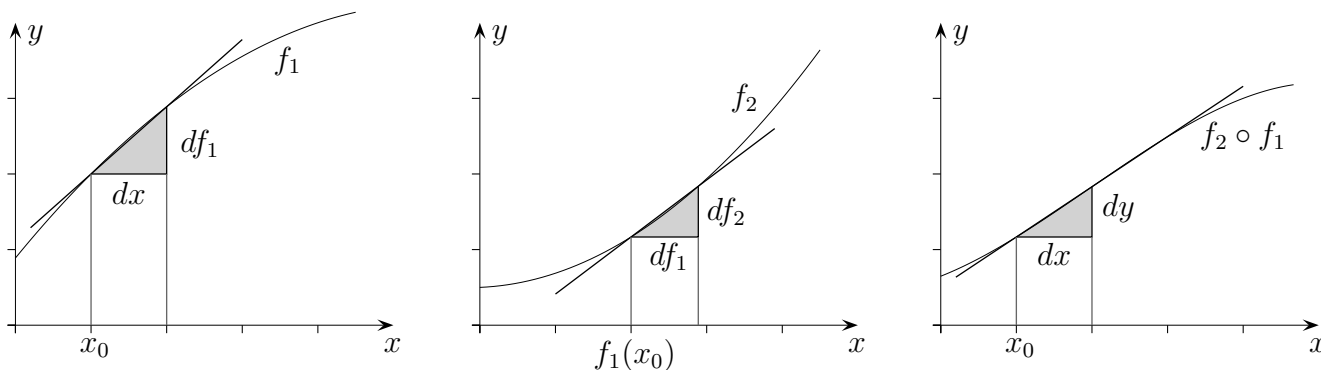


Kettenregel (Ableitung von $f_2 \circ f_1$)

Leibniz (1646-1716)

Eine Funktion wie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1$ kann in eine innere Funktion $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$ und eine äußere Funktion $f_2 = x^2 + 1$ zerlegt werden. Es ist dann: $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

1. Zeichne die Graphen von f_1 , f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f_2 \circ f_1$ mit Hilfe der Ableitungen von f_1 und f_2 ermittelt werden kann.

Untersuchen wir wieder den Funktionszuwachs Δy der verketteten Funktion an der Stelle x_0 für einen Zuwachs um dx .

$$\Delta y = f_2(f_1(x_0 + dx)) - f_2(f_1(x_0))$$

Um die lineare Abhängigkeit von dx zu erkennen, approximieren wir

$$f_1(x_0 + dx) \text{ durch } f_1(x_0 + dx) \approx f_1(x_0) + df_1 = f_1(x_0) + f_1'(x_0) dx, \text{ wir erhalten:}$$

$$\Delta y \approx f_2(f_1(x_0) + f_1'(x_0) dx) - f_2(f_1(x_0))$$

$$\text{Nun gilt } f_2(x_0 + dx) \approx f_2(x_0) + f_2'(x_0) dx,$$

ersetzen wir x_0 durch $f_1(x_0)$ und dx durch $f_1'(x_0) dx$, so erhalten wir

$$dy = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0) dx \text{ und damit die Kettenregel: } (f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)$$

2. Zeige: Die Verkettung zweier linearer Funktionen ergibt eine lineare Funktion. Welche Steigung hat sie?

3. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

Kettenregel

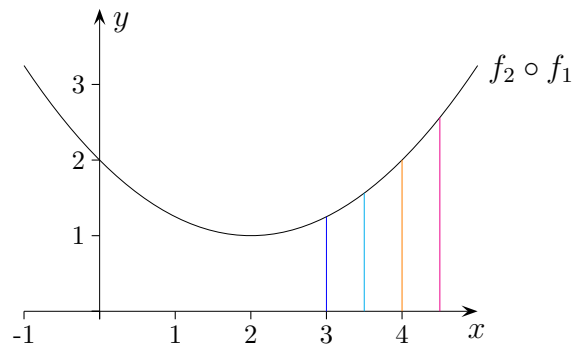
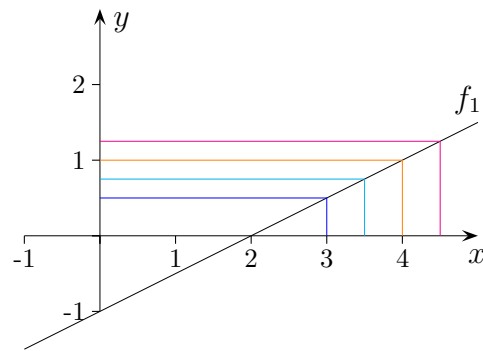
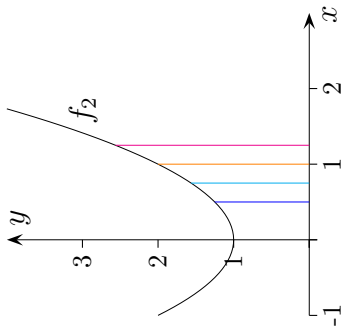
1. Eine Funktion wie $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1$ kann in eine

innere Funktion $f_1 = \frac{1}{2}x - 1$ und eine

äußere Funktion $f_2 = x^2 + 1$ zerlegt werden.

Es ist dann: $f(x) = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

Zeichne die Graphen von f_1 , f_2 sowie die Verkettung $f_2 \circ f_1$.



2. Produkt der Steigungen

3. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

a) $f'(x) = 6 \cdot (2x + 1)^2$

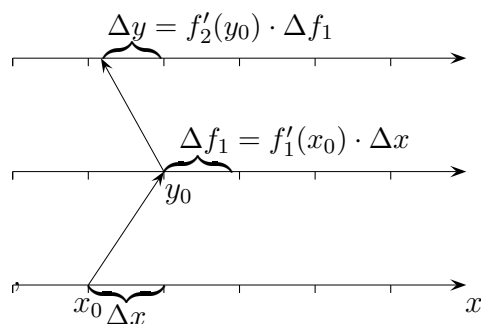
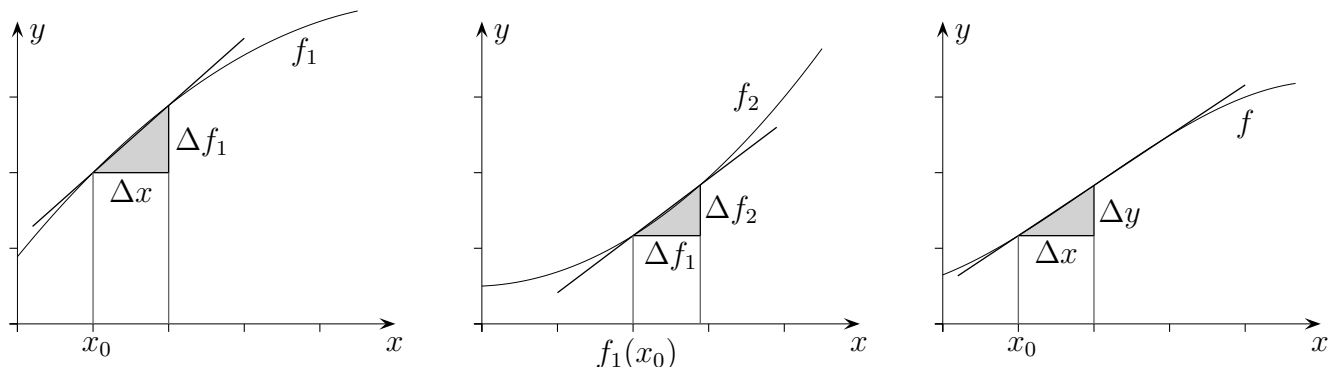
b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = 5 e^{5x}$

d) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$

Kettenregel Ableitung von $f(x) = f_2(f_1(x))$

Leibniz (1646-1716)



$$\begin{aligned}
 \Delta y &= f_2'(y_0) \cdot \Delta f_1 \\
 &= f_2'(f_1(x_0)) \cdot \Delta f_1 \\
 &= f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0) \cdot \Delta x \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f_2'(f_1(x_0)) \cdot f_1'(x_0)
 \end{aligned}$$

1. Leite ab.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = e^{5x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

Verkettung $f(g(x))$

