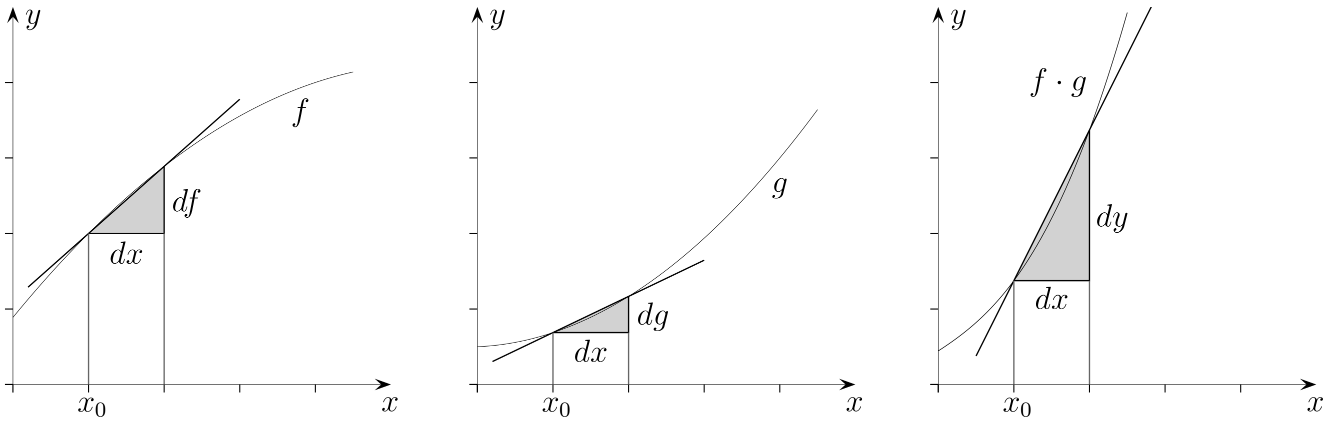
Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)

Leibniz (1646-1716)



Wir haben die Hoffnung, dass die Ableitung von $f \cdot g$ mit Hilfe der Ableitungen von f und g ermittelt werden kann.

Untersuchen wir wieder den Funktionszuwachs Δy der Produktfunktion an der Stelle x_0 für einen Zuwachs um dx.

$$\Delta y = f(x_0 + dx) \cdot g(x_0 + dx) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Um die lineare Abhängigkeit von dx zu erkennen, approximieren wir

$f(x_0 + dx)$ durch $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)\,dx$ und

$g(x_0 + dx)$ durch $g(x_0 + dx) \approx g(x_0) + dg = g(x_0) + g'(x_0)\,dx$

Wir erhalten:

$$\Delta y \approx (f(x_0) + f'(x_0)\,dx) \cdot (g(x_0) + g'(x_0)\,dx) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

Klammern auflösen, zusammenfassen und den linearen Anteil herausfiltern ergibt:

$$dy = (f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0))\ dx \qquad \text{d.h.}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

Leite ab.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Produktregel (Ableitung von $f \cdot g$)

Leite ab.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot x^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

e) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

Lösungen

a) $f'(x) = x^2$

b) $f'(x) = 4x^3$

c) $f'(x) = e^x\,(1 + x)$

d) $f'(x) = x\,e^x\,(2 + x)$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$