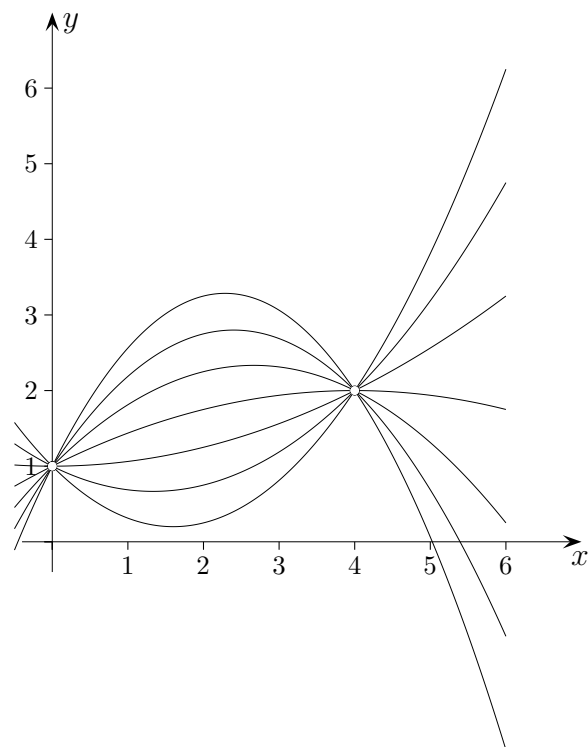
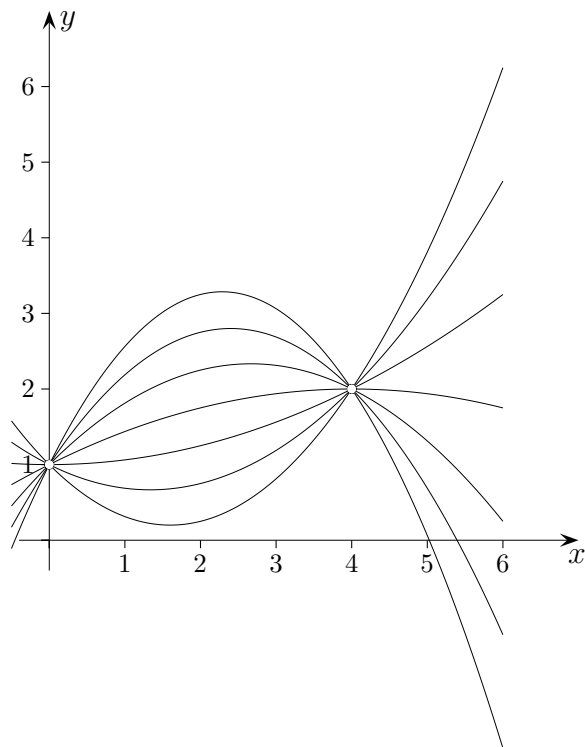


Bestimmung einer ganzrationalen Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 2. Grades, deren Graphen durch $A(0 | 1)$ und $B(4 | 2)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Funktionschar

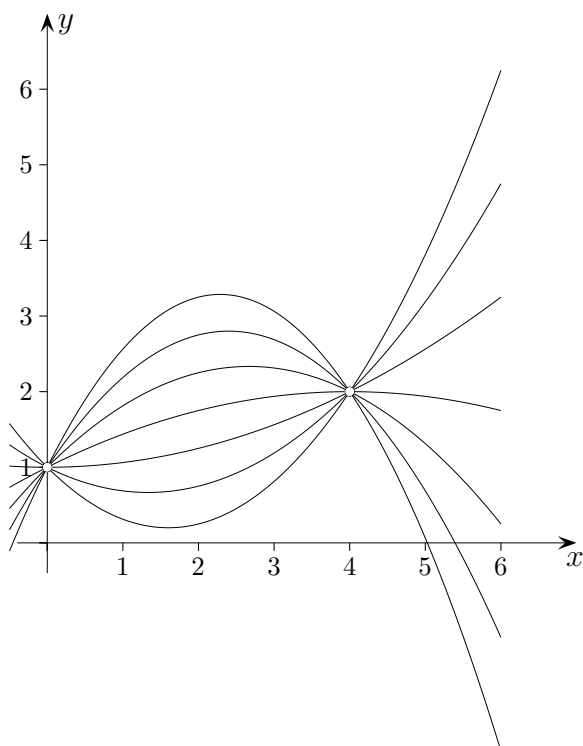


Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 2. Grades, deren Graphen durch $A(0 | 1)$ und $B(4 | 2)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Der Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ wäre falsch.
 a hat in der Aufgabe eine andere Bedeutung.

$$f_a(x) = \left(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{16}\right)x^2 + ax + 1$$

Gemeinsame Punkte (der Graphen) einer Funktionenschar



Gegeben sei (umgekehrt) die Funktionenschar $f_a(x) = (-\frac{1}{4}a + \frac{1}{16})x^2 + ax + 1$.
An welchen Stellen liegen gleiche Funktionswerte vor?

Die Stellen gemeinsamer Punkte können durch Lösen der Gleichung

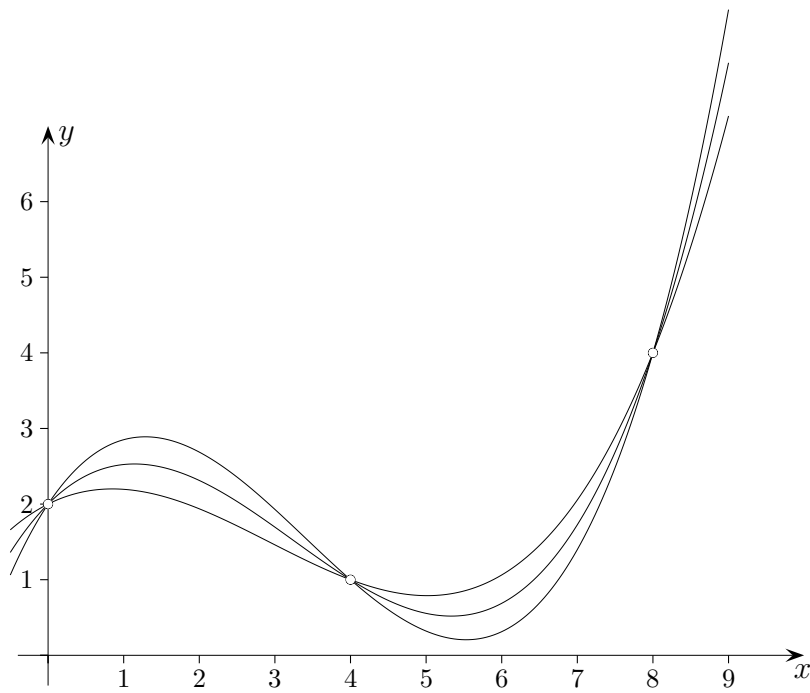
$$-\frac{1}{4}ax^2 + ax = 0$$

ermittelt werden.

Für diese x -Werte fällt a heraus, die Funktionswerte sind daher von a unabhängig.

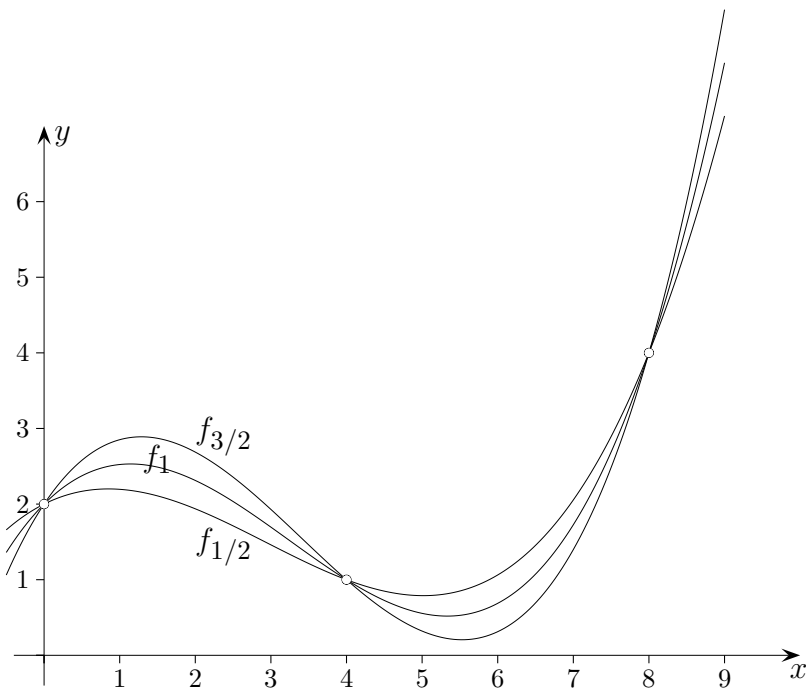
$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 3. Grades, deren Graphen durch $A(0 | 2)$, $B(4 | 1)$ und $C(8 | 4)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_a ganzrationaler Funktionen 3. Grades, deren Graphen durch $A(0 | 2)$, $B(4 | 1)$ und $C(8 | 4)$ verlaufen und in A die Steigung a haben.

$$f_a(x) = \left(\frac{1}{32}a + \frac{3}{128}\right)x^3 - \left(\frac{3}{8}a + \frac{5}{32}\right)x^2 + ax + 2$$

Wäre die Funktionenschar f_a gegeben, könnten die Stellen gemeinsamer Punkte durch Lösen der Gleichung

$$\frac{1}{32}ax^3 - \frac{3}{8}ax^2 + ax = 0$$

gefunden werden.

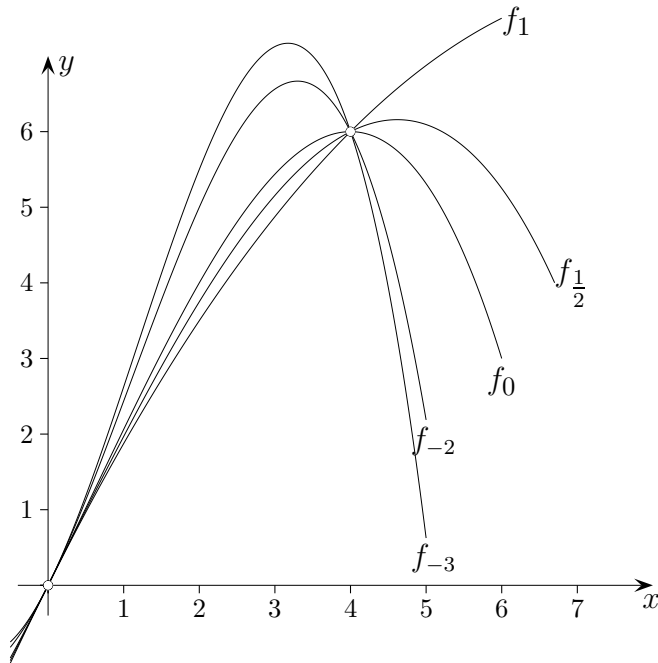
Für diese x -Werte fällt a heraus, die Funktionswerte sind daher von a unabhängig.

Funktionenschar

Gesucht ist eine Schar f_m ganzrationaler Funktionen, deren Graphen durch $A(4 | 6)$ verlaufen, in A die Steigung m haben und deren Tangente im Ursprung $y = 2x$ lautet.

Für welches m beträgt der Inhalt unter dem Graphen von f_m in den Grenzen von 0 bis 4 14 FE ?

Funktionenschar



Gesucht ist eine Schar f_m ganzrationaler Funktionen, deren Graphen durch $A(4 | 6)$ verlaufen, in A die Steigung m haben und deren Tangente im Ursprung $y = 2x$ lautet.

Für welches m beträgt der Inhalt unter dem Graphen von f_m in den Grenzen von 0 bis 4 14 FE ?

$$f_m(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

- Zwischenergebnis:
1. $c = 2$
 2. $32a + 8b = -1$
 3. $48a + 8b = m - 2$

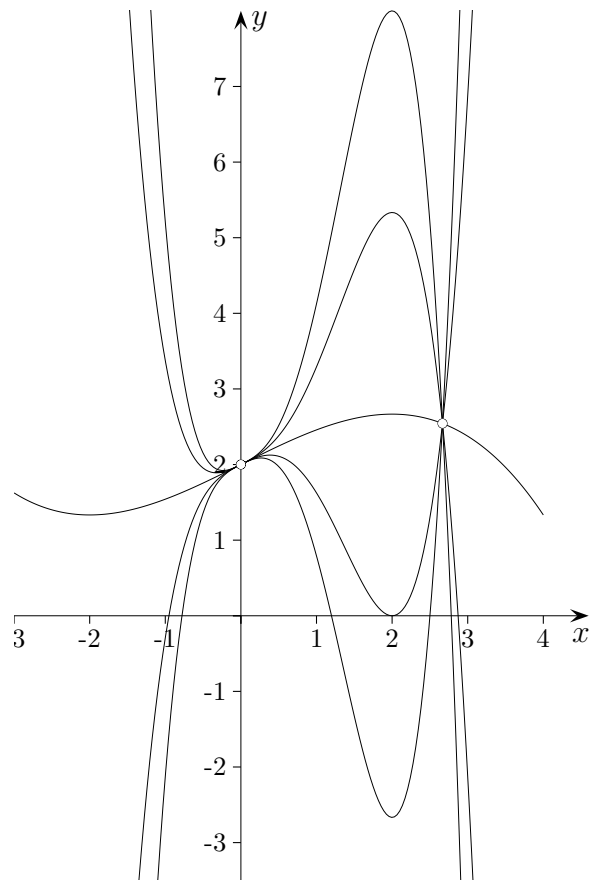
$$f_m(x) = \frac{1}{16}(m-1)x^3 + \frac{1}{8}(-2m+1)x^2 + 2x$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Ergänzung

Zeige, dass die Funktionenschar f_m mit der Schar $g_a(x) = ax^3 + (-4a - \frac{1}{8})x^2 + 2x$ übereinstimmt.

Funktionschar



Gesucht ist eine Schar $f_a(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$ ganzrationaler Funktionen, deren Graphen im Wendepunkt $A(0 | 2)$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$ haben und an der Stelle $x = 2$ eine waagerechte Tangente.

Es sind die Graphen von f_{-1} , $f_{-0,5}$, f_0 , $f_{0,5}$ und f_1 dargestellt.

Ordne die Graphen zu.

Weise nach, dass alle Graphen an der Stelle $x = \frac{8}{3}$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Bedingungen

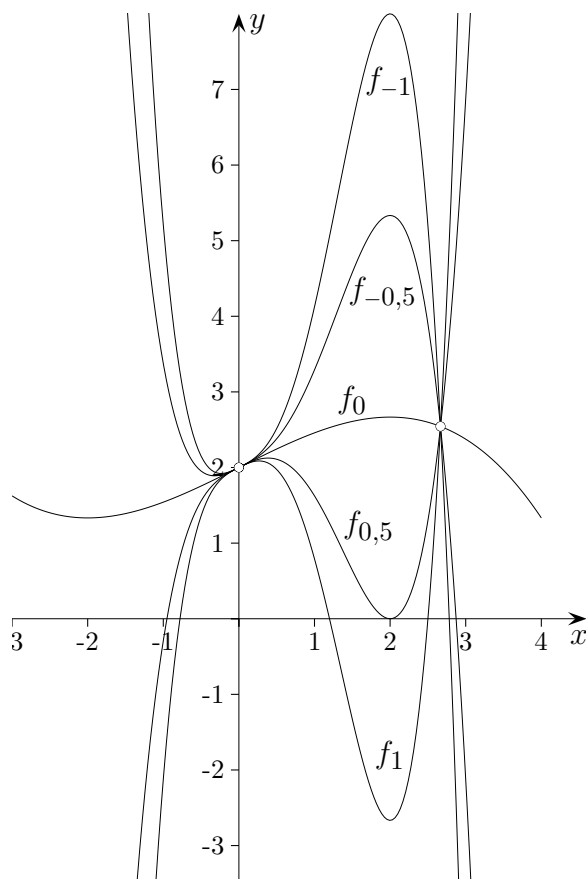
1. $f(0) = 2$
2. $f''(0) = 0$
3. $f'(0) = \frac{1}{2}$
4. $f'(2) = 0$

führen zum Gleichungssystem:

1. $d = 2$
2. $0 = 0$
3. $c = \frac{1}{2}$
4. $32a + 12b + c = 0$

und der Lösungsfunktion: $f_a(x) = ax^4 - \left(\frac{8}{3}a + \frac{1}{24}\right)x^3 + \frac{1}{2}x + 2$

Beachte für die Zuordnung: $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^4 - \dots) = \pm\infty$, für $a > 0$ gilt \dots , für $a < 0$ \dots

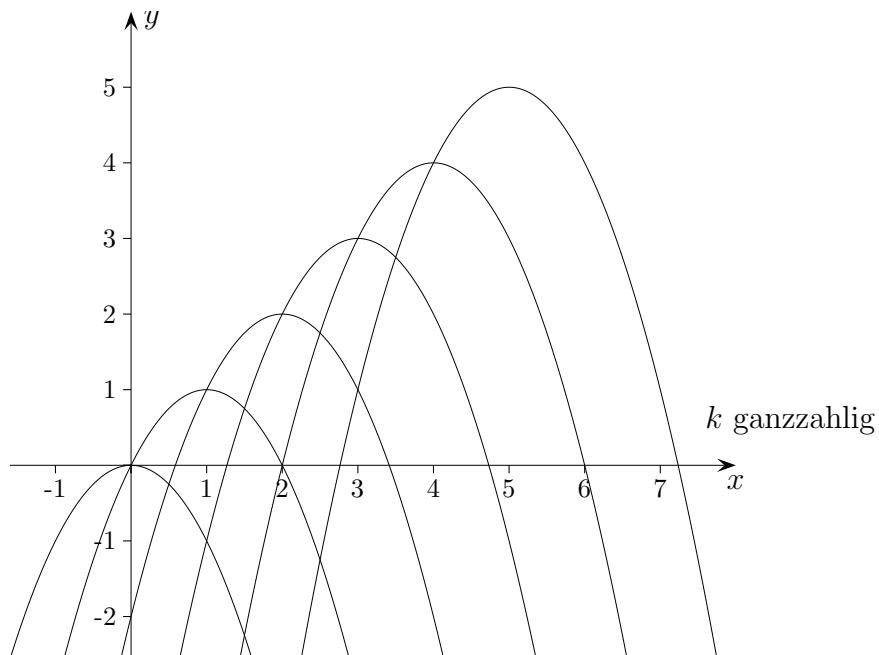


Dass an der Stelle $x = \frac{8}{3}$ ein gemeinsamer Punkt vorliegt, ist unmittelbar zu sehen:
Für diesen x -Wert fällt a heraus, der Funktionswert ist daher von a unabhängig.

$$ax^4 = \frac{8}{3}ax^3 \quad \implies \quad x = \frac{8}{3}$$

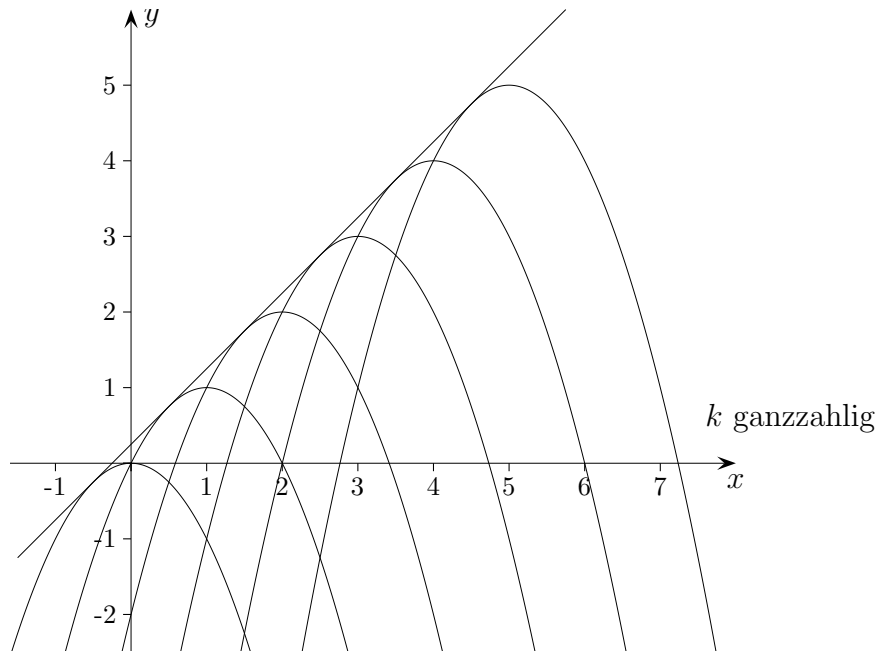
Gemeinsame Tangente

Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = -(x - k)^2 + k$ eine gemeinsame Tangente besitzt.



Gemeinsame Tangente

Zeige, dass die Funktionenschar $f_k(x) = -(x - k)^2 + k$ eine gemeinsame Tangente besitzt.



Mehrere Vorgehensweisen sind möglich.

- a) Die Parabelscheitel $S(k | k)$ sind unmittelbar aus der Scheitelform zu erkennen, so dass die Vermutung $m = 1$ naheliegt. Weiter kann untersucht werden, an welcher Stelle $f_0(x) = -x^2$ die Steigung $m = 1$ hat. Die zugehörige Tangente $y = x + \frac{1}{4}$ erweist sich als gemeinsame Tangente.
- b) Für f_k lautet die Gleichung der Tangente an der Stelle a : $t_k(x) = \underbrace{(2k - 2a)}_{C_1} x + \underbrace{a^2 - k^2 + k}_{C_2}$
- Für eine gemeinsame Tangente müssen C_1 und C_2 von k unabhängig sein. Dies führt zu (Einsetzen und Koeffizientenvergleich) $C_1 = 1$ und $C_2 = \frac{1}{4}$.
- c) Die gemeinsame Tangente ist Einhüllende der Parabelschar. Für die Berechnung der Hüllfunktion wird die Ableitung nach k von $f(k) = -(x - k)^2 + k$ gleich null gesetzt, $f(k)$ ist eine Funktion mit der Variablen k , die Stelle x wird als konstant (Parameter) betrachtet. Das Ergebnis $k = x + \frac{1}{2}$ wird in $f_k(x)$ eingesetzt. Für $h(x) = x + \frac{1}{4}$ ist abschließend die Berührbeziehung zu überprüfen.
Die Berechnung von Hüllfunktionen wird in Ni nicht verlangt.