Gebrochen rationale Funktion $\quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

1. Der Graph der Funktion f ist punktsymmetrisch, es gilt:
$$f(x) = -f(-x)$$
$$-f(-x) = -\frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{x} = f(x)$$

2. An der Stelle $x = 0$ ist f nicht definiert, an dieser Stelle liegt ein Pol vor.

3. <u>Nullstellen:</u>
Bed.: $\quad f(x) = 0$
Ein Bruchterm ist null, falls der Zähler null ist.
Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt keine reellen Lösungen, daher existieren keine Nullstellen.

4. <u>Extrema:</u>
notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} & \qquad f''(x) &= \frac{2}{x^3} & & \\ &\vdots & & & & \\ x_{1/2} &= \pm 1 & \qquad f''(1) &= 2 > 0 & \qquad f''(-1) &= -2 < 0 \\ & & Min(\,1 \mid 2\,) & & \qquad Max(\,-1 \mid -2\,) & \end{aligned}$$

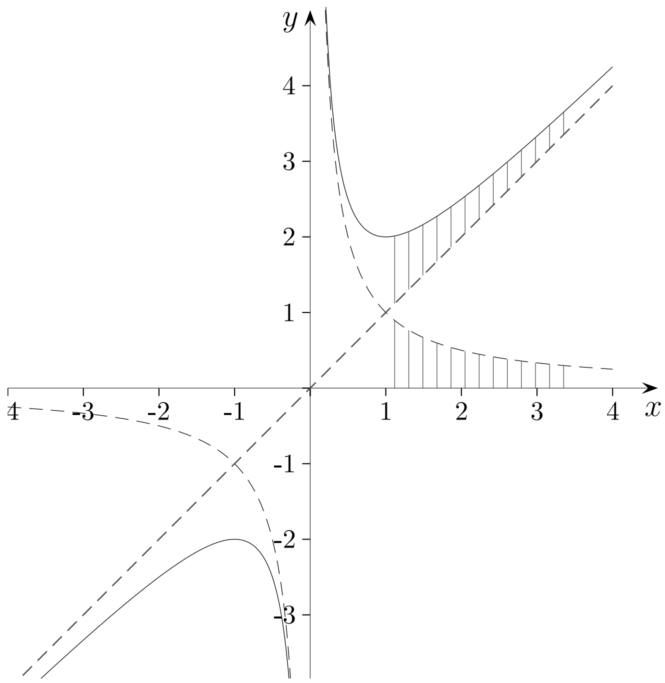
5. <u>Asymptote</u>
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = x$$

Der Graph von f kann leicht skizziert werden, indem die Graphen der beiden Teilfunktionen gezeichnet werden, anschließend erhält man den Graph von f durch grafische Addition.

Eine Asymptote von f ist eine Gerade (lineare Funktion), an die sich der Graph von f für größer (kleiner) werdende x immer mehr annähert (asymptotein griech. nicht zusammenfallen).

Je mehr man sich der Polstelle $\;x = 0\;$ nähert, umso größer werden die Funktionswerte, da durch kleiner werdende x-Werte dividiert wird.

Der Begriff Pol stammt aus der Kartographie. Bei einer bestimmten Abbildung der Erdoberfläche auf eine Ebene kann dem Nordpol als einzigem Punkt kein Punkt in der Ebene zugewiesen werden. Auch hier liegt eine Definitionslücke vor.



Die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{x^3+2}{2x^2}$

1. Keine Symmetrie erkennbar.
2. An der Stelle $x = 0$ ist f nicht definiert, an dieser Stelle liegt ein Pol vor.
3. <u>Nullstellen:</u>
   Bed.: $\quad f(x) = 0$
   Ein Bruchterm ist null, falls der Zähler null ist.
   Die Gleichung $x^3 + 2 = 0$ besitzt eine reelle Lösung, $\quad x = -\sqrt[3]{2}$
4. <u>Extrema:</u>
   notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^3-4}{2x^3} \qquad & f''(x) &= \frac{6}{x^4} \\ &\vdots & & \\ x &= \sqrt[3]{4} & f''(\sqrt[3]{4}) &> 0 \end{aligned}$$
   $$Min(\ \sqrt[3]{4} \mid \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}\ )$$
5. <u>Asymptote</u>
   $$f(x) = \frac{x^3+2}{2x^2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x^2} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{2}x$$

   Der Graph von f kann leicht skizziert werden, indem die Graphen der beiden Teilfunktionen gezeichnet werden. Bei der anschließenden grafischen Addition ist auf das Vorzeichen der zu addierenden Funktionswerte zu achten.

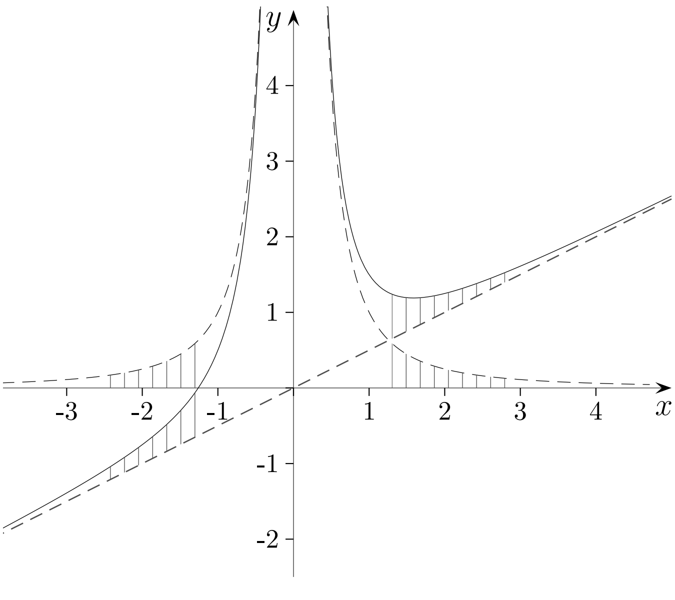
Zur Erinnerung:

Quotientenregel:

$$\left(\frac{Z}{N}\right)' = \frac{Z' \cdot N - Z \cdot N'}{N^2}$$

Potenzrechnung:

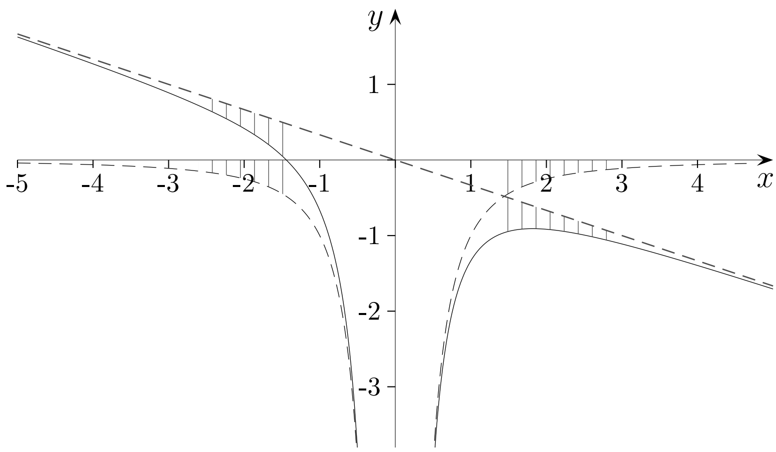
$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$



Die Asymptote ist durch Umformen (Division) des Funktionsterms zu erkennen.
Es ist der lineare Anteil (Gerade) des Terms, wenn der restliche Term für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ gegen null strebt.

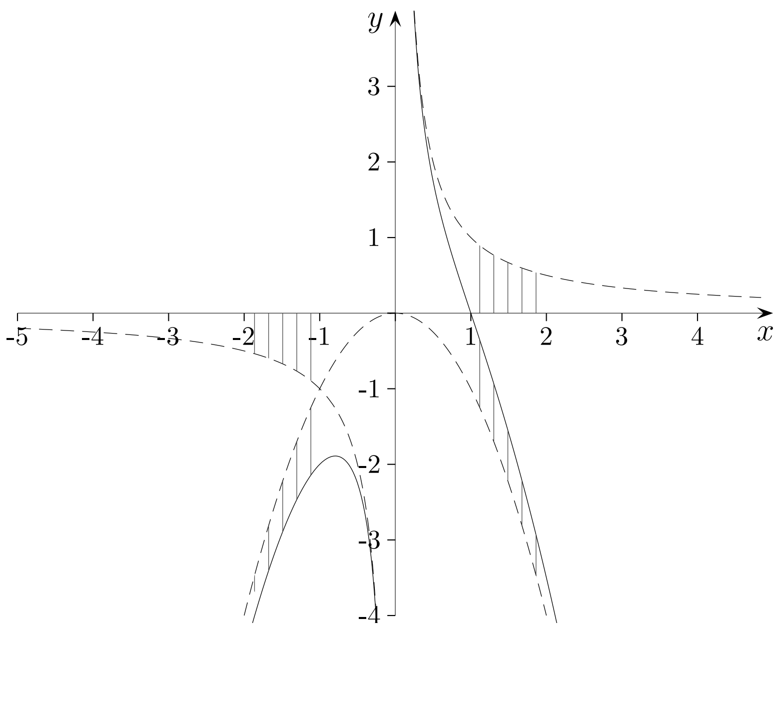
Die Funktion $\quad f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}x$

1. Pol an der Stelle $x = 0$.
2. Nullstellen:
   Bed.: $\quad f(x) = 0$
   $x = -\sqrt[3]{3}$
3. Extrema:
   notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$
   $$f'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{3} \qquad f''(x) = -\frac{6}{x^4}$$
   $\vdots$
   $$Max(\ \sqrt[3]{6} \mid -0{,}91\ )$$
4. Asymptote
   $g(x) = -\frac{1}{3}x$
5. Stammfunktion $\quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x^2$

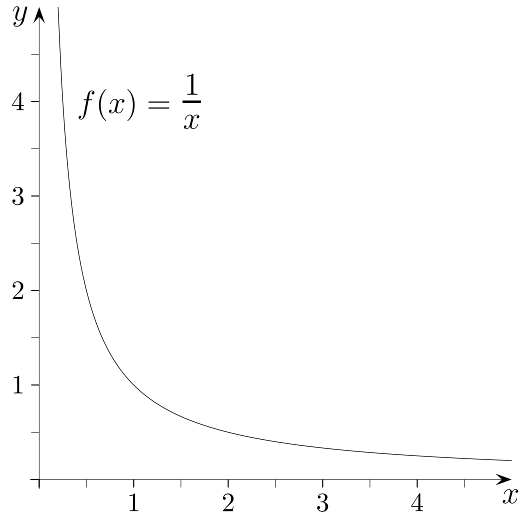


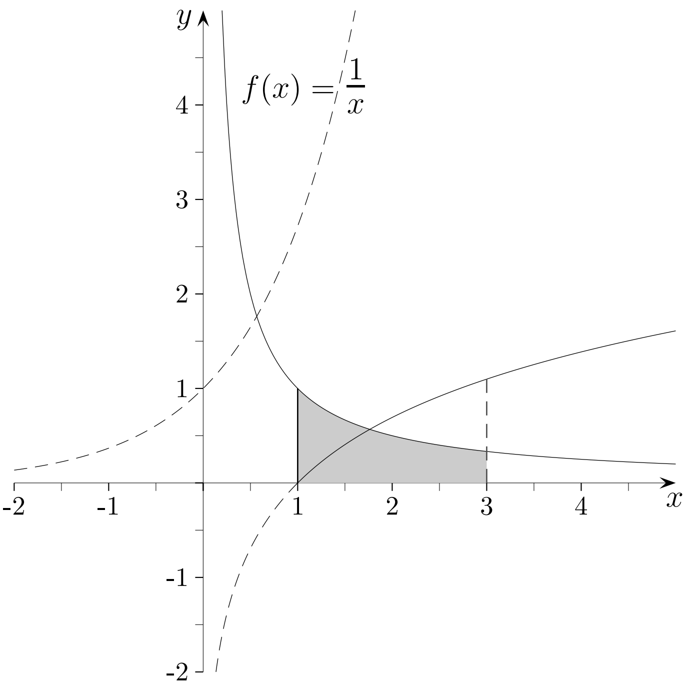
Die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} - x^2$

1. Pol an der Stelle $x = 0$.
2. <u>Nullstellen:</u>
   Bed.: $\quad f(x) = 0$
   $x = 1$
3. <u>Extrema:</u>
   notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} - 2$$
   $$\vdots$$
   $$Max(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \mid -1{,}90)$$
4. <u>Näherungsfunktion</u>
   $g(x) = -x^2$
5. Stammfunktion $\quad F(x) = \ln x - \dfrac{1}{3}x^3$



$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$





Skizzieren wir die Flächenfunktion zu $f(x) = \dfrac{1}{x}$, z. B. an der Stelle $x = 1$ beginnend (an der Stelle $x = 0$ ist f nicht definiert), so gelangen wir zu der Vermutung, dass eine Logarithmusfunktion vorliegt.

Um dies zu überprüfen, leiten wir $g(x) = \ln x$ ab.

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \quad | \; (\,)' \\ e^{\ln x} \cdot (\ln x)' &= 1 \qquad \text{(Kettenregel)} \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

1. Eine Funktion f_k ist gegeben durch $\quad f_k(x) = \frac{k}{4}x^2 - \frac{2}{kx} \quad , k > 0$

   a) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

   b) Für welches k berührt der Graph der Teilfunktion $g_k(x) = \frac{1}{4}kx^2$ die Gerade mit der Gleichung $y = x - 1$? Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunkts.

   c) Untersuchen Sie den Graphen von f_1 auf Extrema und Wendepunkte (für den Wendepunkt genügt die notwendige Bedingung).

   d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f_k und $h_k = -\frac{2}{kx}$ und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ eingeschlossen wird.

   e) Für welches k schneiden sich die Graphen von g_k und h_k rechtwinklig?

1. Lösungen:

   a)

   b) Berührbedingungen:
   $$\begin{aligned} 1.\quad \frac{1}{4}kx^2 &= x - 1 \\ 2.\quad \frac{1}{2}kx &= 1 \end{aligned}$$

   2. Gleichung nach x auflösen und in die 1. einsetzen ergibt: $\quad k = 1, \quad B(2 \mid 1)$

   c)
   $$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{x^3 + 4}{2x^2} \\ f_1''(x) &= \frac{x^3 - 8}{2x^3} \end{aligned}$$

   $f_1'(x) = 0$ ergibt $x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59 \qquad f_1''(-\sqrt[3]{4}) > 0$

   $Min\left(-\sqrt[3]{4} \mid \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) \qquad Min(-1{,}59 \mid 1{,}89) \qquad W(2 \mid 0)$

   d) $\int\limits_1^4 (f_k(x) - h_k(x))\,dx = \frac{k}{4}\int\limits_1^4 x^2\,dx = \frac{63}{12}k$

   e) Bedingungen für das rechtwinklige Schneiden:
   $$\begin{aligned} 1.\quad \frac{1}{4}kx^2 &= -\frac{2}{kx} \\ 2.\quad \frac{1}{2}kx \cdot (-\frac{2}{k}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) &= -1 \end{aligned}$$

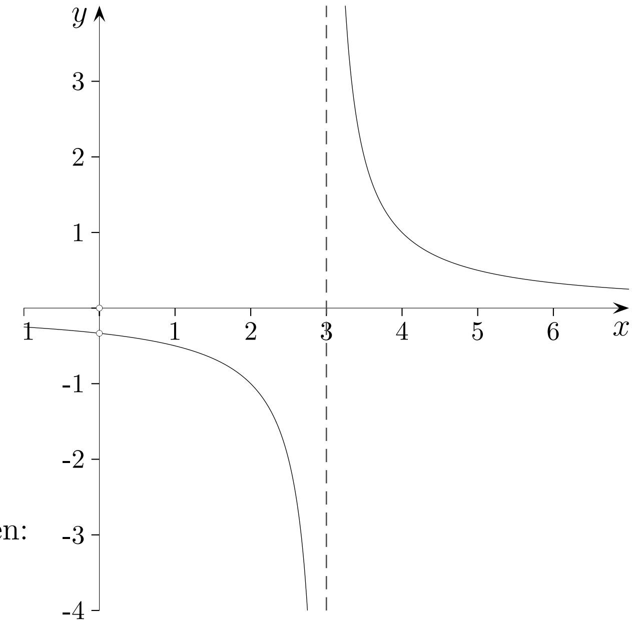
   Aus 2. ergibt sich $\frac{1}{x} = -1$

   $k = 2\sqrt{2}$

Gebrochen rationale Funktionen Typisches

Der Quotient zweier Polynome $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ führt zu einer gebrochen rationalen Funktion, wie z. B. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x}$.

Dies ist jedoch keine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ muss um die Nullstellen des Nennerpolynoms, den Definitionslücken, vermindert werden.
Der maximale Definitionsbereich - und dieser sei stets mit Definitionsbereich gemeint - lautet daher: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0,\, 3\}$.



Der Funktionsterm kann durch x gekürzt werden:

$$f^*(x) = \frac{1}{x-3}$$

Hierdurch entsteht eine Funktion, deren Definitionsbereich auch die Stelle $x = 0$ enthält, ansonsten stimmt sie mit f überein.
Sprechweise: $x = 0$ ist eine hebbare Definitionslücke. Üblich ist, die Bezeichnung f beizubehalten.

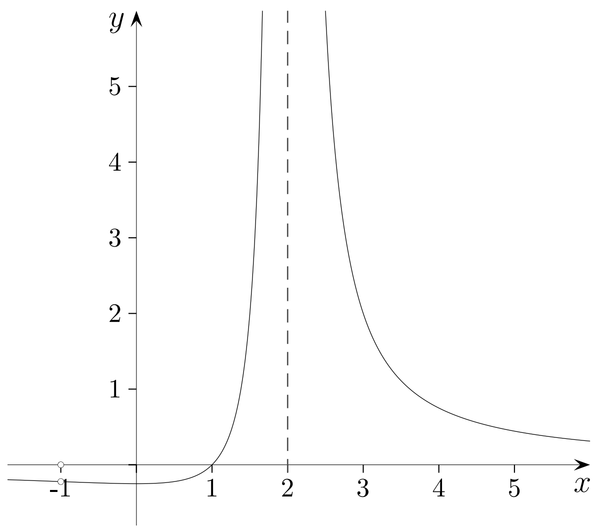
In der Umgebung der verbleibenden Definitionslücke $x = 3$ strebt $f(x)$ gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, hier liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW) vor. Der Graph ist identisch mit dem um 3 Einheiten nach rechts verschobenen Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$.

Untersuchen wir nun die Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-2)^2}$$

Der Definitionsbereich lautet: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,\, 2\}$.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{(x-1)}{(x-2)^2}$$



Hebbare Definitionslücke an der Stelle $x = -1$,
Pol ohne VZW an der Stelle $x = 2$.

Hebbare Lücken und Pole

Beachte: Ist x_N eine Nullstelle eines Polynoms, so enthält das Polynom den Linearfaktor $(x-x_N)$.

Eine gemeinsame Nullstelle x_N des Zähler- und Nennerpolynoms ist eine hebbare Definitionslücke, wenn im vollständig gekürzten Term x_N keine Nullstelle des Nenners mehr ist.

Die übrigen Def.-Lücken sind Polstellen.

Die Faktoren im Nenner ergeben Polstellen:

$(x - x_N)$ mit VZW, allgemein Linearfaktoren mit ungeradem Exponenten,
$(x - x_N)^2$ ohne VZW, allgemein Linearfaktoren mit geradem Exponenten.

Verhalten für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Eine einfache Division des Zählers und Nenners durch die höchste auftretende Potenz belegt Folgendes:

Zählergrad < Nennergrad	$x \to \pm\infty \implies f(x) \to 0$ (x-Achse ist Asymptote.)
Zählergrad = Nennergrad	$x \to \pm\infty \implies f(x) \to c$ (es liegt eine waagerechte Asymptote vor.)
Zählergrad > Nennergrad	$x \to \pm\infty \implies f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$ (Es kann eine Näherungsfunktion ermittelt werden.)

Der letzte Fall soll genauer beleuchtet werden:

Zählergrad = Nennergrad + 1 — Eine Polynomdivision führt zu einer schiefen Asymptote.
d. h. Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad

Zählergrad mehr als 1 größer als der Nennergrad
Eine Polynomdivision führt zu einer ganzrationalen Näherungsfunktion, z. B. einer Parabel.

Bestimmung einer Funktion

Geben Sie eine gebrochen rationale Funktion an, deren Graph die x-Achse im Punkt $N(4 \mid 0)$ schneidet, an der Stelle $x = 1$ einen Pol besitzt und die waagerechte Asymptote $y = 2$ hat.

Lösung:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2(x-1)+a}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2x-2+a}{x-1}$$

$$2 \cdot 4 - 2 + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -6$$

$$f(x) = \frac{2x-8}{x-1}$$

Bestimmung einer Funktion

Ermitteln Sie $f(x)$.
Der Graph einer gebrochen rationalen Funktion

a) $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ hat das Maximum $Max(0 \mid 2)$ und eine Asymptote mit der Steigung 1,

b) $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{(x - c)^2}$ hat den Extrempunkt $E(-1 \mid -1)$ und einen Pol an der Stelle $x = 2$.

Ergebnisse:

a) Asymptote mit $m = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$

$f(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = -4$

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$

$f'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 2$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$$

b) Pol an der Stelle $x = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = 2$

$f(-1) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a = b - 9$

$$f'(x) = -\frac{2acx + bx + bc}{(x - c)^3}$$

$f'(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 12$

mit $a = b - 9$ folgt $a = 3$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x - 2)^2}$$

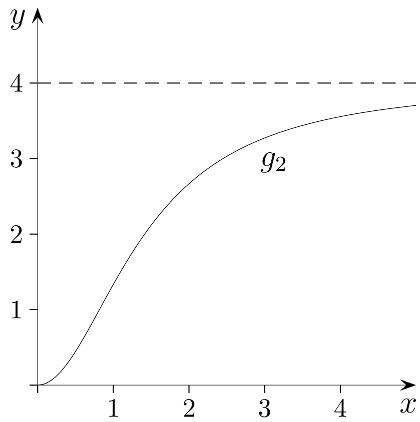
Monotonie und Beschränktheit

Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur wird modellhaft durch die Funktion g_k beschrieben:

$$g_k(x) = \frac{4x^2}{x^2+k}, \quad k > 0,\, x \geq 0.$$

(x in Tagen nach Beginn der Beobachtung, $g_k(x)$ in cm^2 pro Tag)

Zeigen Sie, dass g_k monoton steigend (wachsend) und beschränkt ist.



1. Man betrachtet $g_k'(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g_k(x)$:

   $$g_k'(x) = \ldots = \frac{8kx}{(x^2+k)^2} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad g_k(x) \text{ ist monoton steigend.}$$

   $$\lim_{x\to\infty} g_k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2+k} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{1+\frac{k}{x^2}} = 4$$

2. alternativ:

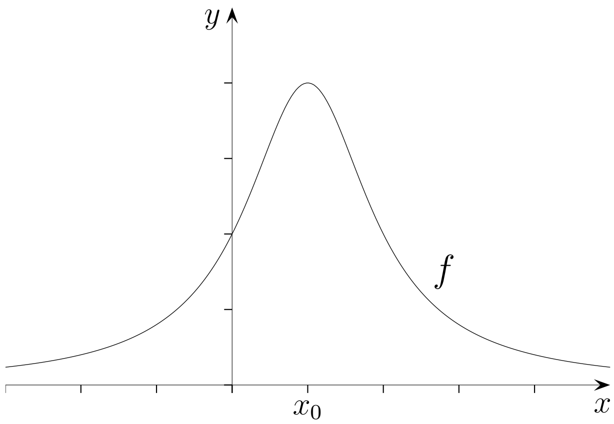
   Mit $\dfrac{4x^2}{x^2+k} = \dfrac{4}{1+\frac{k}{x^2}}$

   kann auf das monotone Wachsen sowie die Beschränktheit geschlossen werden. Wie?

Vorzeichenwechsel

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2+1}$$

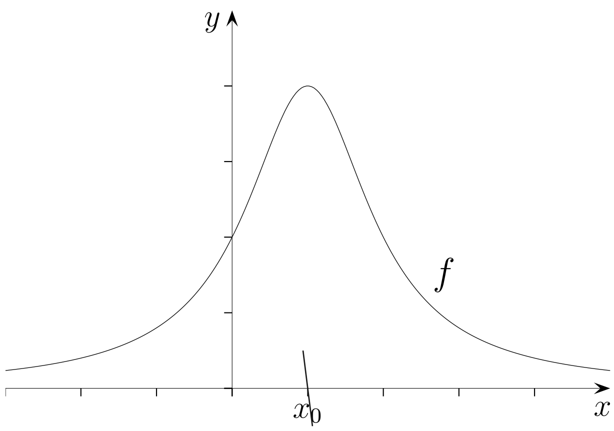


Um das Extremum nachzuweisen, ermitteln wir die 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{-8x+8}{((x-1)^2+1)^2}$$

An der Stelle $x_0 = 1$ wird $f'(x_0) = 0$.

Um den ungefähren Verlauf von f' in einer Umgebung von x_0 zu untersuchen, genügt es, nur den Zähler $y = -8x + 8$ zu betrachten (der Nenner ist positiv).



Es ist also

$$f'(x_0 - h) > 0$$
$$f'(x_0 + h) < 0$$

Die Steigung ist zunächst positiv, dann Null, schließlich negativ.
Es muss daher an der Stelle x_0 ein Maximum vorliegen.

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{12x-9}{x^2-x-2}\ dx\ \ = ?$$

Die zu integrierende Funktion besitzt die Polstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, beachte: $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Es erscheint plausibel, dass die Funktion sich aus einer Summe zweier Funktionen zusammensetzt, die jeweils nur eine dieser Polstellen haben. Dies führt zu:

$$\begin{aligned}\frac{12x-9}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}\\ &= \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 12\\ -2A & + & B & = & -9\\ \hline & & A & = & 7\\ & & B & = & 5\end{array}$$

$$\int \frac{12x-9}{x^2-x-2}\ dx\ = \int \frac{7}{x+1}\ dx\ + \int \frac{5}{x-2}\ dx\ =\ 7\ \ln|\,x+1\,|\ +5\ \ln|\,x-2\,|\ +C$$

alternativ:

$$\frac{12x-9}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \qquad |\ \cdot (x+1)$$

$$\frac{12x-9}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$x = -1 \quad\Longrightarrow\quad A = 7, \quad \text{entsprechend}\ \ B = 5$$

Aufg.

1. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\ dx$

2. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-2x}\ dx$

1. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\ dx \ = \int \frac{1}{x-1}\ dx \ - \int \frac{1}{x+1}\ dx \ = \ \ln|\,x-1\,| \ - \ \ln|\,x+1\,| \ + C$

2. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-2x}\ dx \ = \int \frac{1}{2x}\ dx \ + \int \frac{7}{2(x-2)}\ dx \ = \ \frac{1}{2}\ln|\,x\,| \ + \frac{7}{2}\ln|\,x-2\,| \ + C$

Differenz zur Asymptote

Für welche Werte von x unterscheidet sich der Funktionswert betragsmäßig um weniger als 0,5 vom Wert der Asymptote bzw. Näherungsfunktion?

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x + 2}{2(x-2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x}$

a) Asymptote $y = 1\,, \quad x < -6\,, \quad x > 2$

b) $y = x + 1\,, \quad x < -4\,, \quad x > 8$

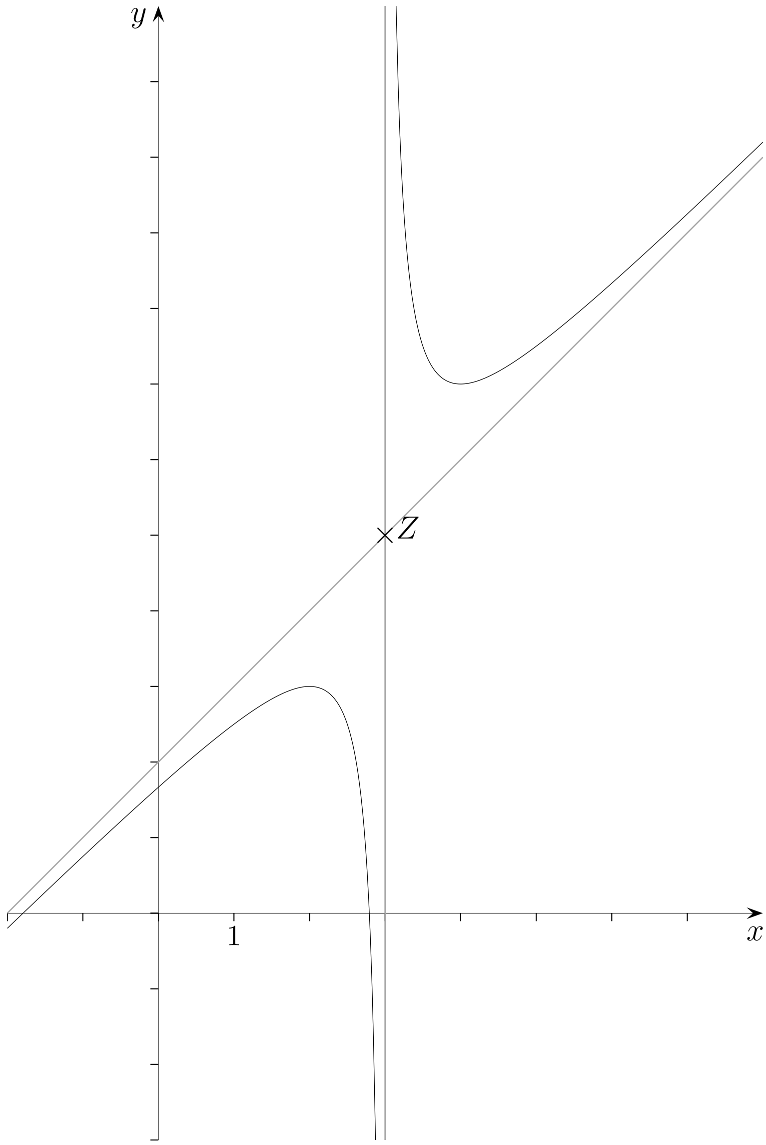
c) $y = \dfrac{x}{2}\,, \quad x < 0{,}586\,, \quad x > 3{,}414$

d) $g(x) = x^2 - 2x\,, \quad x < -2\,, \quad x > 2$

Punktsymmetrie

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x - 3}$.

Zeige, dass der Graph punktsymmetrisch ist zu Z.



Die Asymptote lautet: $y = x + 2$
Pol an der Stelle $x = 3$, $Z(3\,|\,5)$
Verschiebung in den Ursprung: $g(x) = f(x+3) - 5 = \dfrac{x^2+1}{x}$
$g(x) = -g(-x)$

$$\text{Funktion} \qquad f_a(x) = \frac{ax^2 - 1}{x^2 - a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge der Funktion f_a, sowie Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten und Polstellen. Untersuche die Graphen der Schar auf Symmetrie.

b) Zeige ohne Benutzung der zweiten Ableitung, dass die Funktionen mit drei Ausnahmen je ein einziges Extremum haben, und zwar für $\mid a \mid > 1$ ein Maximum und für $0 < \mid a \mid < 1$ ein Minimum. Gib die Parameterwerte der Ausnahmen an.

c) Zeige: Mit einer Ausnahme schneiden sich alle Graphen der Schar in genau zwei Punkten P und Q. Ermittle die Koordinaten dieser Punkte. Gib den Parameterwert der Ausnahme an.

$$\text{Funktion} \qquad f_a(x) = \frac{ax^2 - 1}{x^2 - a}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge der Funktion f_a,
sowie Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten und Polstellen.
Untersuche die Graphen der Schar auf Symmetrie.

$a < 0$: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a \geq 0$: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\pm\sqrt{a}\}$

keine Nullstelle für $a \leq 0$

Nullstellen für $a > 0$: $x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{a}}{a}$
Asymptote: $y = a$
Polstellen nur für $a \geq 0$: $x = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$
Achsensymmetrie zur y-Achse

b) Zeige ohne Benutzung der zweiten Ableitung, dass die Funktionen mit drei Ausnahmen je ein einziges Extremum haben, und zwar für $\mid a \mid > 1$ ein Maximum und für $0 < \mid a \mid < 1$ ein Minimum. Gib die Parameterwerte der Ausnahmen an.

$$f'_a(x) = \frac{2x(1 - a^2)}{(x^2 - a)^2}$$

für $x < 0$ und $\mid a \mid < 1$: $f'(x) < 0 \implies f$ monoton fallend (Nenner ist immer größer Null)
für $x > 0$ und $\mid a \mid < 1$: $f'(x) > 0 \implies f$ monoton steigend
$\implies$ Minimum an der Stelle $x = 0$ für $\mid a \mid < 1$

für $x < 0$ und $\mid a \mid > 1$: $f'(x) > 0 \implies f$ monoton steigend
für $x > 0$ und $\mid a \mid > 1$: $f'(x) < 0 \implies f$ monoton fallend
$\implies$ Maximum an der Stelle $x = 0$ für $\mid a \mid > 1$

Ausnahmen: $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$

c) Zeige: Mit einer Ausnahme schneiden sich alle Graphen der Schar in genau zwei Punkten P und Q. Ermittle die Koordinaten dieser Punkte. Gib den Parameterwert der Ausnahme an.

$S_1(1 \mid -1)$, $S_2(-1 \mid -1)$
Ausnahme: $a = 1$

(siehe Funktionenschar)

$$\text{Funktion} \qquad f_k(x) = \frac{x^2}{k^2} + \frac{k^2}{x^2}, \qquad k > 0$$

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich, das Symmetrieverhalten und die Extrema von f_k.
Wir betrachten nun die Parabel mit der Gleichung $g_a(x) = ax^2$ und bilden für einen beliebigen Wert $x_0 > 0$ die Ordinatendifferenz $d(x_0) = f_3(x_0) - g_a(x_0)$.
Bestimme a so, dass gilt: $\lim\limits_{x_0 \to \infty} d(x_0) = 0$

b) Bestimme für $m > 3$ den Inhalt $A(m)$ des Flächenstücks, das von den Graphen von $g_{\frac{1}{9}}$ und f_3, sowie von den Parallelen zur y-Achse mit den Gleichungen $x = 3$ und $x = m$ begrenzt wird.
Untersuche $A(m)$ für $m \to \infty$ und deute das Ergebnis geometrisch.

c) h ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Ihr Graph hat den Wendepunkt $W(0 \mid 0)$ und berührt den Graphen von f_3 in dessen Minimum $T(3 \mid 2)$. Stelle die Funktionsgleichung von h auf.

d) Wir untersuchen nun die Integralfunktion $H(x) = \int_c^x f_3(t)\,dt$ für $x > 0$ und $c > 0$.
Zeige, ohne die Integration auszuführen, dass H streng monoton zunimmt und genau eine Nullstelle hat.

e) Gegeben ist die Funktion k mit

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{9}{x^2} & \text{für} \quad x \geq 3 \\ x - \dfrac{1}{27}x^3 & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

Zeige, dass k an der Stelle $x = 3$ genau einmal differenzierbar ist.

$$\text{Funktion} \qquad f_k(x) = \frac{x^2}{k^2} + \frac{k^2}{x^2}, \quad k > 0$$

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich, das Symmetrieverhalten und die Extrema von f_k.
Wir betrachten nun die Parabel mit der Gleichung $g_a(x) = ax^2$ und bilden für einen beliebigen Wert $x_0 > 0$ die Ordinatendifferenz $d(x_0) = f_3(x_0) - g_a(x_0)$.
Bestimme a so, dass gilt: $\lim\limits_{x_0 \to \infty} d(x_0) = 0$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Symmetrie zur y-Achse

$f_k'(x) = \dfrac{2x}{k^2} - \dfrac{2k^2}{x^3}$

$Min(\pm k \mid 2)$

$a = \dfrac{1}{9}$, $\quad g_{\frac{1}{9}}$ ist Näherungsfunktion.

b) Bestimme für $m > 3$ den Inhalt $A(m)$ des Flächenstücks, das von den Graphen von $g_{\frac{1}{9}}$ und f_3, sowie von den Parallelen zur y-Achse mit den Gleichungen $x = 3$ und $x = m$ begrenzt wird.
Untersuche $A(m)$ für $m \to \infty$ und deute das Ergebnis geometrisch.

$A(m) = \dfrac{3m-9}{m}$, $\quad \lim\limits_{m \to \infty} A(m) = 3$

c) h ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Ihr Graph hat den Wendepunkt $W(0 \mid 0)$ und berührt den Graphen von f_3 in dessen Minimum $T(3 \mid 2)$. Stelle die Funktionsgleichung von h auf.

$h(x) = x - \dfrac{1}{27}x^3$

d) Wir untersuchen nun die Integralfunktion $H(x) = \displaystyle\int_c^x f_3(t)\,dt$ für $x > 0$ und $c > 0$.
Zeige, ohne die Integration auszuführen, dass H streng monoton zunimmt und genau eine Nullstelle hat.

$H'(x) = f_3(x) > 0$ für $x > 0 \implies$ Behauptung

e) Gegeben ist die Funktion k mit

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{9}{x^2} & \text{für} \quad x \geq 3 \\ x - \dfrac{1}{27}x^3 & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

Zeige, dass k an der Stelle $x = 3$ genau einmal differenzierbar ist.

$k'(3) = 0, \quad f_3''(3) = \dfrac{8}{9}, \quad g''(3) = -\dfrac{2}{9}$

$$\text{Funktion} \qquad f_k(x) = \frac{x^2}{k^2} + \frac{k^2}{x^2}, \quad k > 0$$