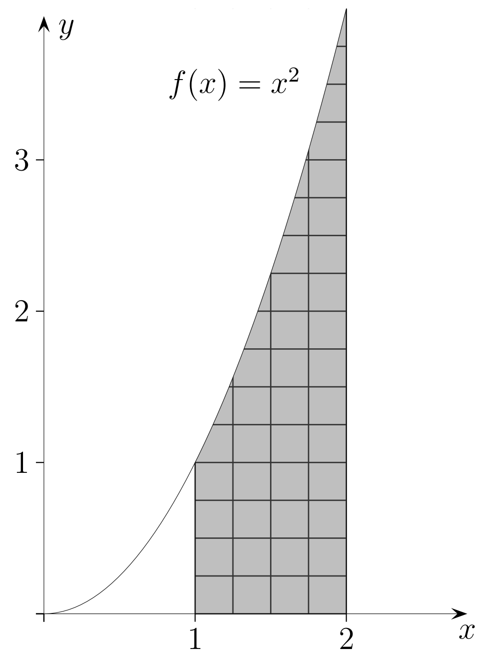
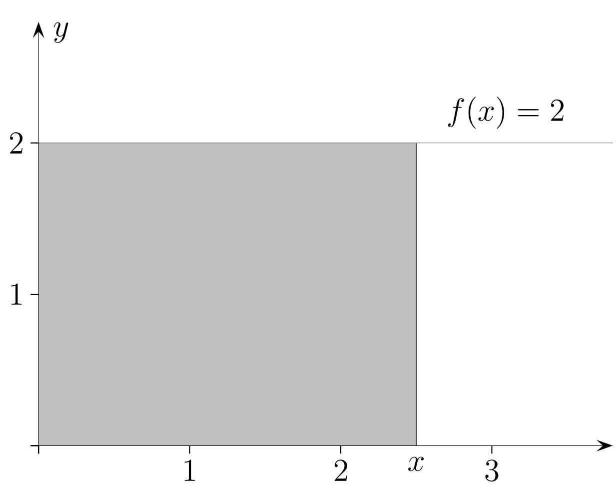
Integralrechnung

Mit der Integralrechnung können Flächen unterhalb eines Graphen in festgelegten Grenzen, hier 1 und 2, exakt berechnet werden.



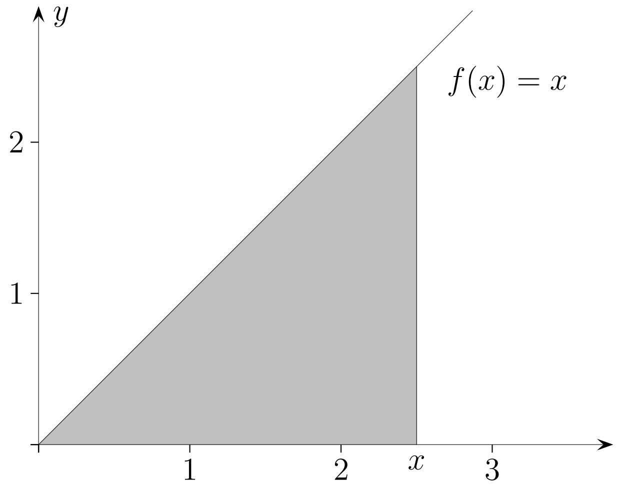
Wir betrachten zunächst Flächeninhalte, die elementar berechnet werden können.
Sei $A(x)$ der Flächeninhalt unterhalb des Graphen in den Grenzen von 0 bis x.
Ermittle $A(1)$, $A(2)$, $A(x)$. Was fällt dir auf?

a)

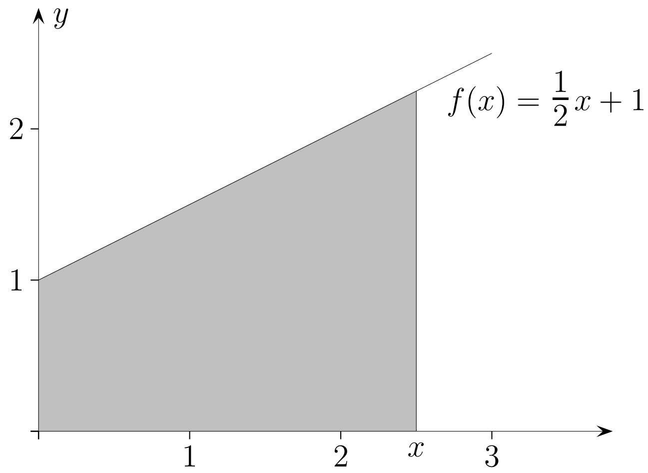


Integralrechnung

b)



c)



Integralrechnung

$f(x) = 2$	$A(x) = 2x$
$f(x) = x$	$A(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	$A(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

Die Vermutung, dass stets $A'(x) = f(x)$ gilt, liegt nahe.
Um Flächeninhalte zu bestimmen, müsste man f aufleiten (integrieren), um $A(x)$ zu erhalten.
Demnach ergäbe sich für den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ in den Grenzen von 1 bis 2 (siehe Seite 1) $A = A(2) - A(1) = \frac{7}{3}$ [FE], $A(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Die Vermutung wird sich als richtig erweisen. An dieser Stelle folgen einige Übungen.
Leibniz ersann folgende Schreibweise:

$$A = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Das Integralzeichen $\int$ erinnert an eine Summe von Rechtecken,

dx legt die Integrationsvariable fest, möglich wäre: $\int_1^2 xy\,dy$

Bestimme algebraisch den Inhalt der Fläche

a) unter dem Graphen von $f(x) = x^3 + 2$ in den Grenzen $a = 2$, $b = 4$,

b) die der Graph von $f(x) = 9 - x^2$ mit der x-Achse einschließt,

c) den die beiden Graphen von $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 6x + 1$ miteinander einschließen.

Die Ergebnisse sind ganzzahlig und ergeben zusammen 136,

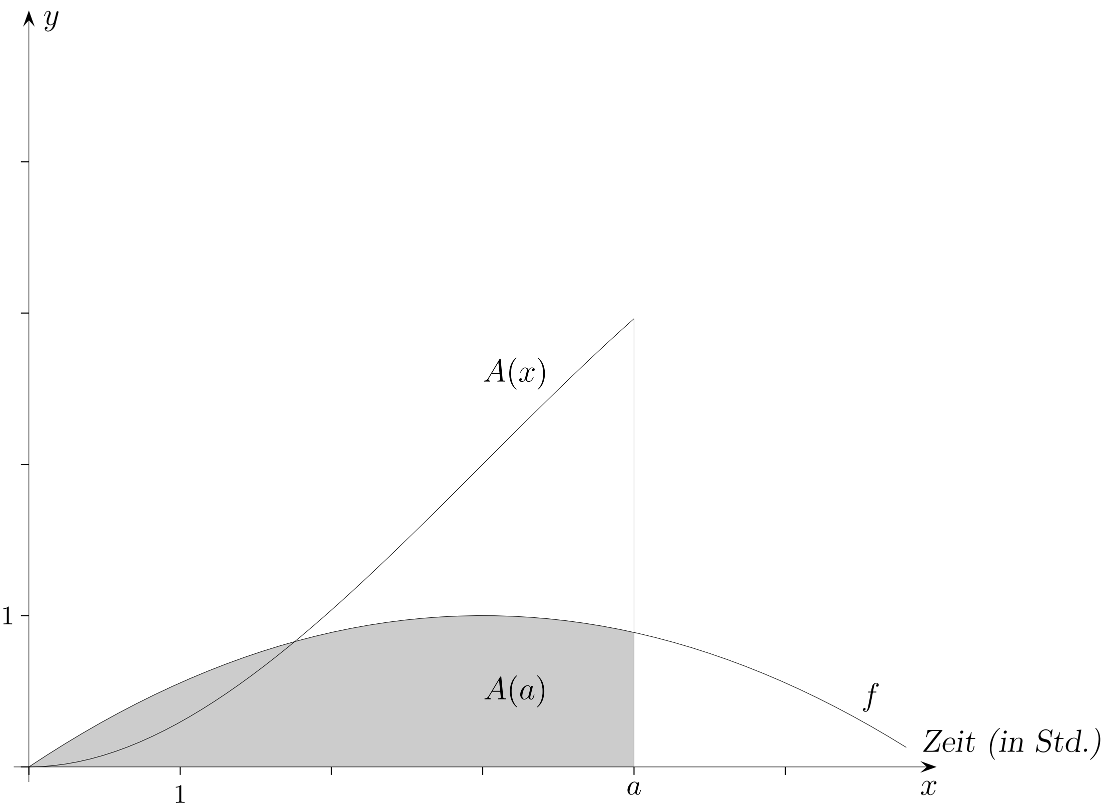
sie können mit fnInt(f(X), X, a, b) überprüft werden.

$A(x)$ heißt Integralfunktion. Der Beginn bei Null ist willkürlich, eine andere Wahl führte zu $A(x)+C$ mit einer additiven Konstante (warum?), die aber ohnehin bei der Differenzbildung $\left[A(x) + C\right]_a^b$ herausfallen würde. Für die Flächenberechnung muss daher nur eine Funktion $F(x)$ (Stammfunktion) ermittelt werden, für die $F'(x) = f(x)$ gilt.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

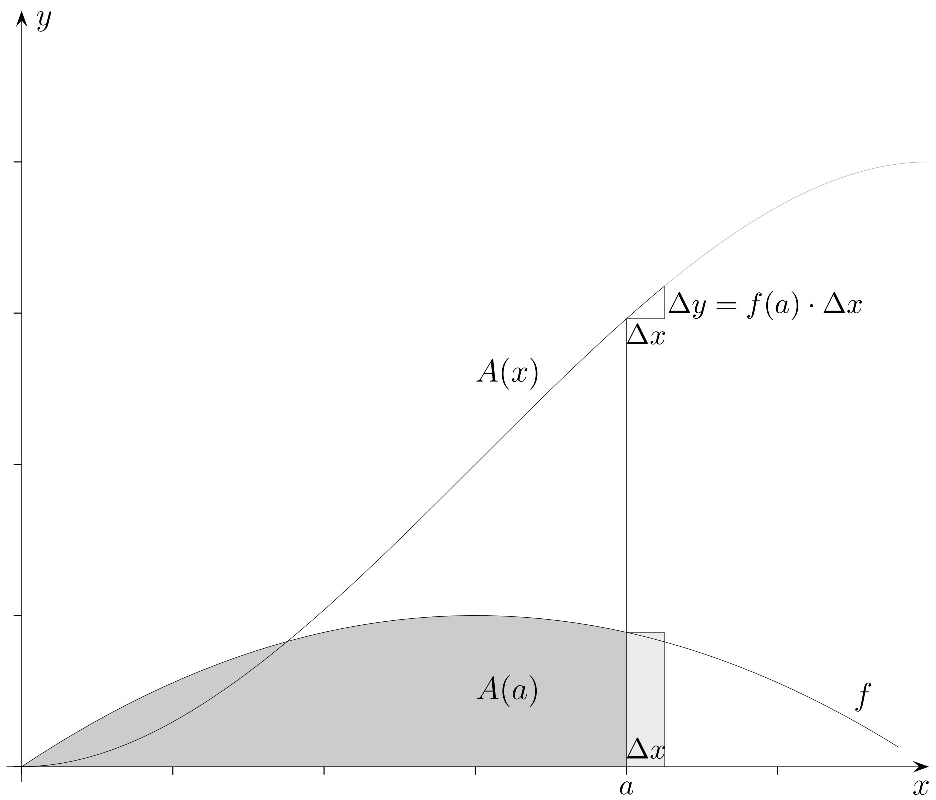
Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Zusammenhang entdecken

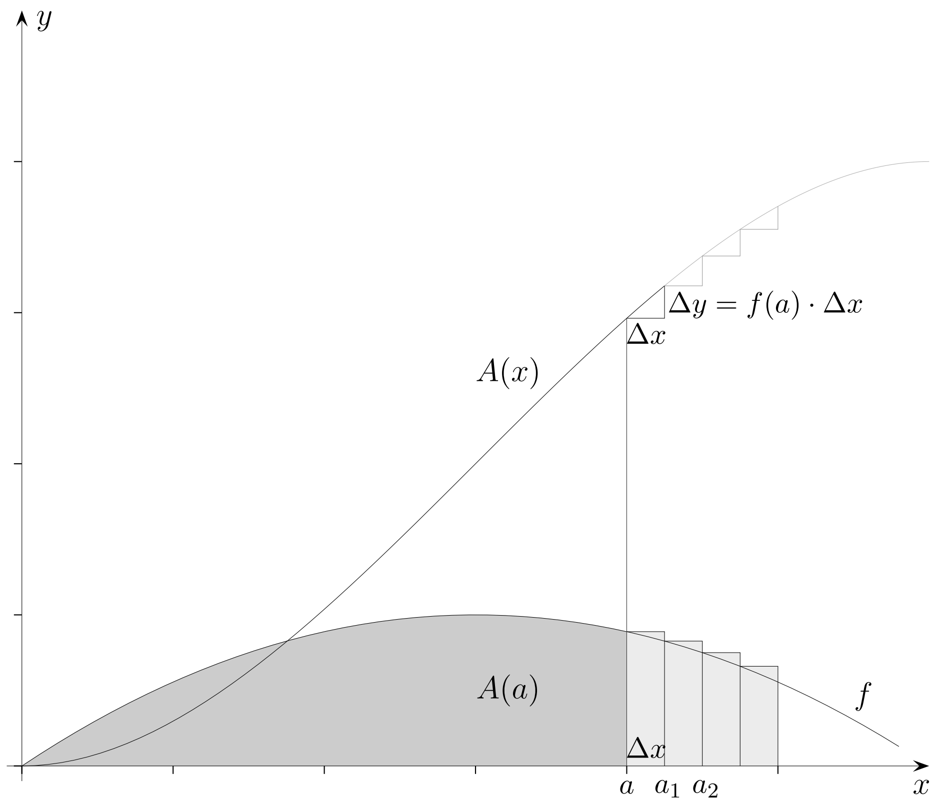
Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?



Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

Zusammenhang entdecken

Aus einem Ventil, das langsam geöffnet und dann wieder geschlossen wird, fließt Wasser.
Die Funktion f erfasst die ausfließende Wassermenge in Liter/Std. (Änderungsrate).
$A(x)$ erfasst die Wassermenge, ist bis zum Zeitpunkt $x = a$ ausgeflossen ist.
Wie verläuft $A(x)$ weiter?



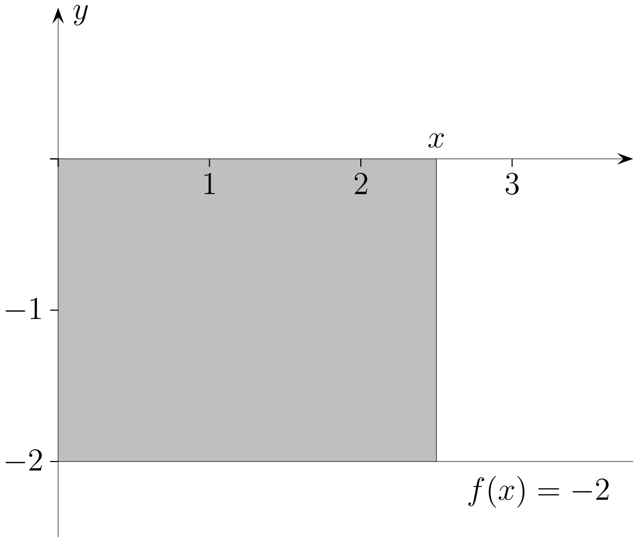
Δx sei hinreichend klein.
Der Zuwachs von $A(x)$ an der Stelle $x = a$ (genauer $\Delta y = A(a + \Delta x) - A(a)$)
beträgt $\approx f(a) \cdot \Delta x$, dem Inhalt des gezeichneten linken Rechtecks.
$A(x)$ hat an der Stelle $x = a$ somit die Steigung $f(a)$.
Die Stelle a ist beliebig, daher gilt $A'(x) = f(x)$.

GTR
$\backslash Y_1 =$ -1/9∗X∗(X−6)
$\backslash Y_2 = \text{fnInt}(Y_1, X, 0, X)$ $\qquad$ $\text{fnInt}(Y_1, \text{Variable}, \text{linke Grenze}, \text{rechte Grenze})$

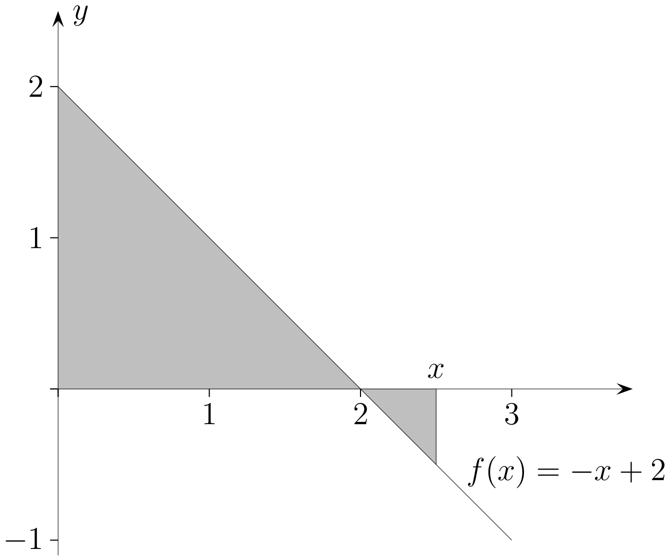
Integralrechnung

Welche Besonderheiten beinhalten die folgenden Fälle?

d)



e)



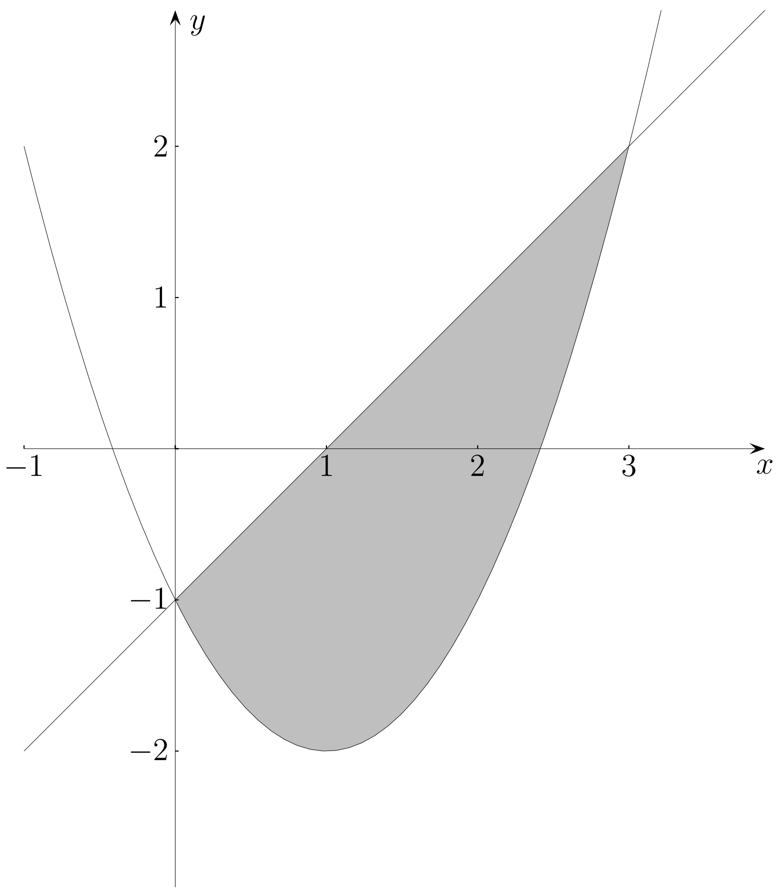
Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 1$

$g(x) = x^2 - 2x - 1$

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ [FE]

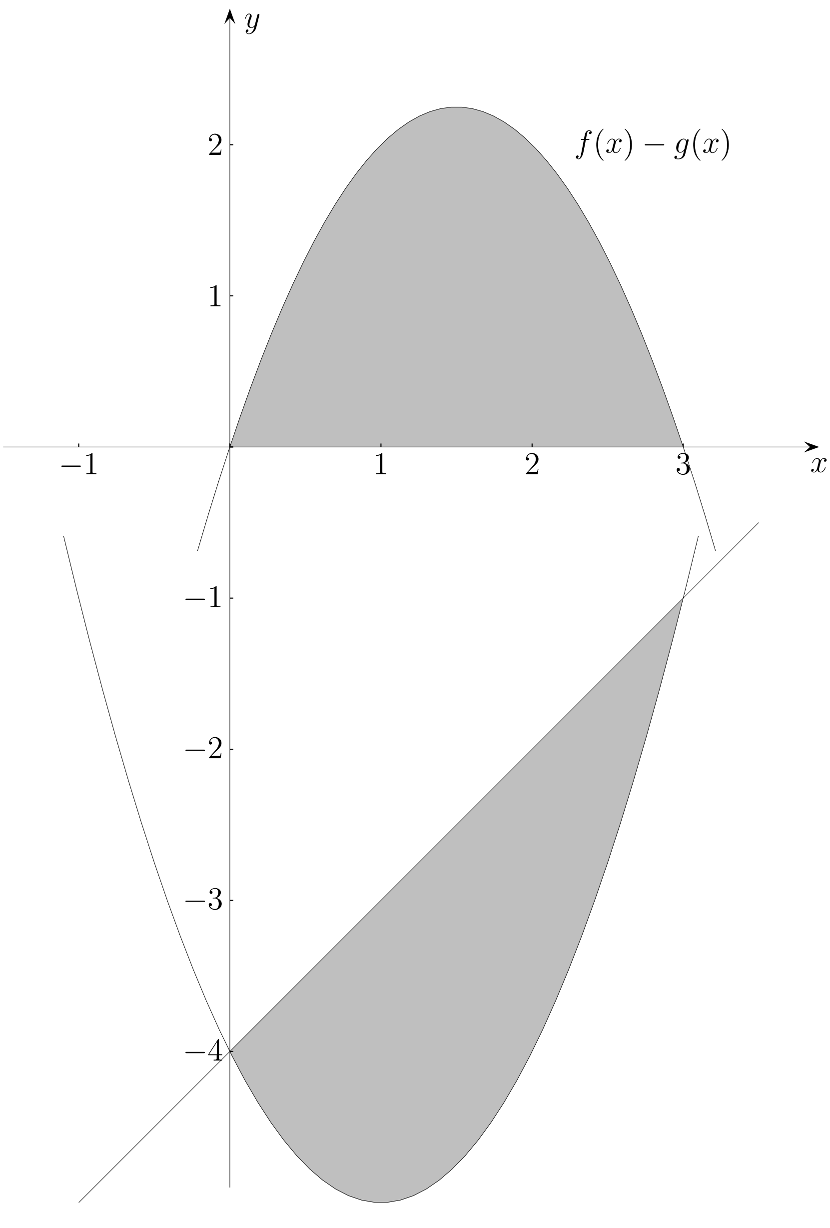
Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen

$f(x) = x - 4$

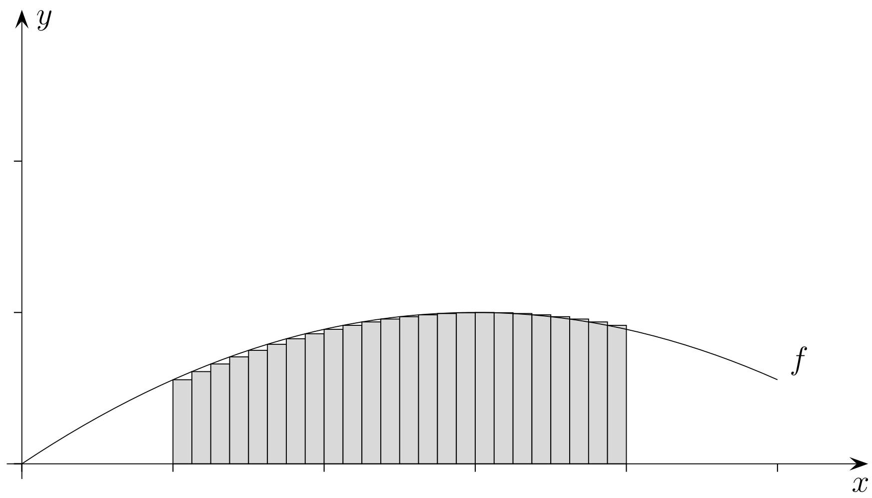
$g(x) = x^2 - 2x - 4$

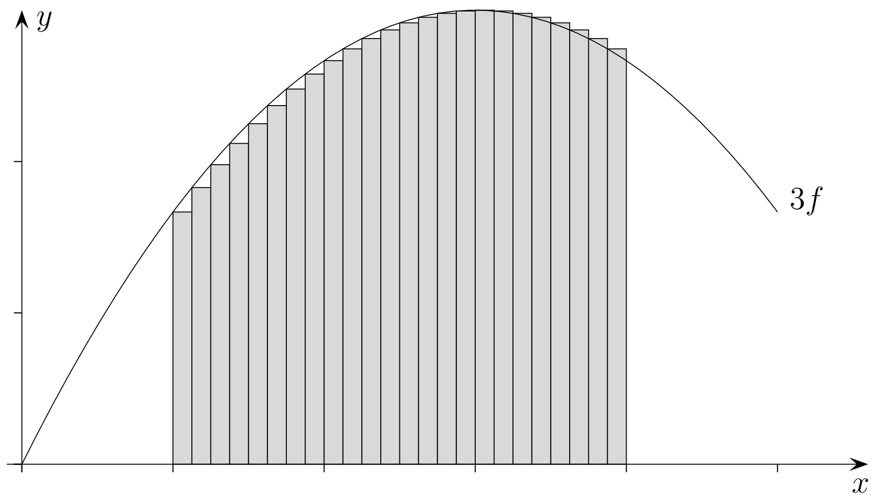
Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen eingeschlossen wird.



$\frac{9}{2}$ [*FE*]

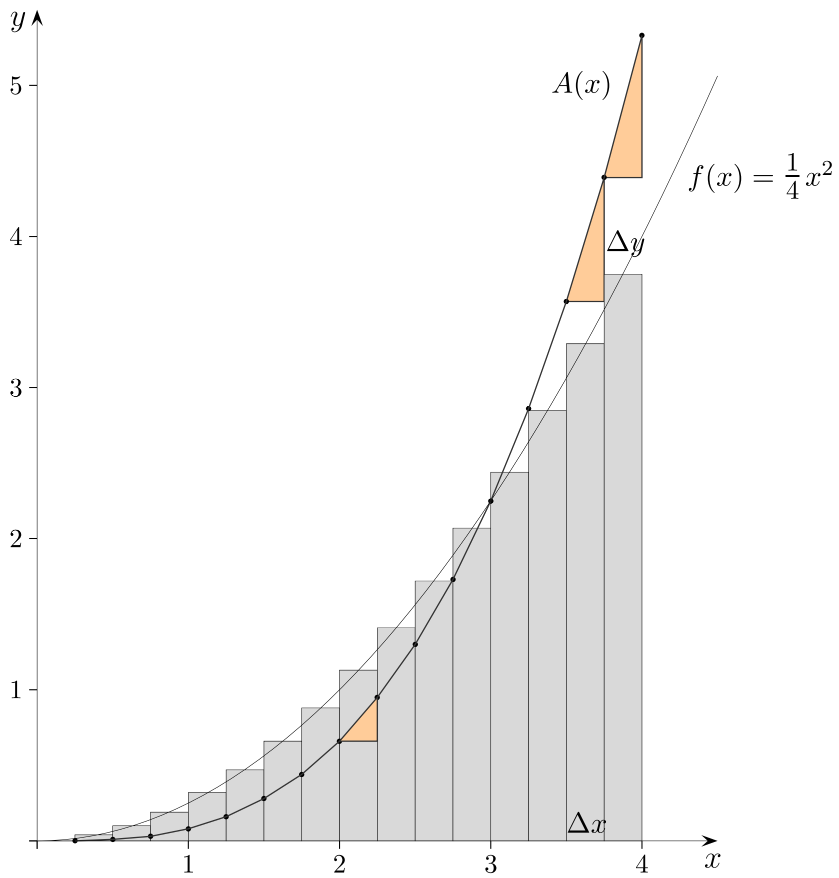
Faktorregel





Begründe anschaulich die Faktorregel: $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

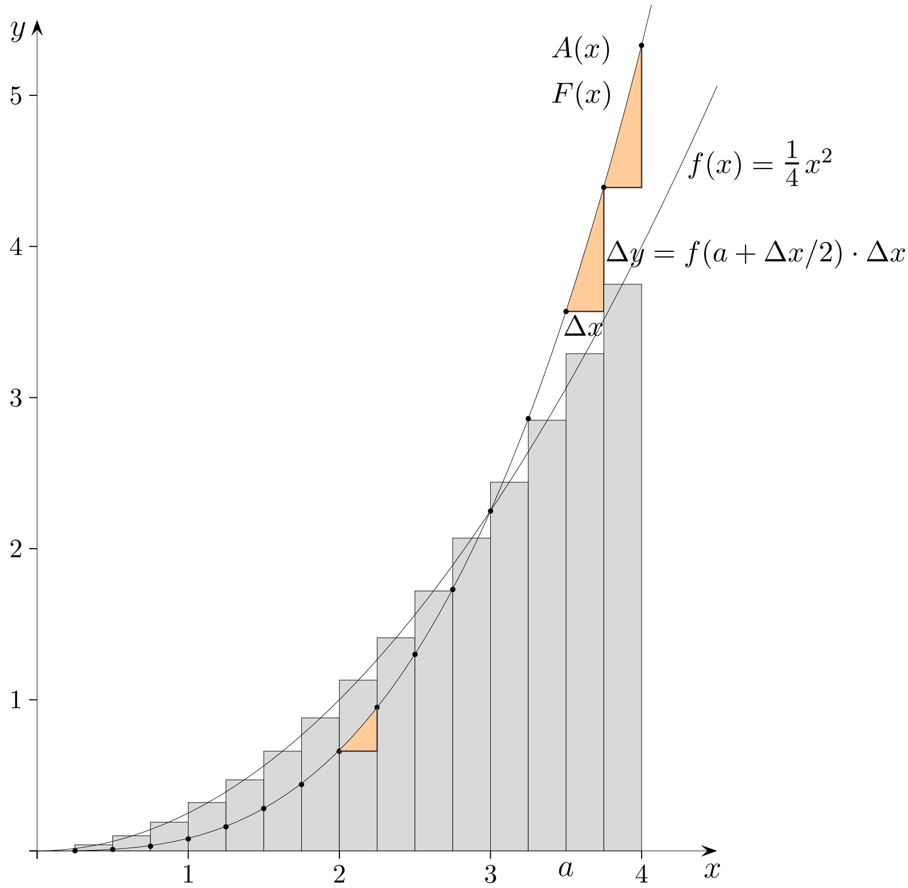


Die Punkte stellen die Summe der Rechtecksinhalte von Null beginnend dar.
$A(x)$ ist die Flächenfunktion der Treppenfunktion, die sich durch die Rechtecke ergibt.

Ermittle $A'(x)$.

Tipp: Welche Bedeutung hat Δy (FE)?

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

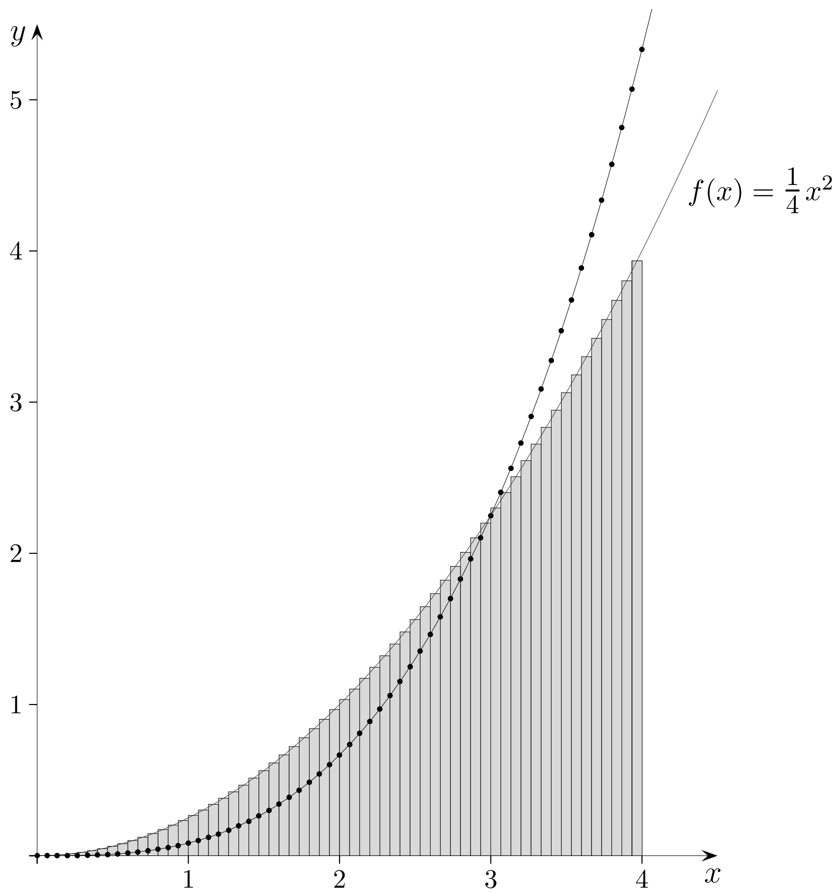


Das zu einem Steigungsdreieck gehörenden Rechteck hat den Inhalt Δy (*FE*).
Es ist zu erkennen, dass $A'(x) \approx f(x)$ ist,

z. B. an der Stelle a: $A'(a) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f(a + \Delta x/2) \approx f(a)$

$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$, die durch den Ursprung verläuft.
Schon bei dieser Rechteckbreite stimmt $A(x)$ mit $F(x)$ erstaunlich gut überein.

Einstieg

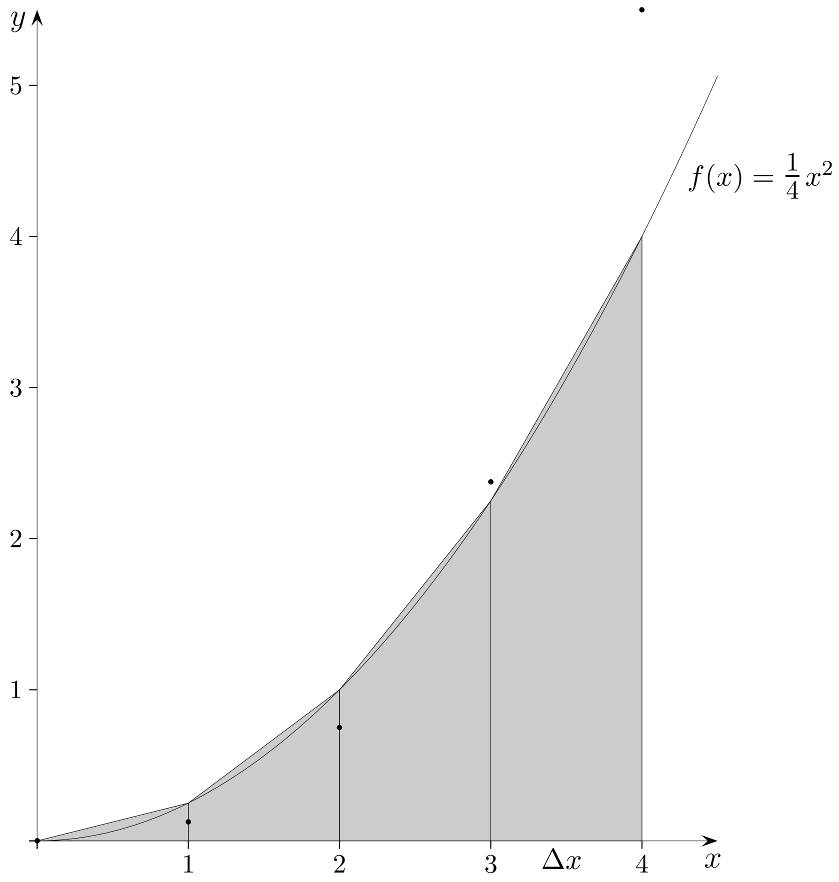


Welche Beziehungen bestehen zwischen den Graphen?
Welche Vermutung liegt dann nahe?

Anmerkungen zur Didaktik

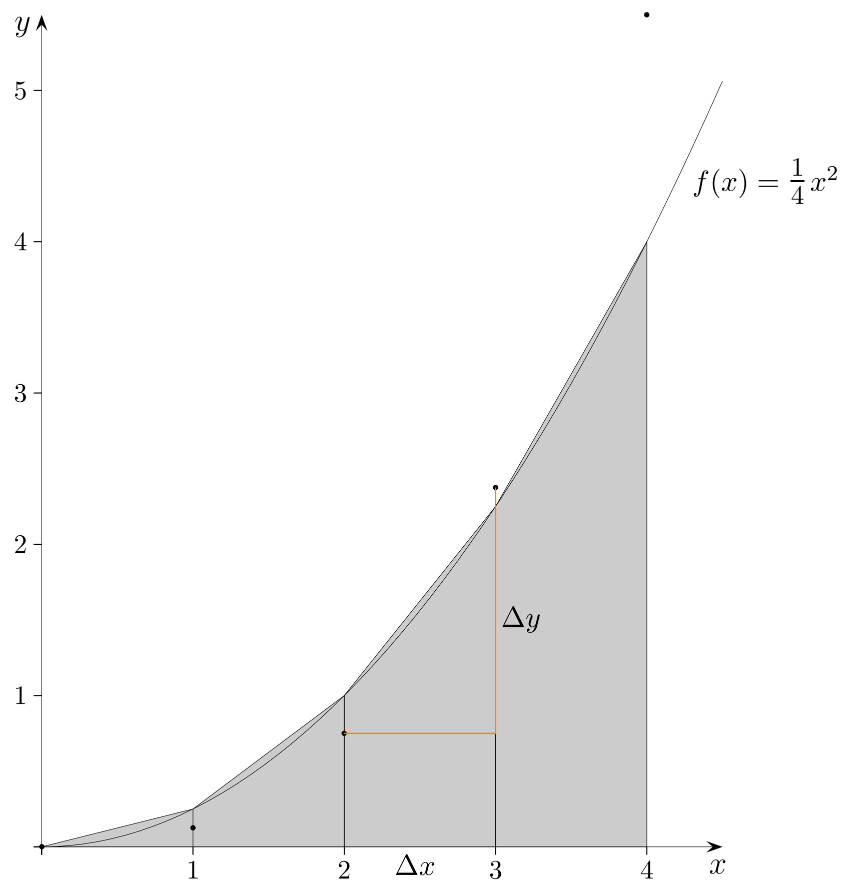
Zum Einstieg in die Integralrechnung eignen sich die Inhalte der Seiten 1 bis 3.
Zur Begründung des Hauptsatzes siehe nächste Seite, sowie die entsprechende GeoGebra-Datei.
Sehnenvierecke (trapezförmig) sind besonders geeignet, den Graphen von f zu approximieren.
Dem Schluss von der Änderungsrate auf den Bestand liegen Rechtecksummen zugrunde
(die Änderungsrate wird für Δx als konstant angesehen).
Die Thematisierung von Ober- und Untersummen ermöglicht es, Vermutungen aufzustellen;
einen Einblick erhält man dadurch nicht.
Die Betrachtung der y-Zuwächse der Punkte (nächste Seite) und der Steigungen der Verbindungslinien führt zu der Erkenntnis, dass das Differenzieren und das Ermitteln einer Integralfunktion inverse Operationen sind.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Erläutere den Sinn der Punkte.
Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte $(a \mid f(a))$ und $(a + \Delta x \mid f(a + \Delta x))$.
Welche Vermutung liegt nahe?

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Erläutere den Sinn der Punkte.
Ermittle allgemein die Steigung der Verbindungsstrecke zweier benachbarter Punkte $(a \mid f(a))$ und $(a + \Delta x \mid f(a + \Delta x))$.
Welche Vermutung liegt nahe?

Die Differenz Δy der y-Werte jeweils zweier benachbarter Punkte ist der Inhalt des zugehörigen Sehnenvierecks.
Die y-Koordinate jeden Punkts $(x \mid y)$ stellt die Summe der trapezförmigen Sehnenvierecksinhalte von 0 bis x dar.

$$dy = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)]\,dx$$

Das doppelte Trapez ergibt ein Rechteck.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[f(a) + f(a + dx)] \approx f(a)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung