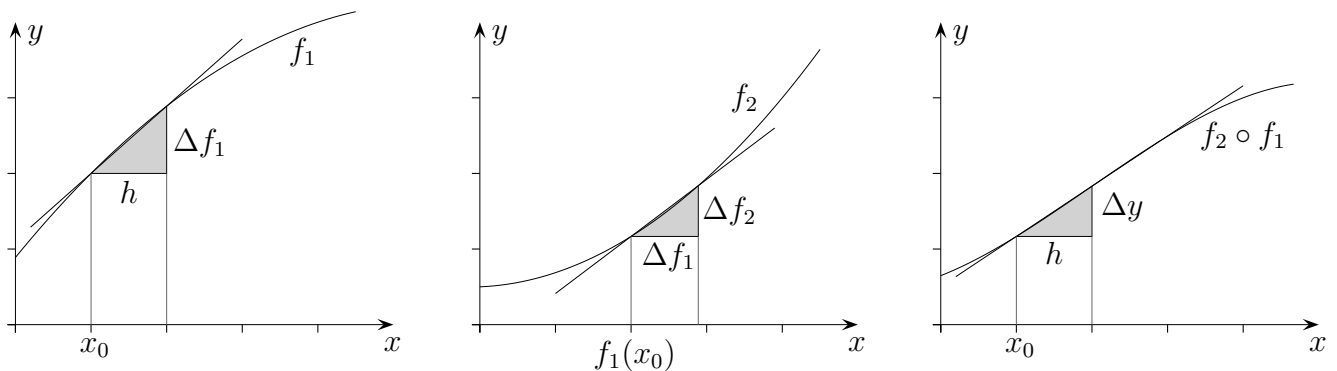


# Kettenregel (Ableitung von $f_2 \circ f_1$ )

Eine Funktion wie  $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$  kann in eine  
 innere Funktion  $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$  und eine  
 äußere Funktion  $f_2 = x^2 + 1$  zerlegt werden. Es ist dann:  $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$ .  
 1. Zeichne die Graphen von  $f_1$ ,  $f_2$  sowie die Verkettung  $f_2 \circ f_1$ .



Zur Erinnerung:  $f_1'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f_1}{h}$ ,  $\Delta f_1 = f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$

Für die Verkettung gilt:

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0 + h)) - f_2(f_1(x_0))}{h} \quad \text{Mit } f_1(x_0 + h) = f_1(x_0) + \Delta f_1 \text{ erhalten wir}$$

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(f_1(x_0) + \Delta f_1) - f_2(f_1(x_0))}{\Delta f_1} \cdot \frac{\Delta f_1}{h}$$

Der Übergang zu den Grenzwerten ergibt die Kettenregel:  $(f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$

2. Leite ab.

a)  $f(x) = (2x + 1)^3$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c)  $f(x) = e^{5x}$

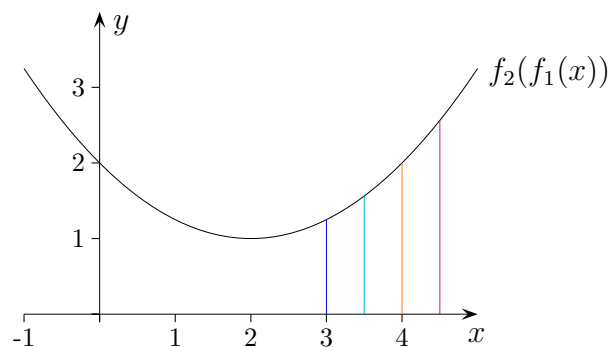
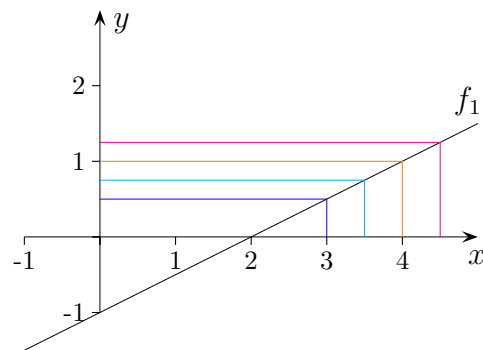
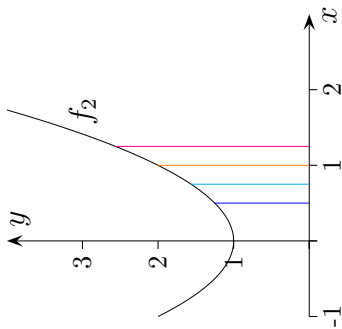
d)  $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

3. Zeige, dass gilt:  $\Delta y = \Delta f_2$  (siehe obige Graphen).

Begründe die Kettenregel mit  $\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} \cdot \frac{\Delta f_1}{h}$

# Verkettung

1. Eine Funktion wie  $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1$  kann in eine innere Funktion  $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$  und eine äußere Funktion  $f_2 = x^2 + 1$  zerlegt werden. Es ist dann:  $f(x) = f_2(f_1(x))$ . Zeichne die Graphen von  $f_1$ ,  $f_2$  sowie die Verkettung  $f_2 \circ f_1$ .



2. Leite ab.

a)  $f(x) = (2x + 1)^3$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c)  $f(x) = e^{5x}$

d)  $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

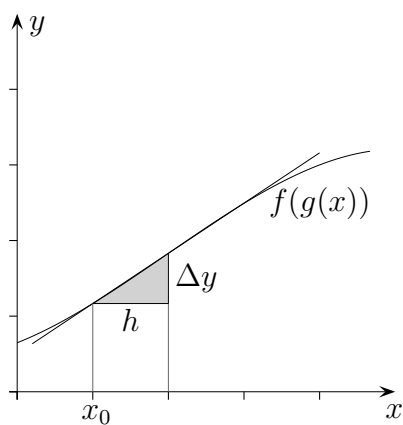
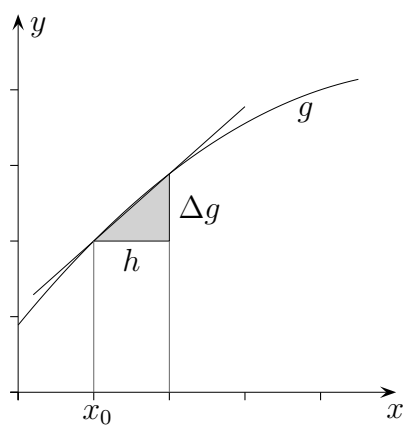
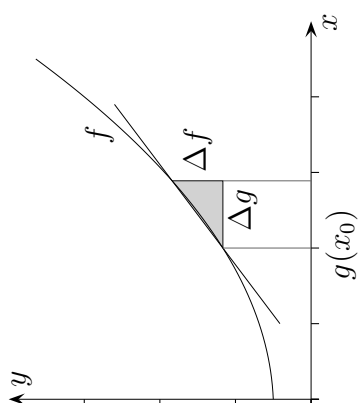
a)  $f'(x) = 6 \cdot (2x + 1)^2$

b)  $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

c)  $f'(x) = 5e^{5x}$

d)  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$

# Kettenregel Ableitung von $f(g(x))$

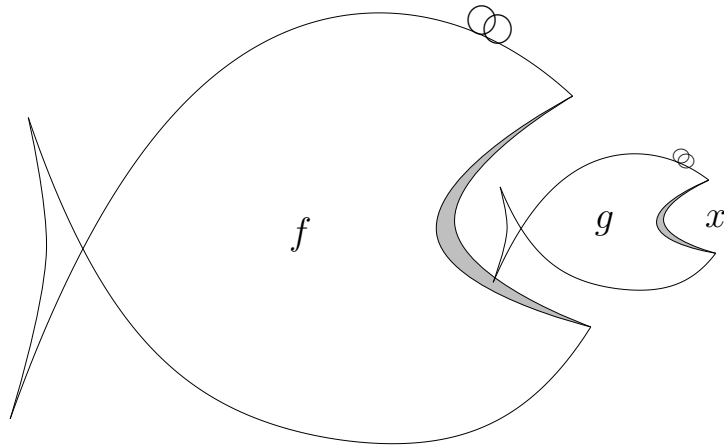


Mit dieser Anordnung der Graphen wird die Verkettung besonders einsichtig.

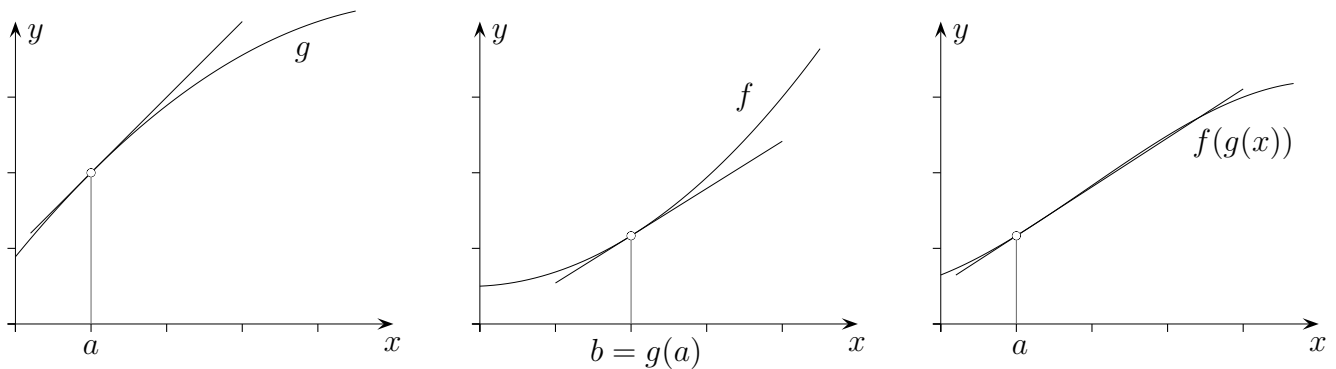
Zeige, dass gilt:  $\Delta y = \Delta f$

Begründe die Kettenregel mit:  $\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{h}$

# Verkettung $f(g(x))$



## Kettenregel, Ableitung von $f(g(x))$



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten aus

$$g(x) \approx g(a) + g'(a) \cdot (x - a) \quad \text{und}$$

$$f(x) \approx f(b) + f'(b) \cdot (x - b) \quad \text{d.h.}$$

$$f(x) \approx f(g(a)) + f'(g(a)) \cdot (x - g(a))$$

und verketten  $f$  und  $g$ :

$$f(g(x)) \approx f(g(a)) + \underbrace{f'(g(a)) \cdot g'(a)}_{\text{Ableitung}} \cdot (x - a) \qquad g(a) \text{ hebt sich auf.}$$

$g$  ist die innere Funktion,  
 $f$  die äußere.

Kettenregel:

Ableitung der äußeren Funktion an der Stelle der inneren,  
 multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion

Leite ab.

a)  $f(x) = (1 - 2x)^3$

b)  $f(x) = e^{-x^2}$

c)  $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

Leite ab.

a)  $f(x) = (1 - 2x)^3$

b)  $f(x) = e^{-x^2}$

c)  $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$

a)  $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$

b)  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

c)  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$

# Ableitungen Übung

1.  $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx}$   $f'(x) = -x e^{-kx} (-2 + kx)$   $f''(x) = e^{-kx} (2 - 4kx + x^2 k^2)$
2.  $f(x) = e^{-kx^2+x}$   $f'(x) = (-2kx + 1) e^{-kx^2+x}$   $f''(x) = e^{-kx^2+x} ((-2kx + 1)^2 - 2k)$
3.  $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$   $f'(x) = 2(-e^{-2x} + e^{-x})$   $f''(x) = 2e^{-x} (2e^{-x} - 1)$
4.  $f(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$   $f'(x) = \frac{-4e^x \cdot (e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$   $f''(x) = \frac{4e^x \cdot (e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$
5.  $f(x) = \frac{G}{1 + e^{-kx}}$   $f'(x) = \frac{Gk e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$   $f''(x) = \frac{Gk^2 e^{-kx} (e^{-kx} - 1)}{(1 + e^{-kx})^3}$
6.  $f(x) = x + \sin(1 - kx)$   $f'(x) = 1 - \cos(-1 + kx)k$   $f''(x) = \sin(-1 + kx)k^2$
7.  $f(x) = ax^2 \cos(kx)$   $f'(x) = 2ax \cos(kx) - kax^2 \sin(kx)$
8.  $f(x) = \ln(1 + x^2)$   $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$   $f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$
9.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x^2}$   $f'(x) = -\frac{x+2}{x^2+x}$   $f''(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}$
10.  $f(x) = \frac{1}{2}(x - \ln x)$   $f'(x) = \frac{x-1}{2x}$   $f''(x) = \frac{1}{2x^2}$
11.  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$   $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$   $f''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$
12.  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$   $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$   $f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3}$
13.  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$   $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$   $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

Zur Erinnerung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Begründung:

$$e^{\ln x} = x \mid ( )' \quad (\text{Kettenregel})$$

$$e^{\ln x} (\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$



# Ableitung von $f(x) = e^{g(x)}$

$e$ -Funktionen dieser Art lassen sich besonders einfach ableiten:

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Der  $e$ -Term bleibt stehen und wird mit der Ableitung des Exponenten multipliziert.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$g(x) = e^{x^2-x}$$

$$g'(x) = e^{x^2-x} \cdot (2x - 1)$$