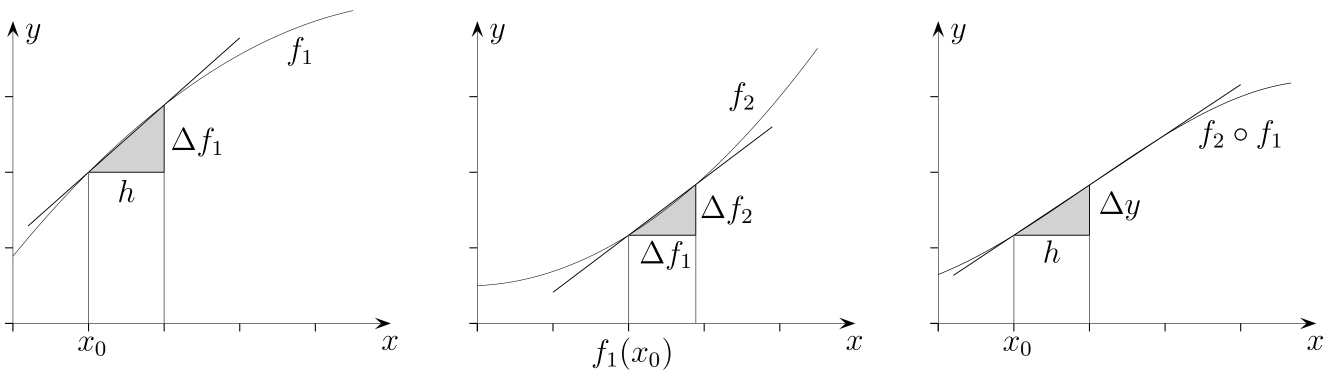
Kettenregel (Ableitung von $f_2 \circ f_1$)

Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine

innere Funktion $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$ und eine

äußere Funktion $f_2 = x^2 + 1$ zerlegt werden. Es ist dann: $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

1. Zeichne die Graphen von f_1, f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



Zur Erinnerung: $f_1'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f_1}{h}$, $\Delta f_1 = f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$

Für die Verkettung gilt:

$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_2(f_1(x_0 + h)) - f_2(f_1(x_0))}{h}$ Mit $f_1(x_0 + h) = f_1(x_0) + \Delta f_1$ erhalten wir

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{\Delta f_1} \cdot \frac{\Delta f_1}{h}$$

Der Übergang zu den Grenzwerten ergibt die Kettenregel: $(f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$

2. Leite ab.

   a) $f(x) = (2x + 1)^3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

   c) $f(x) = e^{5x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

3. Zeige, dass gilt: $\Delta y = \Delta f_2$ (siehe obige Graphen).

   Begründe die Kettenregel mit $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{\Delta f_2}{\Delta f_1} \cdot \dfrac{\Delta f_1}{h}$

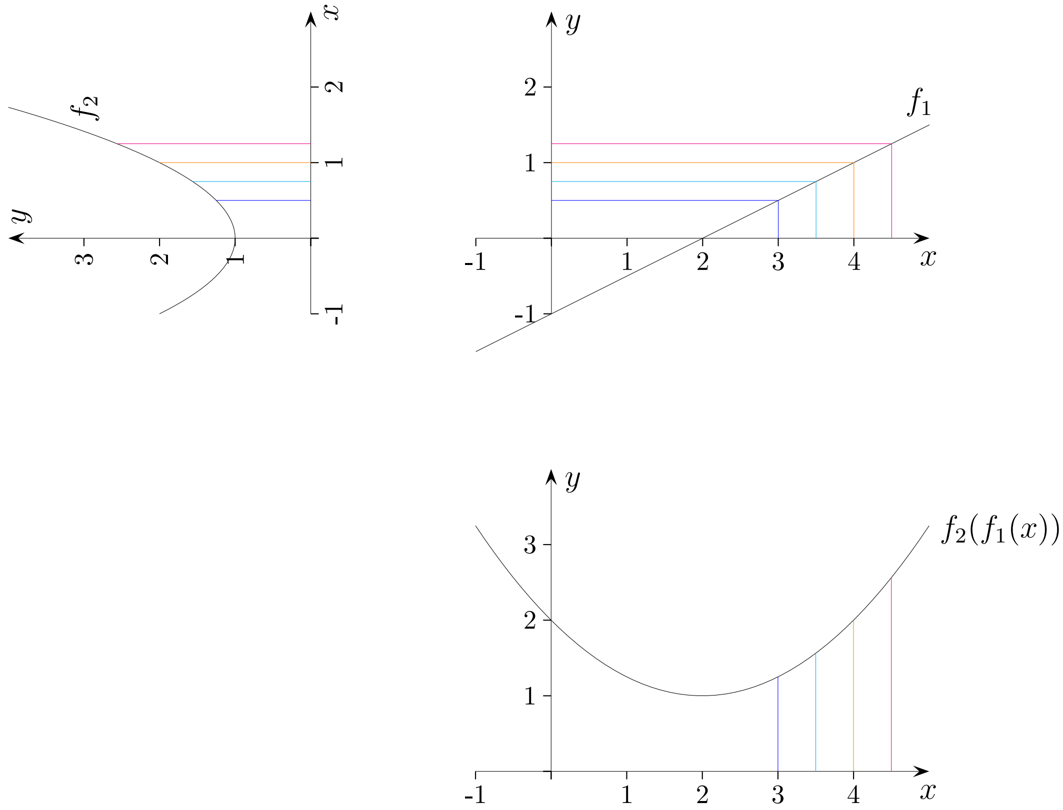
Verkettung

1. Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine

   innere Funktion $\quad f_1 = \frac{1}{2}x - 1 \quad$ und eine

   äußere Funktion $\quad f_2 = x^2 + 1 \quad$ zerlegt werden. Es ist dann: $f(x) = f_2(f_1(x))$.

   Zeichne die Graphen von f_1, f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



2. Leite ab.

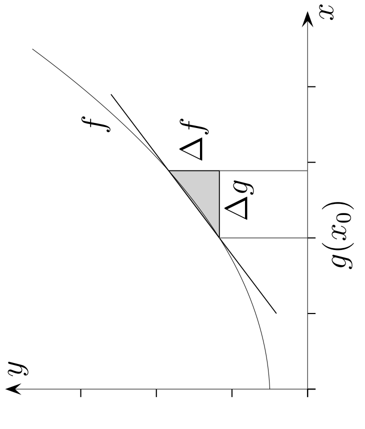
   a) $f(x) = (2x+1)^3$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

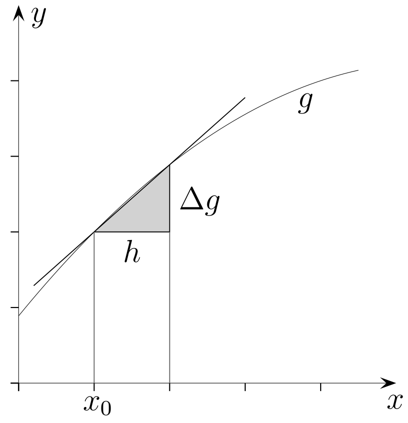
   c) $f(x) = e^{5x}$ $\qquad$ d) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

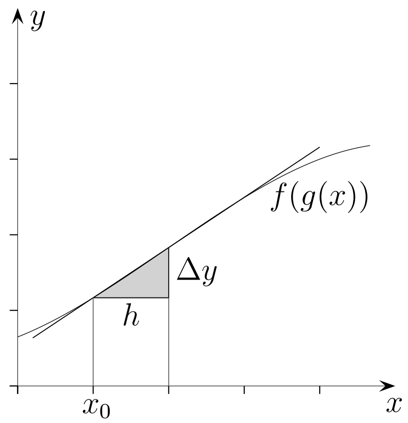
   a) $f'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2$ $\qquad$ b) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

   c) $f'(x) = 5\,e^{5x}$ $\qquad$ d) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

Kettenregel Ableitung von $f(g(x))$





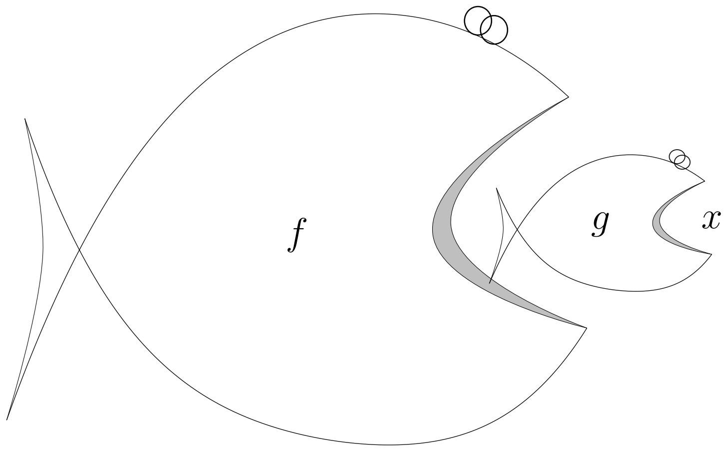


Mit dieser Anordnung der Graphen wird die Verkettung besonders einsichtig.

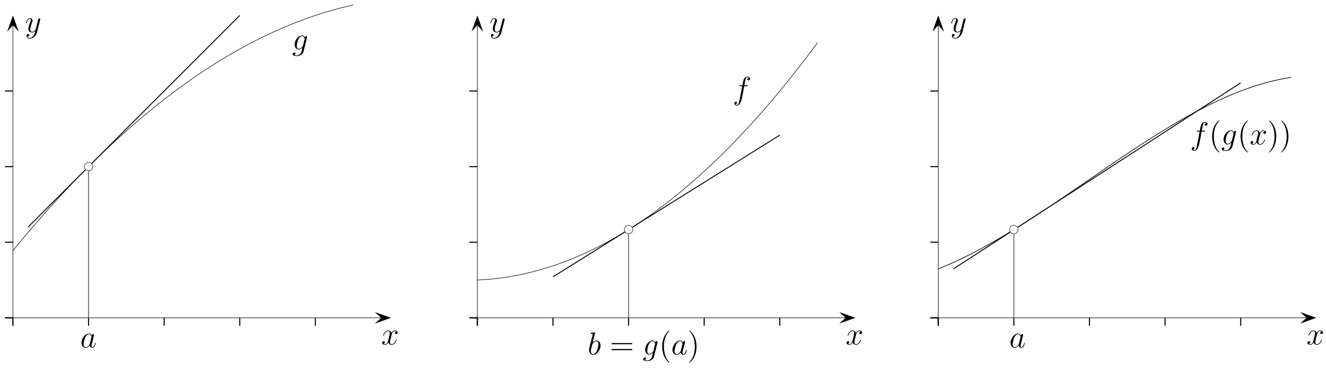
Zeige, dass gilt: $\Delta y \,=\, \Delta f$

Begründe die Kettenregel mit: $\quad \dfrac{\Delta y}{h} \;=\; \dfrac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \dfrac{\Delta g}{h}$

Verkettung $\quad f(g(x))$



Kettenregel, Ableitung von $f(g(x))$



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten aus

$$g(x) \approx g(a) + g'(a) \cdot (x - a) \quad \text{und}$$

$$f(x) \approx f(b) + f'(b) \cdot (x - b) \quad \text{d. h.}$$

$$f(x) \approx f(g(a)) + f'(g(a)) \cdot (x - g(a))$$

und verketten f und g:

$$f(g(x)) \approx f(g(a)) + \underbrace{f'(g(a)) \cdot g'(a)}_{\text{Ableitung}} \cdot (x - a) \qquad g(a) \text{ hebt sich auf.}$$

g ist die innere Funktion,
f die äußere.

Kettenregel:

Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren,
multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion

Leite ab.

a) $f(x) = (1 - 2x)^3$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

Leite ab.

a) $f(x) = (1 - 2x)^3$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

a) $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$

b) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$

Ableitungen Übung

1. $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx}$ $\quad f'(x) = -x\,e^{-kx}\,(-2+kx)$ $\quad f''(x) = e^{-kx}\,(2-4kx+x^2k^2)$

2. $f(x) = e^{-kx^2+x}$ $\quad f'(x) = (-2kx+1)\,e^{-kx^2+x}$ $\quad f''(x) = e^{-kx^2+x}\,((-2kx+1)^2-2k)$

3. $f(x) = (e^{-x}-1)^2$ $\quad f'(x) = 2\,(-e^{-2x}+e^{-x})$ $\quad f''(x) = 2e^{-x}\,(2e^{-x}-1)$

4. $f(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-4e^x\cdot(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4e^x\cdot(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^x+1)^4}$

5. $f(x) = \dfrac{G}{1+e^{-kx}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{Gk\,e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{Gk^2\,e^{-kx}\,(e^{-kx}-1)}{(1+e^{-kx})^3}$

6. $f(x) = x+\sin(1-kx)$ $\quad f'(x) = 1-\cos(-1+kx)k$ $\quad f''(x) = \sin(-1+kx)k^2$

7. $f(x) = ax^2\,\cos(kx)$ $\quad f'(x) = 2ax\,\cos(kx)-kax^2\,\sin(kx)$

8. $f(x) = \ln(1+x^2)$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

9. $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x^2}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{x+2}{x^2+x}$ $\quad f''(x) = \dfrac{x^2+4x+2}{x^2(x+1)^2}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-\ln x)$ $\quad f'(x) = \dfrac{x-1}{2x}$ $\quad f''(x) = \dfrac{1}{2x^2}$

11. $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2\,\ln x-1}{x^3}$

12. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$

13. $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$

Zur Erinnerung:

$$(\ln x)' \;=\; \frac{1}{x}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} e^{\,\ln x} &= x \;\mid\; (\;)' \quad \text{(Kettenregel)} \\ e^{\,\ln x}\,(\ln x)' &= 1 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ableitung von $\quad f(x) = e^{g(x)}$

e-Funktionen dieser Art lassen sich besonders einfach ableiten:

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Der e-Term bleibt stehen und wird mit der Ableitung des Exponenten multipliziert.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} \\ f'(x) &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{x^2-x} \\ g'(x) &= e^{x^2-x} \cdot (2x-1) \end{aligned}$$