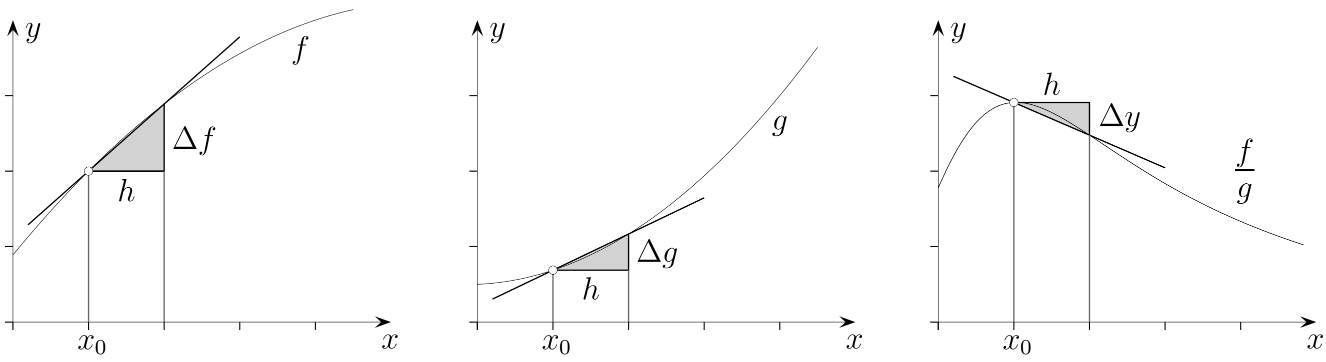
Quotientenregel $\quad$ (Ableitung von $\frac{f}{g}$)



$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta f \; = \; f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{\Delta g}{h} \qquad \text{mit} \quad \Delta g \; = \; g(x_0+h) - g(x_0)$$

Für den Quotienten der Funktionen gilt dann:

$$* \quad (\frac{f}{g})'(x_0) \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h}$$

Mit $\; f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f \quad$ und $\quad g(x_0+h) = g(x_0) + \Delta g \;$ formen wir um (Hauptnenner):

$$\Delta y \; = \; \frac{f(x_0) + \Delta f}{g(x_0) + \Delta g} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \; = \; \frac{(f(x_0) + \Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0) + \Delta g)}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)} \; = \; \frac{\Delta f \; g(x_0) - f(x_0)\Delta g}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)}$$

Dies setzen wir in $*$ ein, es ergibt sich:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{1}{(g(x_0) + \Delta g)g(x_0)} \cdot (\frac{\Delta f}{h} g(x_0) - f(x_0)\frac{\Delta g}{h})$$

Indem wir zu den Grenzwerten übergehen, erhalten wir die Quotientenregel:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) \; = \; \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \qquad \text{oder kurz} \qquad (\frac{f}{g})' \; = \; \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Leite ab.

a) $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ b) $\quad f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$

c) $\quad f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ $\qquad$ d) $\quad f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$

Quotientenregel (Ableitung von $\frac{f}{g}$)

Leite ab.

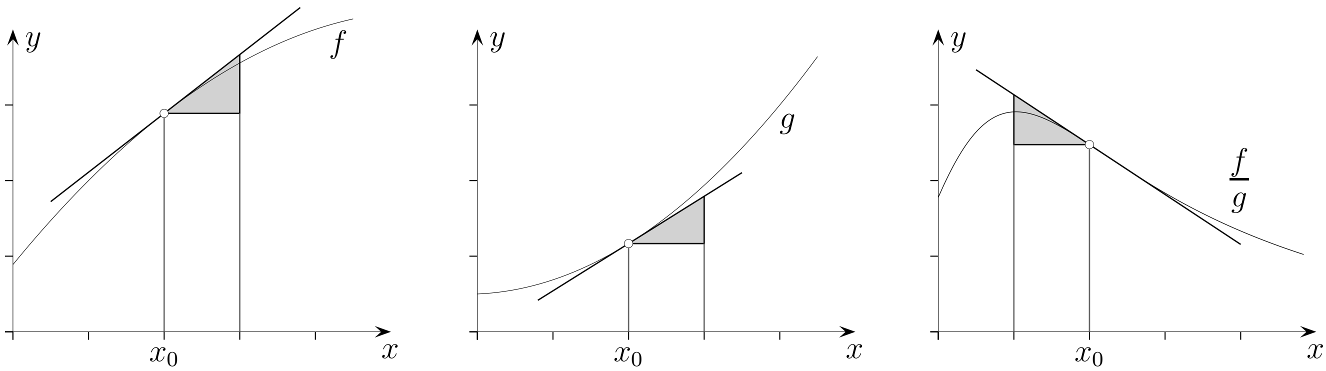
a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{31}{(2x+7)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$ d) $f'(x) = \dfrac{4-4x^2}{(1+x^2)^2}$

Quotientenregel (Ableitung von $\frac{f}{g}$) Leibniz (1646-1716)



Wir gehen hier von Näherungen durch Tangenten an der Stelle $x_0 = 0$ aus

$$f(x) \approx f'(0) \cdot x + f(0) \quad \text{und}$$

$$g(x) \approx g'(0) \cdot x + g(0)$$

und bilden den Quotienten:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(0) \cdot x + f(0)}{g'(0) \cdot x + g(0)}$$

Um die Tangentengleichung zu erkennen, formen wir den Bruch um, wir erweitern.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{\big[f'(0) \cdot x + f(0)\big] \cdot \big[g'(0) \cdot x - g(0)\big]}{\big[g'(0) \cdot x + g(0)\big] \cdot \big[g'(0) \cdot x - g(0)\big]}$$

$$= \frac{-f'(0)g(0) + f(0)g'(0)}{\big(g'(0)x\big)^2 - \big(g(0)\big)^2}\, x + \frac{f'(0)g'(0)x^2 - f(0)g(0)}{\big(g'(0)x\big)^2 - \big(g(0)\big)^2}$$

$$\approx \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{\big(g(0)\big)^2}\, x + \frac{f(0)}{g(0)}$$

Allgemein:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \qquad \text{oder kurz} \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$