

# Abkühlung Aufgabe

1. In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur  $50^{\circ}\text{C}$  zum Zeitpunkt  $x = 0$  zum Abkühlen in einen Raum gebracht. Die Raumtemperatur beträgt  $0^{\circ}\text{C}$  und wird linear um  $10^{\circ}\text{C}$  pro Stunde erhöht.
  - a) Geben Sie die Differentialgleichung an (mit Erläuterung), die diesen Abkühlungsvorgang beschreibt, die Abkühlungskonstante sei  $k = 1$ .
  - b) Lösen Sie die Differentialgleichung und bestimmen Sie die Temperatur, die der Körper nach zwei Stunden hat. Skizzieren und erläutern Sie den Graphen des zeitlichen Verlaufs der Körpertemperatur.
  - c) Ermitteln Sie die diskrete Näherungslösung der Differentialgleichung für die nächsten sechs Werte für  $\Delta x = 0,5$ .

*Lösungshinweise:*

*Differentialgleichungen dieser Art können mit einem Ansatz  $f(x) = a(x) \cdot b(x)$  gelöst werden, wobei ein Faktor so gewählt wird, dass die Rechnung erheblich vereinfacht wird, indem ein Term null wird.*

*Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird  $f'(x)$  durch  $\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$  ersetzt und nach  $y_{n+1}$  aufgelöst.  $y_{n+1}$  kann dann iterativ errechnet werden.*

# Abkühlungsaufgabe      Lösungsskizze

1. a) Die Differentialgleichung lautet:  $f'(x) = -(f(x) - 10x)$ , wobei  $f(0) = 50$  ist.

b) Produktansatz:  $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ ,    kurz:  $f = a \cdot b$

$$a' \cdot b + a \cdot b' + a \cdot b = 10 \cdot x$$

$$a \cdot (b' + b) + a' \cdot b = 10 \cdot x \quad \text{wähle } b \text{ so, dass } b' + b = 0$$

$$\implies b = e^{-x}, \quad \text{DGL: } a' \cdot e^{-x} = 10 \cdot x, \quad a' = e^x \cdot 10 \cdot x$$

partielle Integration führt zu:  $a = (10x - 10) \cdot e^x + C$ ,     $f = a \cdot b = 10 \cdot x - 10 + C \cdot e^{-x}$

$$\text{Bedingung } f(0) = 50, \quad -10 + C = 50 \implies C = 60$$

Also insgesamt:  $f(x) = 10x - 10 + 60e^{-x}$

$$f(2) = 18,12$$

c) Diskrete Näherungslösung:

$$y_{n+1} = y_n + (10x_n - y_n) \cdot 0,5 \iff y_{n+1} = 0,5y_n + 5x_n$$

Anfangswert:  $y_0 = 50$

$x$		0		0,5		1		1,5		2		2,5		3	
Näherung		50		25		15		12,5		13,8		16,9		20,9	

