^4 - 6a^2x^2 + 1, \; x \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$$

   Für bestimmte Werte von a hat der Graph von f_a mehr als einen Extrempunkt. Bestimmen Sie für diesen Fall den Parameter a so, dass die Abstände aller Extrempunkte der Graphen von f_a zur x-Achse gleich sind.

   Untersuchen Sie die Anzahl und die Art der Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_a in Abhängigkeit der von dem Parameter a angenommenen Werte.

Differentialrechnung

1. Untersuchen Sie, ob bei der Funktionenschar
   $$f_k(x) = x^2 - kx, \quad k > 0$$
   die relative Extremstelle in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.

   $x_1 = 0,\ x_2 = k,$ Parabel, Scheitel bei $x_E = \frac{k}{2}$

2. Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema der Funktionenschar
   $$f_k(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{2k^2}{x}, \quad k > 0.$$
   $f_k'(x) = \frac{2x}{k} - \frac{2k^2}{x^2} = 0 \implies x = k, \quad y = 3x$

3. Untersuchen Sie die Funktionenschar
   $$f_k(x) = x^4 - kx^2, \quad k > 0, \qquad \text{auf}$$
   a) Symmetrie — Achsensymmetrie

   b) Nullstellen — $x_1 = 0, \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{k}$

   c) Extrema — $Max\big(0 \mid 0\big), \quad Min_{1/2}\big(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2k} \mid -\frac{1}{4}k^2\big)$

4. Gegeben ist die Funktionenschar
   $$f_k(x) = kx^2 + x - \frac{2}{k}, \quad k \neq 0$$
   a) Bestimmen Sie k so, dass $x = 1$ eine Extremstelle der Funktion ist. — $k = -\frac{1}{2}$

   b) Um welche Art von Extremum handelt es sich? — $f_k''(-\frac{1}{2}) = -1,$ Maximum

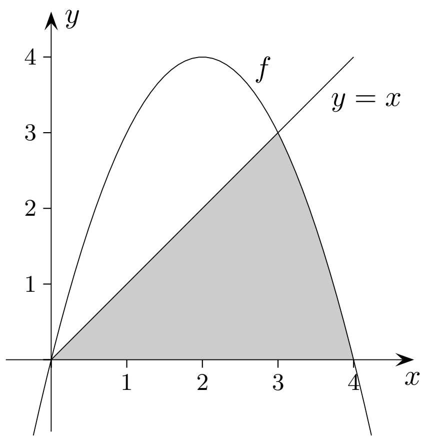
5. Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion
   $$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \leq 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$$
   an der Stelle $x = 1$ differenzierbar ist, d. h. einen knickfreien Übergang besitzt?
   Ist der Übergang an der Stelle $x = 1$ dann ohne Krümmungsruck?

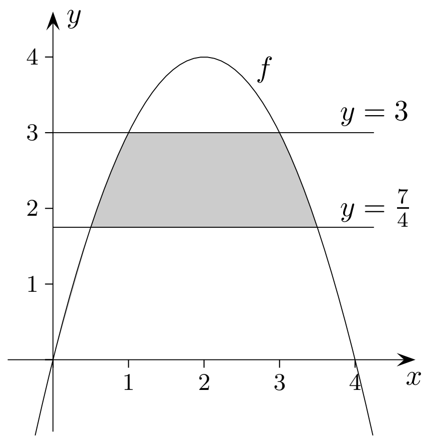
   Stetigkeit muss auch vorliegen.

   $$0 = a + b$$
   $$1 = 2a$$
   $$\implies a = \frac{1}{2} \text{ und } b = -\frac{1}{2}$$
   Der Übergang ist nicht krümmungsruckfrei, $6 \neq 1$.

6. notw. Bed. $f_a'(x) = 4ax(x^2 - 3a) = 0$, mögliche Extrema an den Stellen $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{3a}$, $a > 0$
   $|f_a(x_1)| = |f_a(x_2)|$ (Symmetrie), $1 = |-9a^3 + 1|$, $1 = -9a^3 + 1$ oder $1 = 9a^3 - 1$, $a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$
   Für $a < 0$ liegt genau ein Hochpunkt vor, $f_a''(x) = -12a^2 < 0$,
   für $a > 0$ Hochpunkt und zwei Tiefpunkte (Globalverlauf).

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(4 - x)$.
   Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der markierten Fläche.

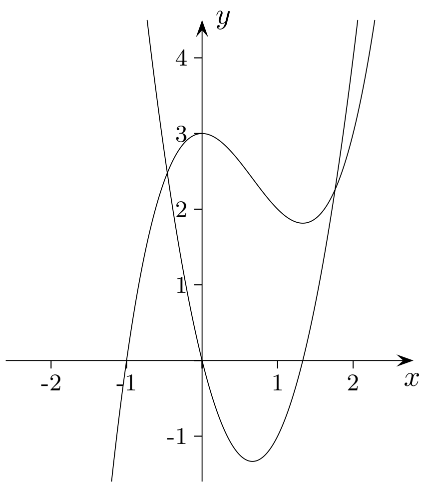
a) 

b) 

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \int\limits_{-1}^{x} (3t^2 - 4t)\, dt$.

   a) Begründen Sie, dass f nur eine Nullstelle hat.

   b) Ermitteln Sie die Extrem- und Wendestellen von f.



1. a) $A = \dfrac{37}{6}$

   b) $A = \dfrac{19}{6}$

2. a) beachte: $\displaystyle\int_{-1}^{0} (3t^2 - 4t)\,dt = 3, \quad \int_{0}^{4/3} (3t^2 - 4t)\,dt = -\frac{32}{27}$

1. Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a;b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat, d. h. die Funktion ist auf $[a;b]$ differenzierbar.
   Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in]a;b[$.

   Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

   a) f besitzt mindestens ein Extremum in $]a;b[$.

   b) f' besitzt mindestens eine Nullstelle in $]a;b[$.

   c) Die Anzahl der Extrema von f für $x \in]a;b[$ muss ungerade sein.

2. Formulieren Sie sinnvolle wahre Aussagen, die in folgender Weise beginnen:
   „Wenn $f'(a) = 0$, dann ... “

3. Gegeben ist eine auf $[a;b]$ differenzierbare Funktion f.
   Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.
   Die mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a;b]$ ist an einer Zwischenstelle gleich der lokalen Änderungsrate.

1. Gegeben ist eine Funktion f, die für jedes $x \in [a; b]$ eine Ableitung $f'(x)$ hat, d. h. die Funktion ist auf $[a; b]$ differenzierbar.
   Es gilt $f(a) = f(b) = 0$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in]a; b[$.

   Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

   a) f besitzt mindestens ein Extremum in $]a; b[$. wahr

   b) f' besitzt mindestens eine Nullstelle in $]a; b[$. wahr

   c) Die Anzahl der Extrema von f für $x \in]a; b[$ muss ungerade sein. wahr

   Maxima und Minima von f können in $]a; b[$ nur im Wechsel auftreten.
   Da $f(a) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > a$ gilt, muss rechts von a zuerst ein Maximum sein, dann (falls es eines gibt) ein Minimum, gefolgt von einem Maximum, usw.
   Die Anzahl der Extrema in $]a; b[$ ist 1 oder 3 oder ..., jedenfalls ungerade.

2. Formulieren Sie sinnvolle wahre Aussagen, die in folgender Weise beginnen:
   „Wenn $f'(a) = 0$, dann ... “

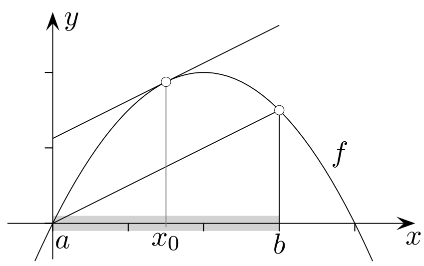
   a) besitzt der Graph von f im Punkt $P(a|f(a))$ eine waagerechte Tangente.

   b) ist der Punkt $P(a|f(a))$ des Graphen von f ein Extrem- oder Sattelpunkt.

   c) hat der Graph von f' in $x = a$ eine Nullstelle.

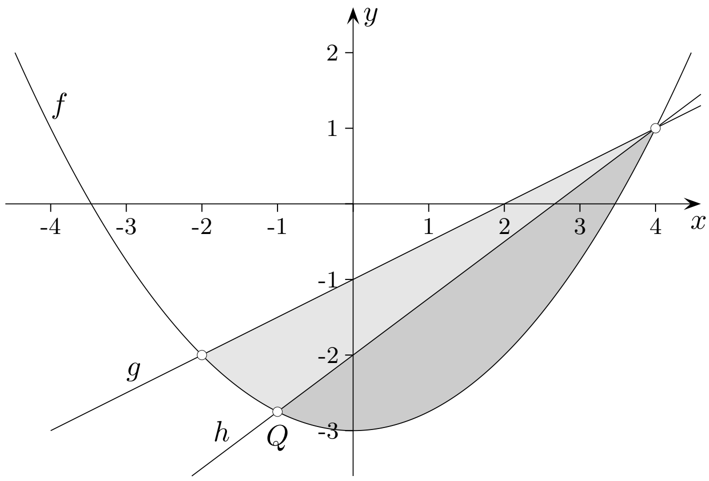
3. Gegeben ist eine auf $[a; b]$ differenzierbare Funktion f.
   Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.
   Die mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a; b]$ ist an einer Zwischenstelle gleich der lokalen Änderungsrate.

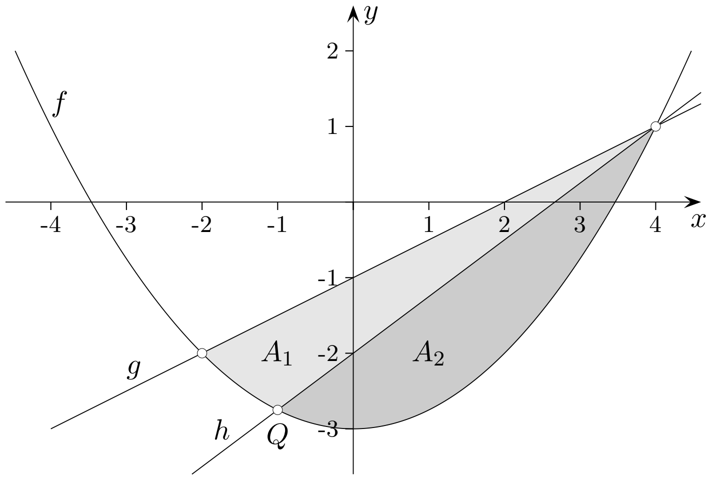
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dies bedeutet, dass die Sekantensteigung an (mindestens) einer Zwischenstelle als Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion auftritt (Mittelwertsatz der Differentialrechnung).

4. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$.
Die Gerade h teilt die Fläche zwischen den beiden Graphen von f und g in zwei Teilflächen.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen,
wenn vorausgesetzt wird, dass die x-Koordinate von Q ganzzahlig ist.





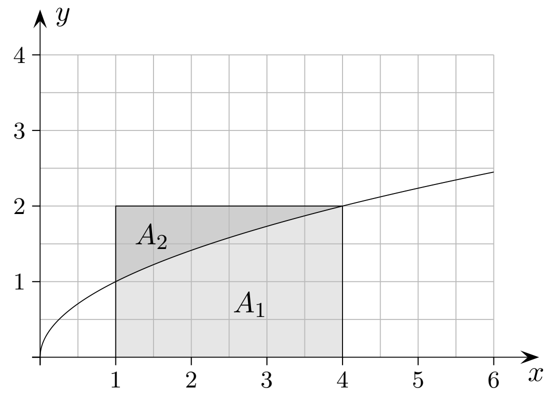
$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{-1}^{4} (g(x) - h(x))\,dx = 3{,}7917$$

$$A_2 = \int_{-1}^{4} (h(x) - f(x))\,dx = 5{,}2083$$

$$A_1 / A_2 = 0{,}728$$

Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1 \mid 0)$, $B(4 \mid 0)$, $C(4 \mid 2)$ und $D(1 \mid 2)$ wird durch den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x},\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ in zwei Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

Das Rechteck $ABCD$ mit $A(1\,|\,0)$, $B(4\,|\,0)$, $C(4\,|\,2)$ und $D(1\,|\,2)$ wird durch den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ in zwei Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.



$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{14}{3} \\ A_2 &= 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3} \\ \frac{A_2}{A_1} &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\text{Verhältnis} \quad A_2 : A_1 = 2 : 7 = 1 : 3{,}5$$

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \sin x$. Es gilt $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 1$.

a) Geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ an.

b) Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass $\int\limits_0^{5\pi} f(x)\, dx = 2$ gilt.

c) Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(x) = 1 + 2\sin x$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = \sin x$. Es gilt $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 1$.

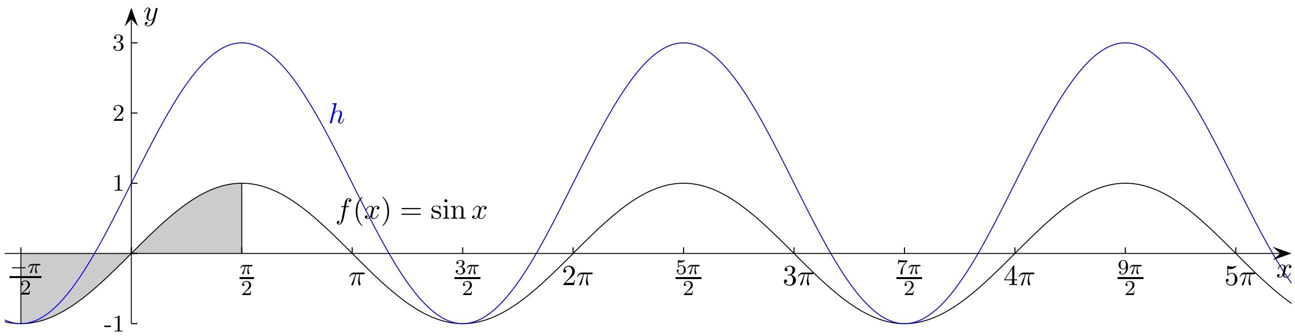
a) Geben Sie den Wert des Integrals $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ an. 0, beachte die Punktsymmetrie

b) Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass $\int\limits_0^{5\pi} f(x)\, dx = 2$ gilt. $1 + 1 + 0 + 0$

c) Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(x) = 1 + 2\sin x$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

Streckung in y-Richtung um den Faktor 2

Verschiebung um 1 Einheit in positive y-Richtung



hilfsmittelfrei, gemischt   Baden-Württemberg 2017

1. Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$.

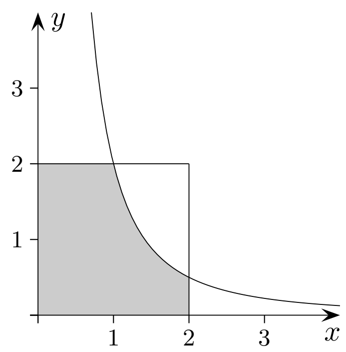
2. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (3 + \cos(x))^4$.

3. Sind folgende Aussagen wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
   (1) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
   (2) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

4. Gegeben sind eine Ebene E, ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S, der nicht in E liegt. Der Punkt S ist die Spitze eines geraden Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft. Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises.
   Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann.

5. In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{x^2}, \quad x > 0$.



   Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

7. Gegeben sind die Ebenen $E\colon\ x_1 + 3x_2 = 6$ und $F\colon\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

   a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

   c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die in E enthalten ist und mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

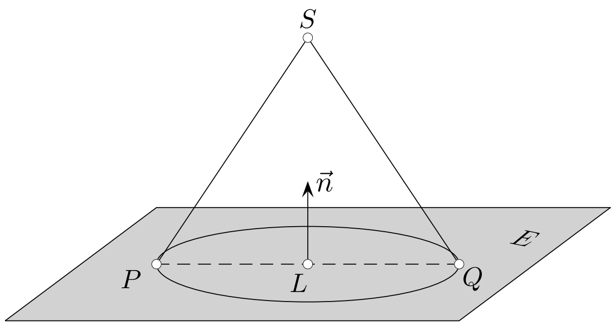
hilfsmittelfrei, gemischt

1. Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$. $\qquad u^2 - 4u - 5 = 0,\ \ u_1 = 5,\ \ u_2 = -1,\ \ x_1 = \frac{1}{2}\ln 5$

2. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (3 + \cos(x))^4$. $\qquad f'(x) = 4(3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$

3. Sind folgende Aussagen wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
   (1) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
   falsch, es kann ein Sattelpunkt vorliegen
   (2) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.
   richtig, f' ist dritten Grades und hat daher mindestens eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

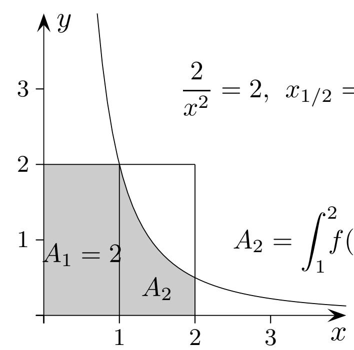
4. Gegeben sind eine Ebene E, ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S, der nicht in E liegt.
   Der Punkt S ist die Spitze eines geraden Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft.
   Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises.
   Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann.



Lotfußpunkt L als Schnitt mit einer Geraden $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \lambda\vec{n}$ ermitteln.
P an L spiegeln, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{PL}$ oder $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}$

5. In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.
   rot r, $P(\text{„höchstens drei Kugeln ziehen“}) = P(\mathrm{r}) + P(\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{r}) + P(\bar{\mathrm{r}}\,\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{r}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{19}{20}$
   alternativ $= 1 - P(\text{„mindestens vier Kugeln ziehen“}) = 1 - P(\bar{\mathrm{r}}\,\bar{\mathrm{r}}\,\bar{\mathrm{r}}) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{x^2},\ \ x > 0$.



$\frac{2}{x^2} = 2,\ \ x_{1/2} = \pm 1,\ \ x_1 = 1\ (x > 0)$

$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^2 = 1$

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. $\qquad A_1 + A_2 = 3\ [FE]$

7. Gegeben sind die Ebenen E: $x_1+3x_2=6$ und F: $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right]=0$

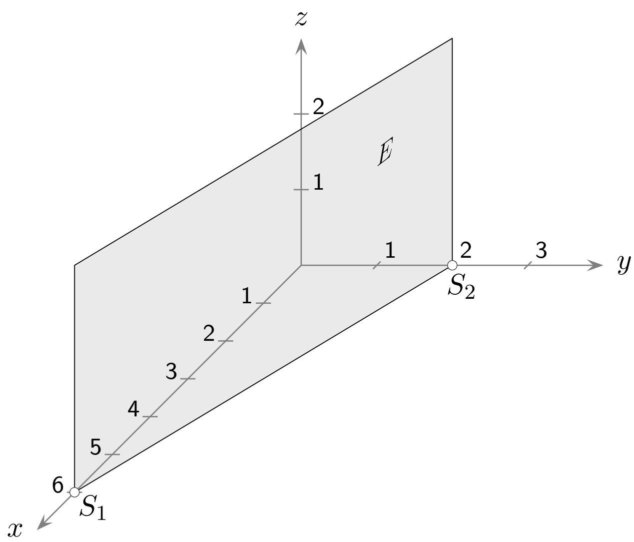
a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die in E enthalten ist und mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

a) Schnittpunkt mit x_1-Achse: $S_1(6\,|\,0\,|\,0)$
Schnittpunkt mit x_2-Achse: $S_2(0\,|\,2\,|\,0)$

Die Ebene schneidet die x_3-Achse nicht (da in der Koordinatengleichung die Variable x_3 nicht auftaucht). Die Ebene E ist daher parallel zur x_3-Achse.



b) Koordinatengleichung von F: $2x_1 - x_3 = 1$

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\11\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$$

c) Die gesuchte Gerade h ist eine Gerade, die parallel zur Schnittgeraden verläuft und einen Punkt enthält, der zwar auf E liegt, aber nicht auf F.
Solch ein Punkt wäre beispielsweise $A(6\,|\,0\,|\,0)$.

Eine mögliche Gerade wäre h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

hilfsmittelfrei, gemischt

1. a) Geben Sie je eine reelle Zahl für die Parameter a, b und c an, so dass die Funktionen F_a, G_b und H_c Stammfunktionen der Funktionen f, g und h sind.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x - 1 & F_a(x) &= 0{,}5x^4 + ax^2 - x + 3 \\ g(x) &= \sqrt{x-4} & G_b(x) &= \frac{2}{b}(x-4)^{\frac{3}{2}} \\ h(x) &= 4e^{-2x+1} + e & H_c(x) &= ce^{-2x+1} + ex - e \end{aligned}$$

   b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f, deren Graph die y-Achse im Punkt $S_y(0 \mid -1)$ schneidet.

2. Gegeben ist eine Funktion $f(x) = e^{x^2}$. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

3. Gegeben ist eine Funktion $f(x) = -(x-2)^2 + 4,\ x \in \mathbb{R}$.
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

4. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ hat im Punkt $P(3 \mid 2)$ den Anstieg $m = 1$.
Berechnen Sie die Werte für die Parameter b und c.

5. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) = x^4 + 5x^2,\ x \in \mathbb{R}$, keinen Wendepunkt besitzt.

6. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(-3 \mid 1 \mid 4)$, $C(2 \mid -4 \mid 4)$ und $D(5 \mid -5 \mid 0)$.
   a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.
   b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

7. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{1}{a}e^{ax},\ x \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1$.
Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt.

hilfsmittelfrei, gemischt

1. a) Geben Sie je eine reelle Zahl für die Parameter a, b und c an, so dass die Funktionen F_a, G_b und H_c Stammfunktionen der Funktionen f, g und h sind.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = 2x^3 + 4x - 1 & F_a(x) = 0{,}5x^4 + ax^2 - x + 3 & a = 2 \\
g(x) = \sqrt{x-4} & G_b(x) = \frac{2}{b}(x-4)^{\frac{3}{2}} & b = 3 \\
h(x) = 4e^{-2x+1} + e & H_c(x) = ce^{-2x+1} + ex - e & c = -2
\end{array}
$$

   b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f, deren Graph die y-Achse im Punkt $S_y(0 \mid -1)$ schneidet. $F_a(x) = 0{,}5x^4 + ax^2 - x - 1$

2. Gegeben ist eine Funktion $f(x) = e^{x^2}$. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. $t(x) = 2ex - e$

3. Gegeben ist eine Funktion $f(x) = -(x-2)^2 + 4,\ x \in \mathbb{R}$.
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen an und begründen Sie Ihre Entscheidung. $S(2 \mid 4)$
Die Parabel ist nach unten geöffnet.

4. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ hat im Punkt $P(3 \mid 2)$ den Anstieg $m = 1$.
Berechnen Sie die Werte für die Parameter b und c. $b = -5,\ c = 8$

5. Begründen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) = x^4 + 5x^2,\ x \in \mathbb{R}$, keinen Wendepunkt besitzt.
$f''(x) = 12x^2 + 10$ hat keine Nullstelle.

6. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(-3 \mid 1 \mid 4)$, $C(2 \mid -4 \mid 4)$ und $D(5 \mid -5 \mid 0)$.

   a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -20 \neq 0$$

   b) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$M(1 \mid -2 \mid 2),\ r = 3$$

7. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{1}{a}e^{ax},\ x \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1$.
Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt.

   Mit $f_a'(x) = \frac{1}{a}e^{ax} \cdot a = e^{ax}$ lautet die Bedingung für den vertikalen Abstand $f_a(0) - f_a'(0) \geq 3$.
   Da wegen $0 < a < 1$ $f_a'(0) < f_a(0)$ gilt, sind Beträge überflüssig.
   Die Ungleichung und der Bereich für a liefern die Lösung $a \leq \frac{1}{4}$.
   Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

Ermittle die Stelle $a \neq 0$, an der für die Funktion f die Bedingung $\frac{f(a)}{a} = -f'(a)$ erfüllt ist, und veranschauliche sie mit einer Skizze, $k > 0$.

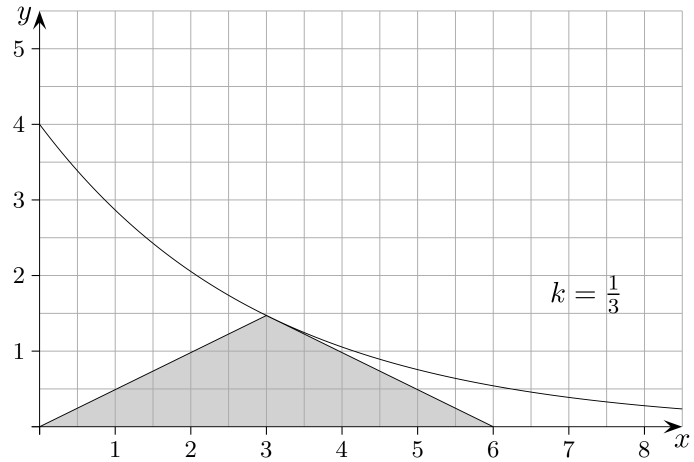
a) $f(x) = 4e^{-kx}$

b) $f(x) = -\frac{1}{k}x^2 + 4$

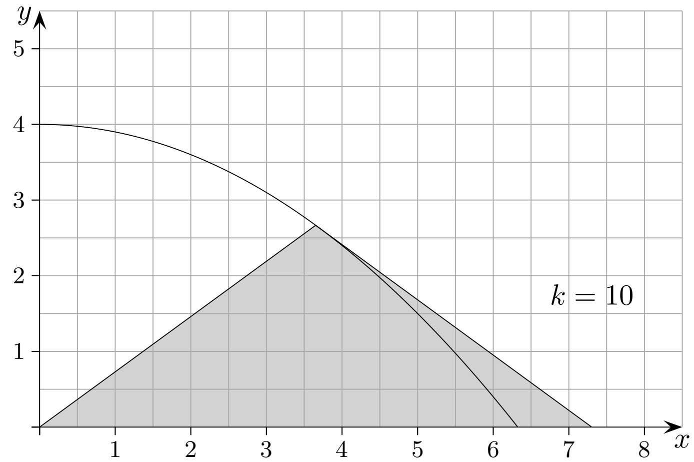
c) $f(x) = -kx^2 + x$

Ermittle die Stelle $a \neq 0$, an der für die Funktion f die Bedingung $\dfrac{f(a)}{a} = -f'(a)$ erfüllt ist, und veranschauliche sie mit einer Skizze, $k > 0$.

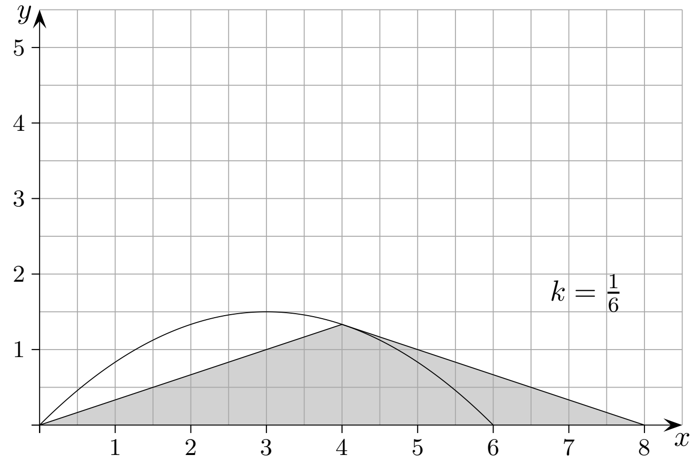
a) $f(x) = 4e^{-kx}, \qquad a = \frac{1}{k}$



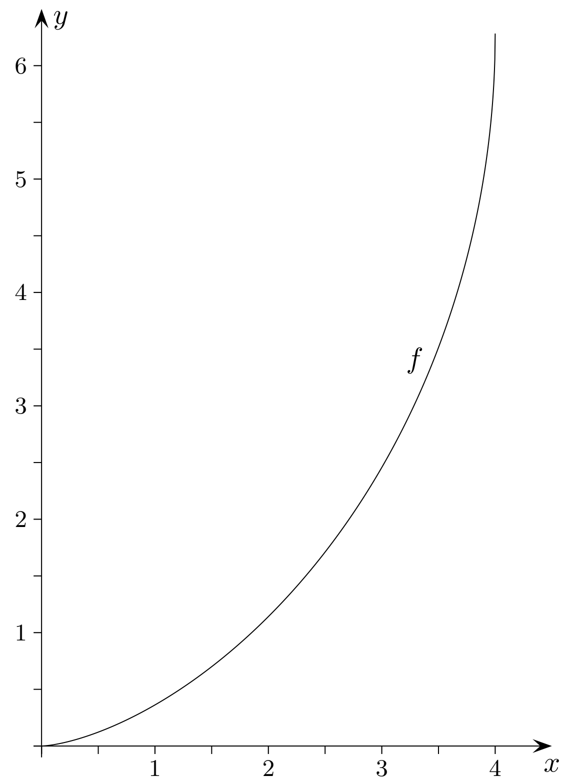
b) $f(x) = -\dfrac{1}{k}x^2 + 4, \qquad a = 2\sqrt{\frac{k}{3}}$



c) $f(x) = -kx^2 + x, \qquad a = \frac{2}{3k}$



Graphisches Differenzieren und Integrieren



Ermittle mit Bleistift, Lineal und GTR möglichst genau die Graphen

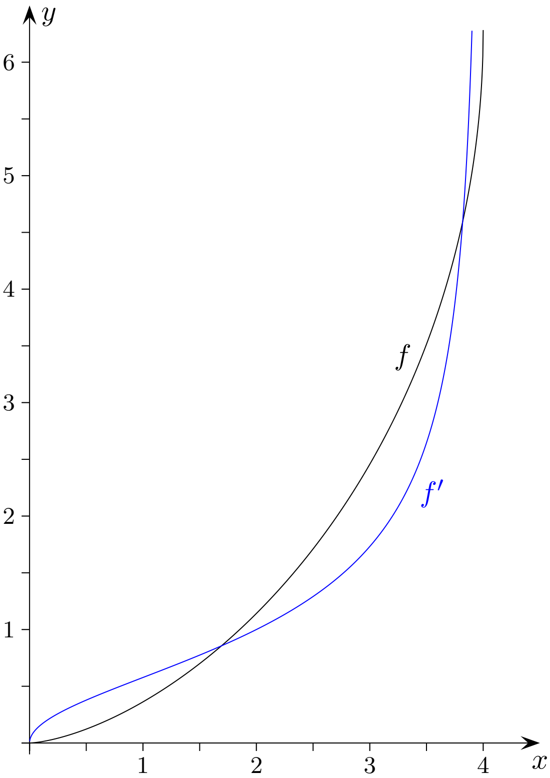
a) der 1. Ableitung

b) der Stammfunktion mit $F(0) = 0$.

$f(x) = 2\pi - 2\arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \sqrt{x(4-x)}$

Der Graph zeigt eine halbe Zykloide. Diese Kurve wird durch einen Punkt auf einem Kreis beschrieben, der auf einer Geraden abrollt, hier ist es die y-Achse. Zykloiden sind Lösungsfunktionen des Brachistochronen-Problems (brachistos kürzeste, chronos Zeit, Johann Bernoulli 1696), bei dem eine Kurve kürzester Fallzeit gesucht ist, die zwei gegebene Punkte verbindet.

Graphisches Differenzieren und Integrieren

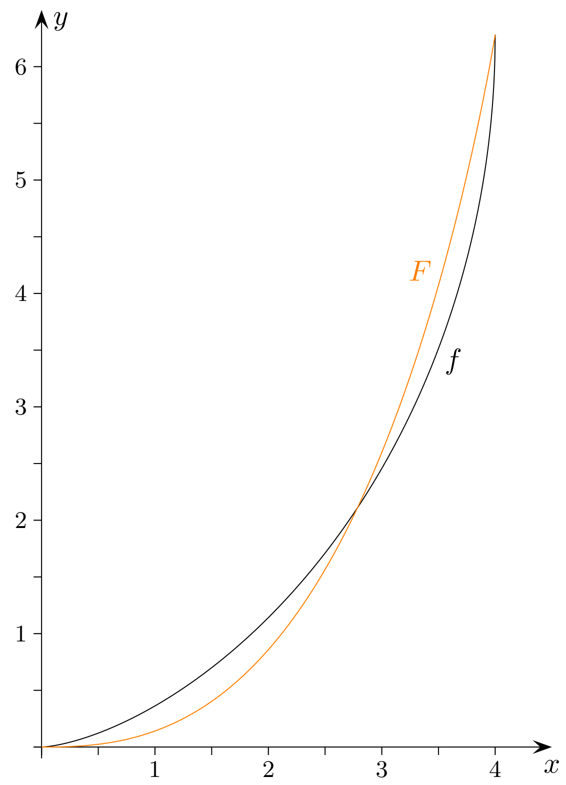


Ermittle mit Bleistift, Lineal und GTR möglichst genau die Graphen

a) der 1. Ableitung

b) der Stammfunktion mit $F(0) = 0$.

Graphisches Differenzieren und Integrieren



Ermittle mit Bleistift, Lineal und GTR möglichst genau die Graphen

a) der 1. Ableitung

b) der Stammfunktion mit $F(0) = 0$.