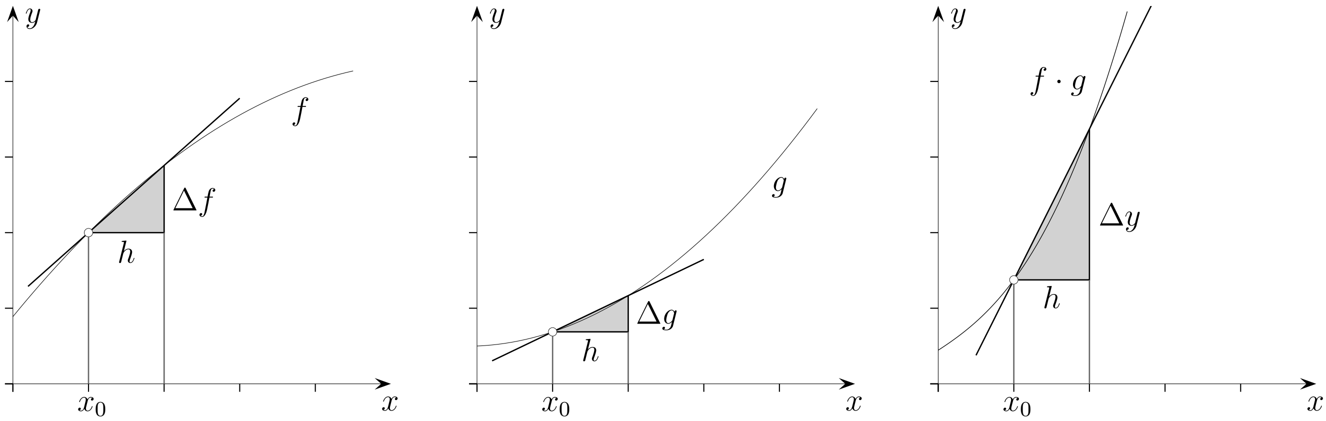
Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)



Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f \cdot g$ mit Hilfe der Ableitungen von f und g ermittelt werden kann.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta g}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta g = g(x_0+h) - g(x_0)$$

Für das Produkt der Funktionen gilt dann:

$$* \quad (f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Mit $f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f$ und $g(x_0+h) = g(x_0) + \Delta g$ multiplizieren wir aus:

$$f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) = (f(x_0) + \Delta f) \cdot (g(x_0) + \Delta g) = f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \Delta g$$

Dies setzen wir in $*$ ein, es ergibt sich: $(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta f \Delta g}{h}$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3} x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Lösungen

a) $f'(x) = x^2$

b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = e^x\,(1 + x)$

d) $f'(x) = x\,e^x\,(2 + x)$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Produktregel Ableitung von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f(x)$
mit Hilfe der Ableitungen von $u(x)$ und $v(x)$ ermittelt werden kann.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

Der Zähler kann durch zwei zusammen null ergebende Terme so ergänzt werden,
dass durch Ausklammern die Differenzenquotienten der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ entstehen.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) \overbrace{- u(x_0) \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot v(x_0 + h)}^{= 0} - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(u(x_0 + h) - u(x_0)\big) \cdot v(x_0 + h) \ + \ u(x_0) \cdot \big(v(x_0 + h) - v(x_0)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0 + h) \ + \ \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \cdot u(x_0)$$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Produktregel:

$$(u(x_0) \cdot v(x_0))' \ = \ u(x_0) \cdot v'(x_0) + u'(x_0) \cdot v(x_0)$$

oder kurz: $\quad (u \cdot v)' \ = \ u \cdot v' + u' \cdot v$

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3} x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Ableitungsregeln vermuten

1. Produktregel

Die Ableitung des Produkts $u(x) \cdot v(x)$ kann vermutet werden.

Hierzu zerlegen wir eine Funktion, z. B. $f(x) = x^6$, die wir ableiten können, in ein Produkt. In diesem Fall gibt es mehrere Möglichkeiten.

a) $f(x) = x^3 \cdot x^3$ b) $f(x) = x^2 \cdot x^4$ c) $f(x) = x \cdot x^5$

Um den Zusammenhang zwischen der Ableitung $f'(x) = 6\,x^5$ und den Ableitungen der Faktoren aufzudecken, leiten wir zunächst nur einen Faktor ab, dann stimmt zumindest die Potenz.

a) $f'(x) = \underbrace{3x^2 \cdot x^3}_{3x^5} + \ldots$ b) $f(x) = \underbrace{2x \cdot x^4}_{2x^5} + \ldots$ c) $f(x) = \underbrace{1 \cdot x^5}_{x^5} + \ldots$

Nun probieren wir es auch mit dem zweiten Faktor:

a) $f'(x) = \underbrace{3x^2 \cdot x^3}_{3x^5} + \underbrace{x^3 \cdot 3x^2}_{3x^5}$ b) $f(x) = \underbrace{2x \cdot x^4}_{2x^5} + \underbrace{x^2 \cdot 4x^3}_{4x^5}$ c) $f(x) = \underbrace{1 \cdot x^5}_{x^5} + \underbrace{x \cdot 5x^4}_{5x^5}$

Die Vermutung $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
oder kürzer: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ liegt nun nahe.

2. Kettenregel für e-Funktionen

Um die Ableitungsregel für $f(x) = e^{2x}$ zu erkennen, zerlegen wir die Funktion in ein Produkt.
$f(x) = e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x$

Begründe, dass $f'(x) = 2e^{2x}$ gilt.

Wie wird wohl $f(x) = e^{g(x)}$, z. B. $f(x) = e^{-x^2+4x}$, abgeleitet?

3. Quotientenregel

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, kurz $f = \dfrac{u}{v}$, kann mit einem geschickten Ansatz ohne Mühe hergeleitet werden.

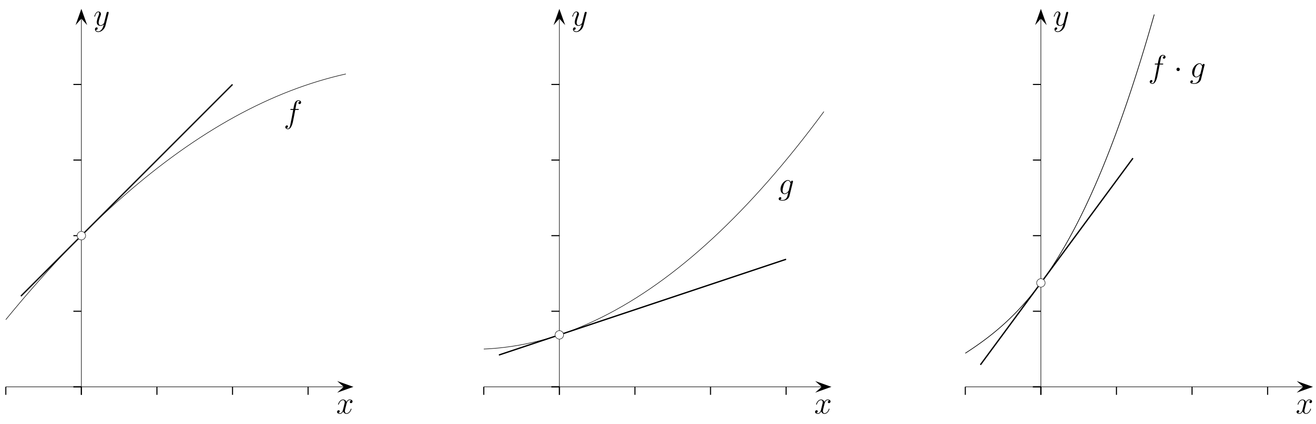
$$\frac{u}{v} \cdot v = u \qquad \text{(beide Seiten mit der Produktregel ableiten)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v' = u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \cdot v = u' - \frac{u}{v} \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$ an der Stelle $x = 0$)



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten an der Stelle $x = 0$ aus

$$f(x) \approx f'(0) \cdot x + f(0) \quad \text{und}$$
$$g(x) \approx g'(0) \cdot x + g(0)$$

und bilden das Produkt:

$$f(x) \cdot g(x) \approx \big(f'(0) \cdot x + f(0)\big) \cdot \big(g'(0) \cdot x + g(0)\big)$$
$$= \underbrace{\big(f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0)\big)}_{\text{Ableitung}} \cdot x \;+\; f(0) \cdot g(0) \;+\; g'(0) \cdot f'(0) \cdot x^2$$

Zwischenschritt: Ermittle für $f(x) = x^2 + bx + c$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 0$.
Für eine lineare Näherung (Tangente) bleibt der quadratische Restterm unberücksichtigt.

Allgemein lautet die Produktregel:
$(f \cdot g)'(x) \;=\; f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$ oder kurz $(f \cdot g)' \;=\; f \cdot g' + f' \cdot g$
oder $(u \cdot v)' \;=\; u' \cdot v + u \cdot v'$

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x \cdot x^3$

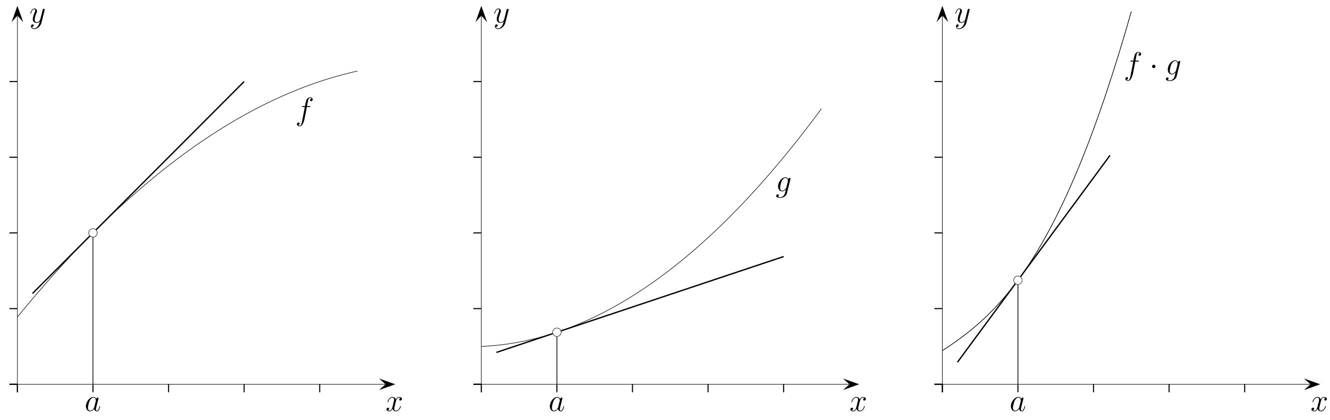
b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$ an der Stelle $x = a$)



Wir gehen von Näherungen durch Tangenten aus

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \quad \text{und}$$
$$g(x) \approx g(a) + g'(a) \cdot (x-a)$$

und bilden das Produkt:

$$f(x) \cdot g(x) \approx \big(f(a) + f'(a) \cdot (x-a)\big) \cdot \big(g(a) + g'(a) \cdot (x-a)\big)$$
$$= f(a) \cdot g(a) + \underbrace{\big(f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)\big)}_{\text{Ableitung}} \cdot (x-a) + g'(a) \cdot f'(a) \cdot (x-a)^2$$

Zwischenschritt: Ermittle für $f(x) = (x-a)^2 + bx + c$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = a$.

Beachte: Für $g(x) = (x-a)^2$ (verschobene Normalparabel) gilt $g'(a) = 0$. Für eine lineare Näherung (Tangente) bleibt der quadratische Restterm unberücksichtigt.

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x \cdot x^3$

b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Produktregel

Leite ab.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x \cdot x^3$

b) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

Lösungen

a) $f'(x) = x^3$

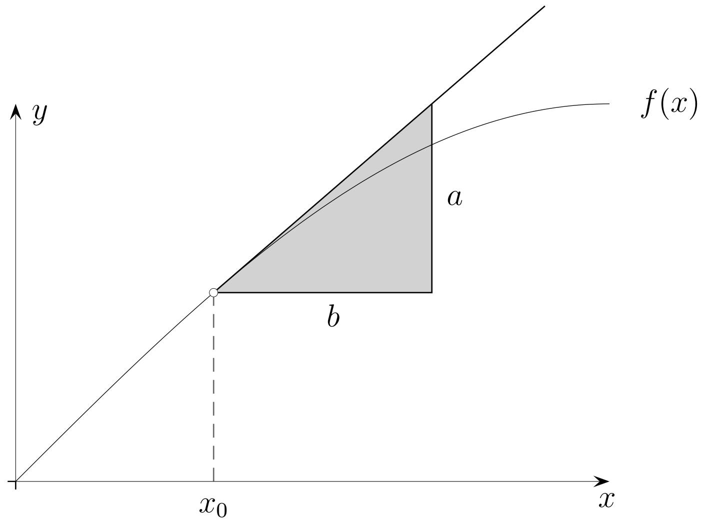
b) $f'(x) = 4x^3$

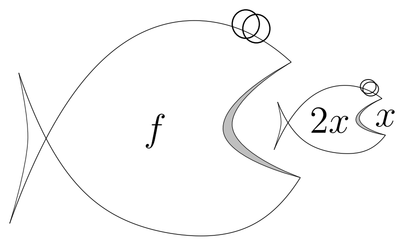
c) $f'(x) = e^x\,(x^2 + 2x)$

d) $f'(x) = e^{-x}\,(1 - x)$

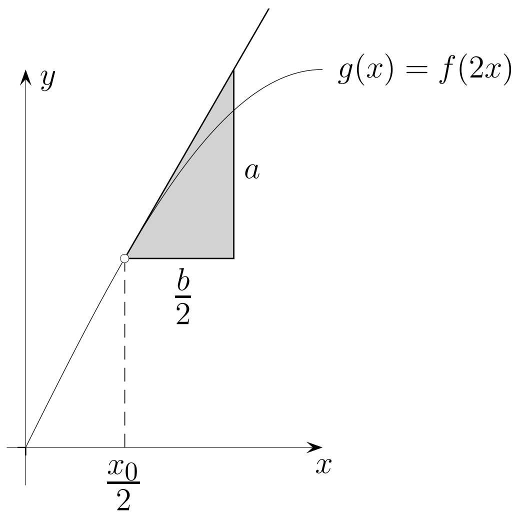
e) $f'(x) = \dfrac{5}{2}\sqrt{x^3}$

Ableitung von $f(2x)$





$$m_1 = \frac{a}{b}$$



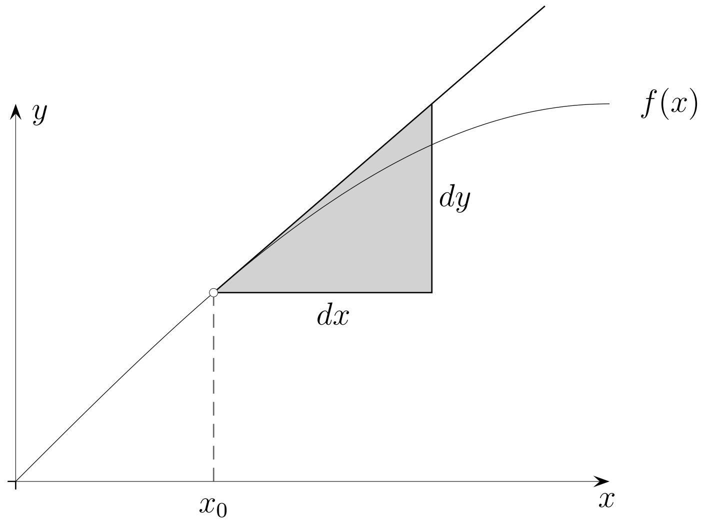
$$m_2 = \frac{2a}{b}$$

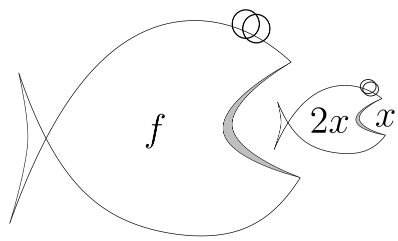
Der Graph von $g(x) = f(2x)$ ist gegenüber $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestaucht.
Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an.
Die Steigungen an entsprechenden Stellen verdoppeln sich:

$$g'(\frac{x_0}{2}) = 2f'(x_0)$$

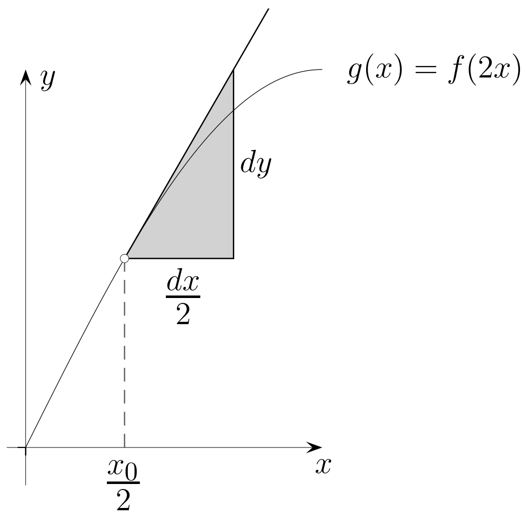
$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 2\,f'(2x)$$ (Das rechte Argument ist doppelt so groß wie das linke.)

Ableitung von $f(2x)$





$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$



$$g'(\frac{x_0}{2}) = \frac{2\,dy}{dx} = f'(x_0) \cdot 2$$

Der Graph von $g(x) = f(2x)$ ist gegenüber $f(x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestaucht.
Den Funktionswert, den f an der Stelle x_0 annimmt, nimmt g schon an der Stelle $\frac{x_0}{2}$ an.
Die Steigungen an entsprechenden Stellen verdoppeln sich:

$$g'(\frac{x_0}{2}) = f'(x_0) \cdot 2$$

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = f'(2x) \cdot 2$$ (Das rechte Argument x_0 ist doppelt so groß wie das linke $\frac{x_0}{2}$.)

Produktregel

Leite ab.

a) $f(x) = x^2 e^{-4x}$

b) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

c) $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$

d) $f(x) = x^2 \sin x$

e) $f(x) = x \cdot \cos 2x$

f) $f(x) = \sin x \cos x$

Lösungen

a) $f'(x) = 2x(1 - 2x)\,e^{-4x}$

b) $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

c) $f'(x) = 4x^3$

d) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

e) $f'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$

f) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$