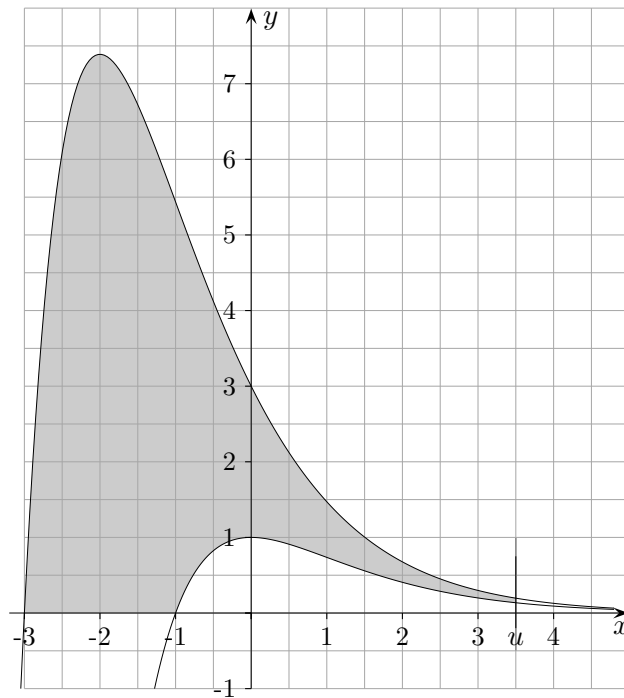


# Aufgaben e-Funktion



Gegeben sind die Funktionen  $f_k(x) = \frac{x+k}{e^x}$ .

a) Leite  $g(x) = \frac{1-x-k}{e^x}$  ab.

b) Die Graphen von  $f_1$  und  $f_3$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = u$  ( $u > 0$ ) begrenzen die Fläche  $A(u)$ . Welcher Flächeninhalt ergibt sich für  $u \rightarrow \infty$ ?

## e-Funktion Ergebnisse

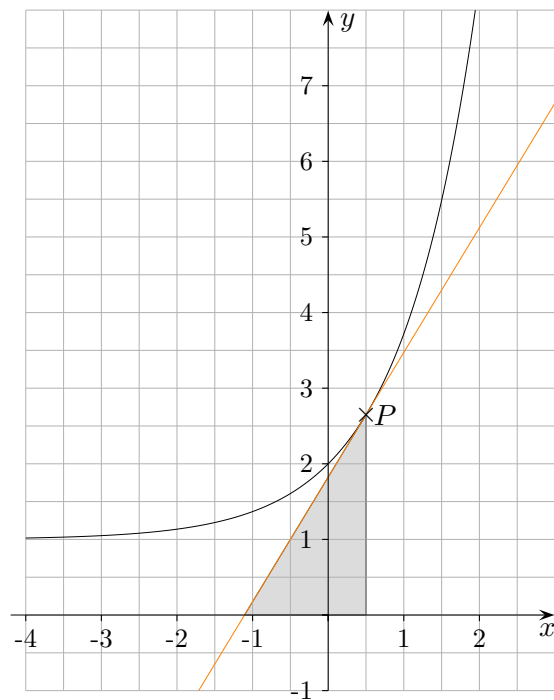
a)  $g'(x) = \frac{x - 2 + k}{e^x}$

Mit  $k = 5$  kann die nächste Teilaufgabe auch algebraisch gelöst werden.

b)  $A(u) = \int_{-3}^{-1} f_3(x) dx + \int_{-1}^u (f_3(x) - f_1(x)) dx = -3e + e^3 + (-2e^{-u} + 2e) = e^3 - e - 2e^{-u}$   
 $f_3(x) - f_1(x) = 2e^{-x}$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = e^3 - e$$

# e-Funktion



Gegeben ist die Funktion  $f(x) = e^x + 1$ ,  
sowie die Tangente in einem Punkt  $P$  (beliebig).

Wie ist  $P$  zu wählen, damit die Länge der Hypotenuse  
des grau gezeichneten Dreiecks minimal wird?

## Aufgaben e-Funktion

1. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ .  
Ermittle die Stellen, an denen die zugehörigen Tangenten durch den Ursprung verlaufen.
2. Der Graph der Funktion  $f(x) = ex + e^{-x}$  schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.  
Ermittle algebraisch deren Inhalt.
3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 5x \cdot e^{-x^2}$ .  
Berechne den maximalen Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten:  
 $A(0 | 0)$ ,  $B(a | 0)$ ,  $C(a | f(a))$  ( $a > 0$ ).
4. Gegeben ist die Funktionenschar  $f(x) = tx^2e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
Begründe ohne jeden Bezug auf den GTR:  
Haben die Tangenten an der Stelle  $x = 4$  einen Punkt gemeinsam und wenn ja welchen?
5. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (e^x - 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - a) Wie lautet eine Stammfunktion von  $f$ ?
  - b) Ermittle algebraisch den Inhalt der (unbegrenzten) Fläche, den der Graph von  $f$  mit der Geraden  $y = 4$  einschließt.
6. Für jede positive Zahl  $a$  ist durch  $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$  eine Funktion gegeben.  
Zeige, dass die positive Nullstelle von  $f_a$  keine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

## Aufgaben e-Funktion

1. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ .  
Ermittle die Stellen, an denen die zugehörigen Tangenten durch den Ursprung verlaufen.

Tangente an der Stelle  $x = a$ :

$$y = 2ae^{-a^2}(x - a) + 1 - e^{-a^2}$$

$y$ -Achsenabschnitt muss Null sein, das ergibt:  $x_1 = 0, x_{2/3} = \pm 1,121$

2. Der Graph der Funktion  $f(x) = ex + e^{-x}$  schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.  
Ermittle algebraisch deren Inhalt.

$$A = \frac{1}{2}e - 1$$

3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 5x \cdot e^{-x^2}$ .  
Berechne den maximalen Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten:  
 $A(0 | 0), B(a | 0), C(a | f(a))$  ( $a > 0$ ).

$$A_{\max} = 0,920$$

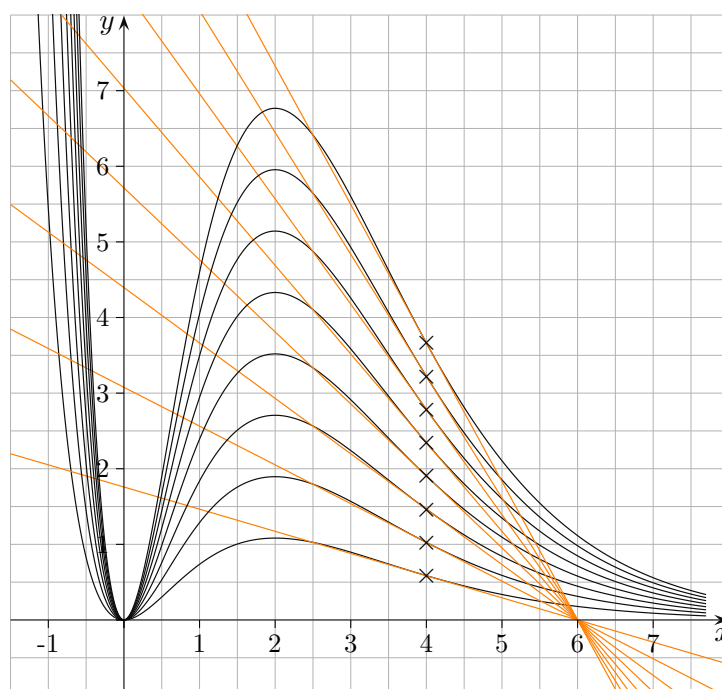
4. Gegeben ist die Funktionenschar  $f(x) = tx^2e^{-x}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ .

Begründe ohne jeden Bezug auf den GTR:

Haben die Tangenten an der Stelle  $x = 4$  einen Punkt gemeinsam und wenn ja welchen?

Tangentengleichung:  $y = -8te^{-4}(x - 4) + 16te^{-4}$

$$y = -8te^{-4}(x - 6), \quad A(6 | 0)$$



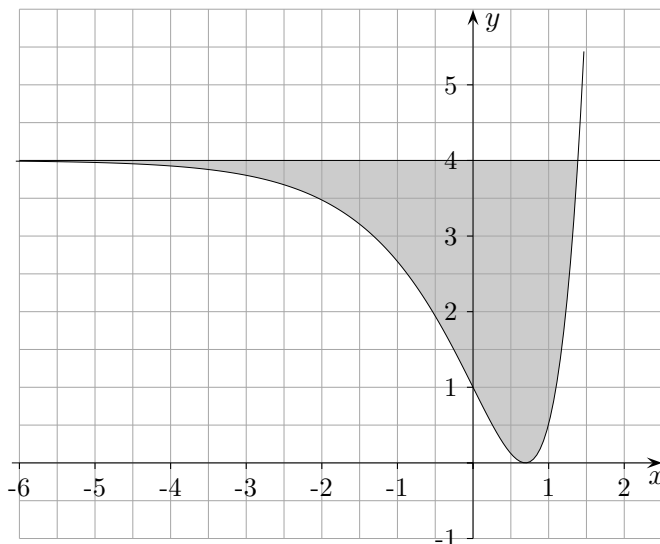
5. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (e^x - 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Wie lautet eine Stammfunktion von  $f$ ?

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 4x$$

b) Ermittle algebraisch den Inhalt der (unbegrenzten) Fläche, den der Graph von  $f$  mit der Geraden  $y = 4$  einschließt.

$$A = 8 \text{ FE}$$



$$A(u) = \int_u^{\ln(4)} (4 - f(x)) dx = \left[ -\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x \right]_u^{\ln(4)} = \dots = 8 + \frac{1}{2}e^{2u} - 4e^u$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} A(u) = 8$$

6. Für jede positive Zahl  $a$  ist durch  $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$  eine Funktion gegeben.

Zeige, dass die positive Nullstelle von  $f_a$  keine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

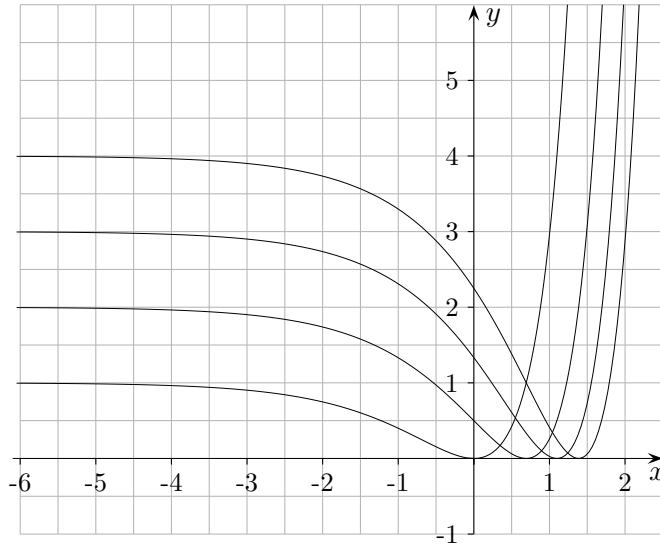
positive Nullstelle:  $x = a$

$$f'_a(x) = e^{ax} \cdot (2x + ax^2 - a^3)$$

$$f'_a(a) = 2ae^{a^2} > 0, \text{ notwendige Bedingung für ein Extremum nicht erfüllt.}$$

## Aufgaben e-Funktion

7. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = \frac{1}{k}(e^x - k)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$   
Ermittle begründet die Parameter für die dargestellten Graphen.



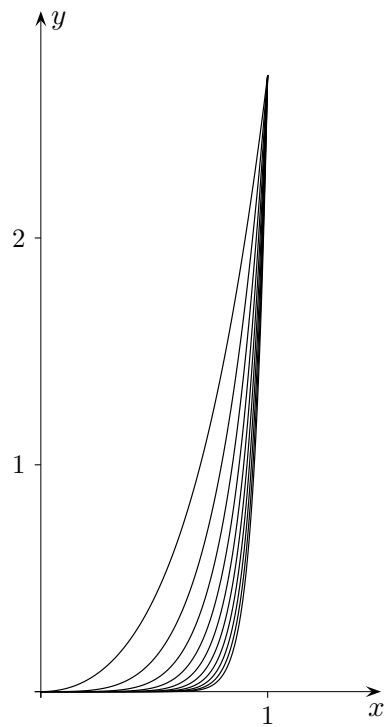
8. Untersuche, ob die differenzierbaren Funktionen  $g(x)$  und  $f(x) = e^{g(x)} + c$  in den Extremstellen und der Art der Extrema übereinstimmen.
9. Untersuche, ob es eine Funktion der Schar  $f_n(x) = x^n \cdot e^x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gibt, deren Graph das Rechteck mit den Eckpunkten  $A(0 | 0)$ ,  $B(1 | 0)$ ,  $C(1 | e)$ ,  $D(0 | e)$  halbiert?
10. Spiegelt man den Graphen der Funktion  $f(x) = e^x$  an der Geraden
- a)  $y = 1$ ,
  - b)  $y = 2$ ,
  - c)  $x = 2$ ,
  - d)  $x = -1$ ,

erhält man den Graphen einer Funktion  $g$ .  
Gib die Gleichung von  $g$  an.

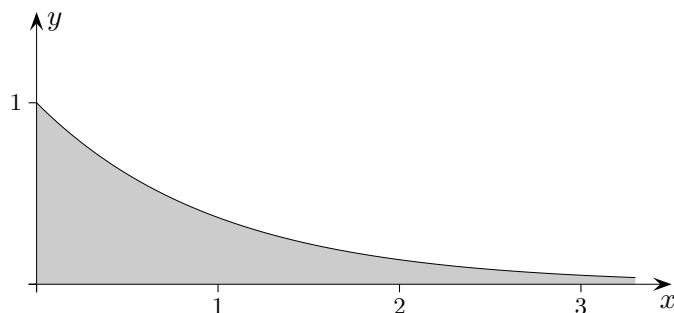


8. Untersuche, ob es eine Funktion der Schar  $f_n(x) = x^n \cdot e^x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gibt, deren Graph das Rechteck mit den Eckpunkten  $A(0 | 0)$ ,  $B(1 | 0)$ ,  $C(1 | e)$ ,  $D(0 | e)$  halbiert?

Hier ist alles zu sehen.



10. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - 1)$  und  $g(x) = 2 - e^x$ .  
Gesucht ist der Inhalt derjenigen Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  sowie der  $y$ -Achse begrenzt wird.



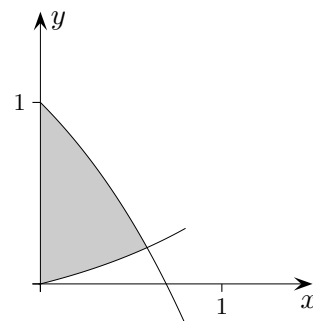
11. Gesucht ist der Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstückes, das im 1. Quadranten zwischen dem Graphen von  $f(x) = e^{-x}$  und der  $x$ -Achse liegt.
12. Unter dem Graphen von  $f(x) = e^{-x^2}$  werden achsenparallele Rechtecke (eine Kante auf der  $x$ -Achse) einbeschrieben. Welches Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?
13. Die Glockenkurve  $f(x) = e^{-x^2}$  soll durch eine quadratische Parabel  $g$  approximiert werden, deren Graph durch das Maximum und die beiden Wendepunkte von  $f$  verläuft.
- Wie lautet die Gleichung der Parabel?
  - Wie groß ist die maximale Abweichung von  $g$  und  $f$  auf dem Intervall, dass durch die Wendestellen von  $f$  begrenzt wird?
14. Gesucht ist eine Exponentialfunktion, deren Funktionsterm die Form  $f(x) = ae^{bx}$  besitzt. Ihr Graph soll den Punkt  $P(2 | e^{-1})$  enthalten und dort die Steigung 1 besitzen.
15. Wie ist  $a > 0$  zu wählen, damit der Inhalt des im 2. Quadranten zwischen dem Graphen von  $f_a(x) = (a + 1) \cdot e^{ax}$  und der  $x$ -Achse liegenden, nach links unbegrenzten, Flächenstückes den Wert 2 annimmt?
16. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$
- Wo schneidet die Tangente an der Stelle  $x = 2$  die  $x$ -Achse?
  - Weise nach, dass  $F(x) = (-1 - x) \cdot e^{1-x}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.
  - Ermittle algebraisch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von  $f$  in den Grenzen von 1 bis 2.
17. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = e^{2x} - a \cdot e^x$ ,  $a > 0$ .
- Untersuche  $f_a$  auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
  - Auf welcher Kurve (Ortskurve) liegen alle Extrema?

10. Gegeben sind die Funktionen  $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - 1)$  und  $g(x) = 2 - e^x$ .

Gesucht ist der Inhalt derjenigen Fläche, die von den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  sowie der  $y$ -Achse begrenzt wird.

$$x_s = \ln \frac{9}{5}$$

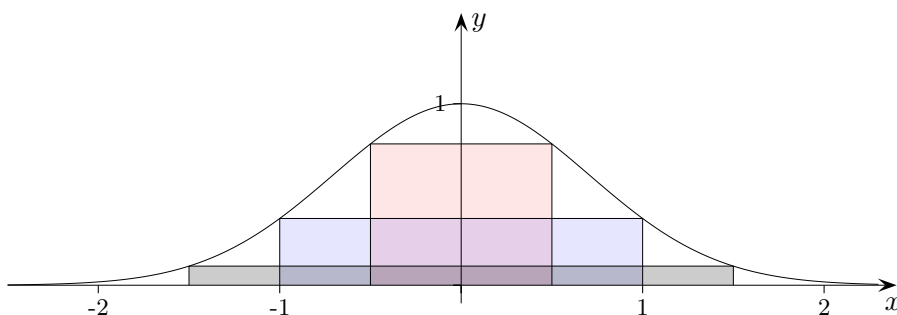
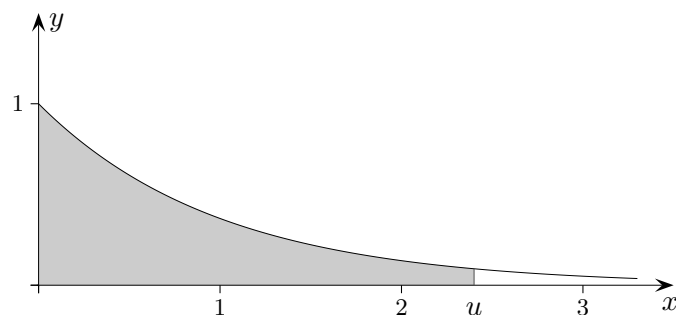
$$A = \frac{9}{4} \ln \frac{9}{5} - 1 = 0,323$$



11. Gesucht ist der Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstückes, das im 1. Quadranten zwischen dem Graphen von  $f(x) = e^{-x}$  und der  $x$ -Achse liegt.

$$A(u) = \int_0^u e^{-x} dx = \dots = 1 - e^{-u}$$

$$A = \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 1$$

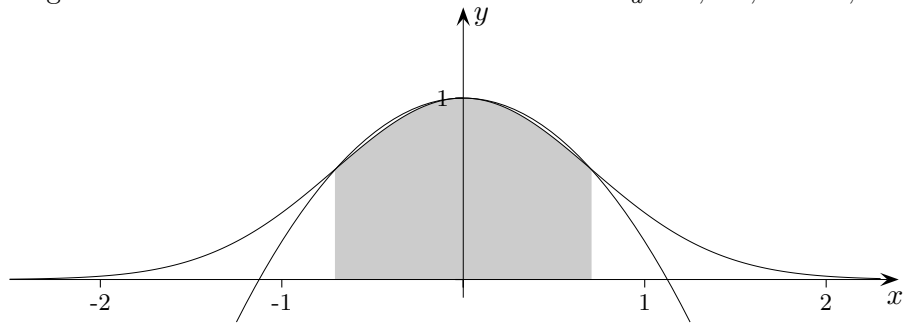


12. Unter dem Graphen von  $f(x) = e^{-x^2}$  werden achsenparallele Rechtecke (eine Kante auf der  $x$ -Achse) eingeschrieben. Welches Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?

Die Extremstelle stimmt mit der Wendestelle  $x_w = \frac{1}{\sqrt{2}}$  überein.

13. Die Glockenkurve  $f(x) = e^{-x^2}$  soll durch eine quadratische Parabel  $g$  approximiert werden, deren Graph durch das Maximum und die beiden Wendepunkte von  $f$  verläuft.

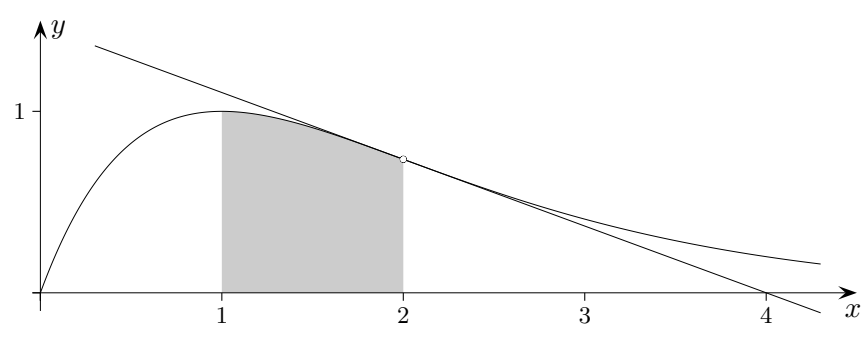
- a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?  $g(x) = -0,79x^2 + 1$   
 b) Wie groß ist die maximale Abweichung von  $g$  und  $f$  auf dem Intervall, das durch die Wendestellen von  $f$  begrenzt wird?  $x_d = 0,486, d = 0,024$



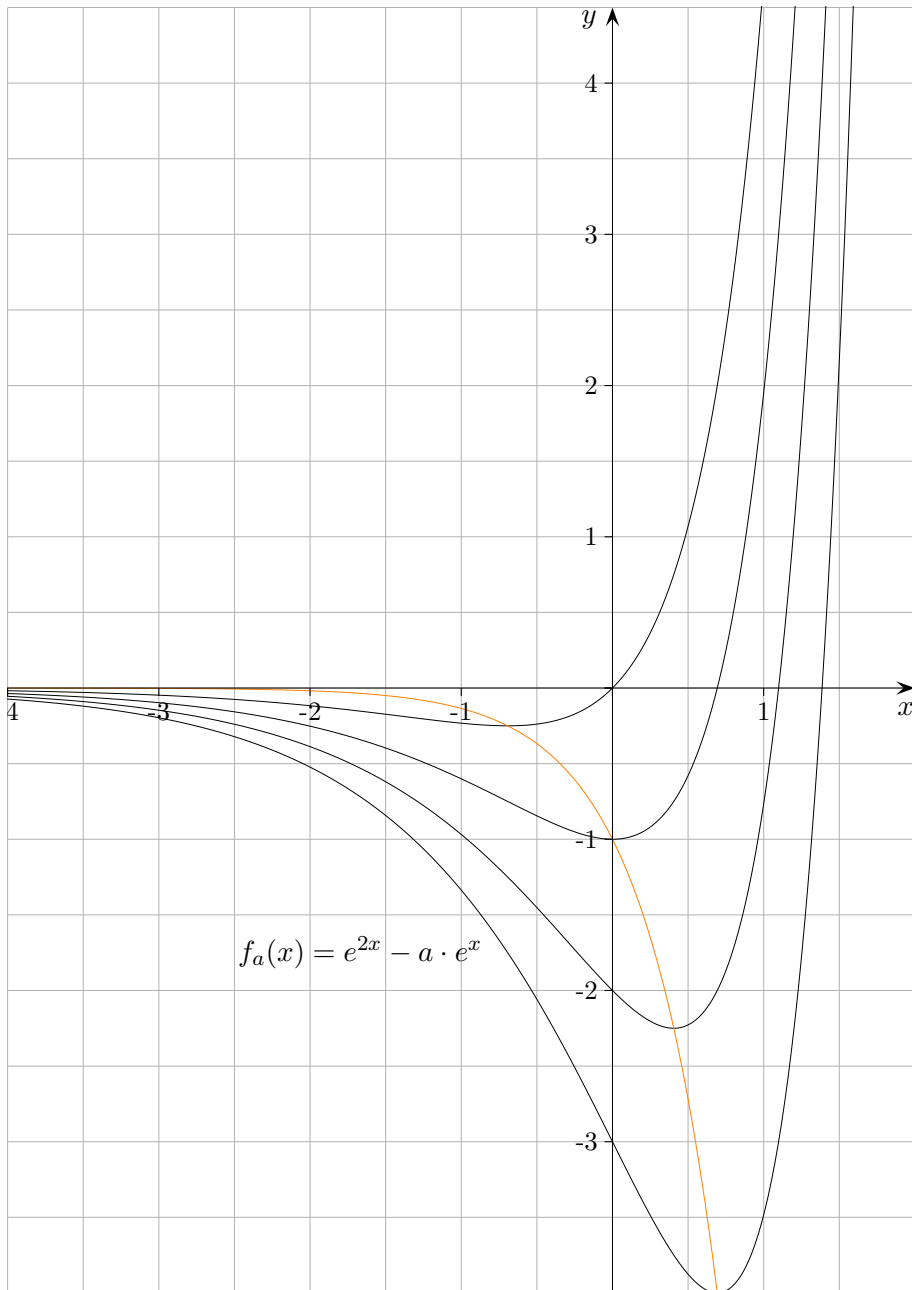
14. Gesucht ist eine Exponentialfunktion, deren Funktionsterm die Form  $f(x) = ae^{bx}$  besitzt. Ihr Graph soll den Punkt  $P(2 | e^{-1})$  enthalten und dort die Steigung 1 besitzen.  $f(x) = e^{e(x-2)-1}$

15. Wie ist  $a > 0$  zu wählen, damit der Inhalt des im 2. Quadranten zwischen dem Graphen von  $f_a(x) = (a + 1) \cdot e^{ax}$  und der  $x$ -Achse liegenden, nach links unbegrenzten, Flächenstückes den Wert 2 annimmt?  $a = 1$

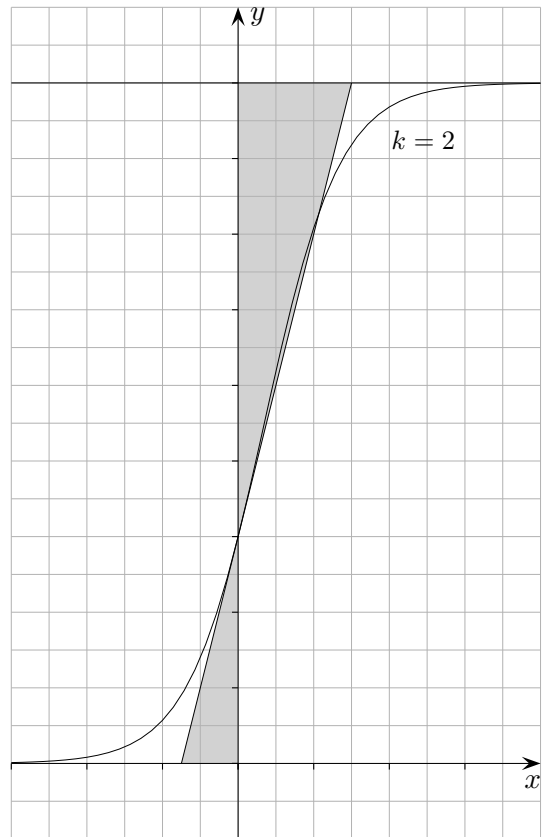
16. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$   
 a) Wo schneidet die Tangente an der Stelle  $x = 2$  die  $x$ -Achse?  $x = 4$   
 b) Weise nach, dass  $F(x) = (-1 - x) \cdot e^{1-x}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.  $F'(x) = f(x)$   
 c) Ermittle algebraisch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von  $f$  in den Grenzen von 1 bis 2.  $A = 2 - \frac{3}{e}$



17. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = e^{2x} - a \cdot e^x, a > 0$ .  
 a) Untersuche  $f_a$  auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Nullstelle  $x_n = \ln a$   
 $Min(\ln \frac{a}{2} | -\frac{a^2}{4})$   
 $W(\ln \frac{a}{4} | -\frac{3}{16} a^2)$   
 b) Auf welcher Kurve (Ortskurve) liegen alle Extrema?  $y = -e^{2x}$



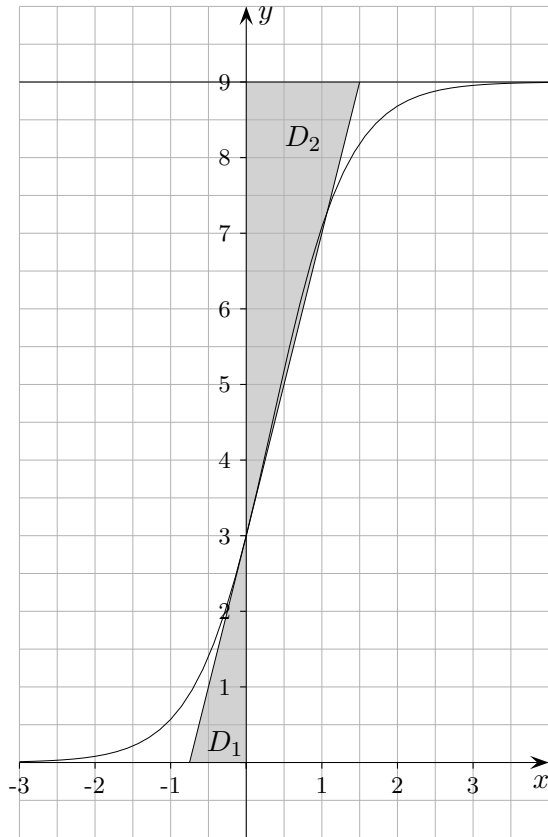
# Logistisches



18. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = \frac{9}{1 + 2e^{-kx}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$

- Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf den Kurvenverlauf.
- Die Tangenten  $t_k$  an die Graphen von  $f_k$  an der Stelle  $x = 0$  bilden mit den Koordinatenachsen jeweils ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob folgende Aussage für jedes  $k$  gilt: Wenn  $k$  halbiert wird, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt dieser Dreiecke.
- In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der gezeichneten Dreiecke für allgemeines  $k$ ?

# Logistisches, Hinweise



18. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = \frac{9}{1 + 2e^{-kx}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$

- a) Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf den Kurvenverlauf.
- b) Die Tangenten  $t_k$  an die Graphen von  $f_k$  an der Stelle  $x = 0$  bilden mit den Koordinatenachsen jeweils ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob folgende Aussage für jedes  $k$  gilt: Wenn  $k$  halbiert wird, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt dieser Dreiecke.

$$f'_k(x) = \frac{18ke^{-kx}}{(1 + 2e^{-kx})^2}$$

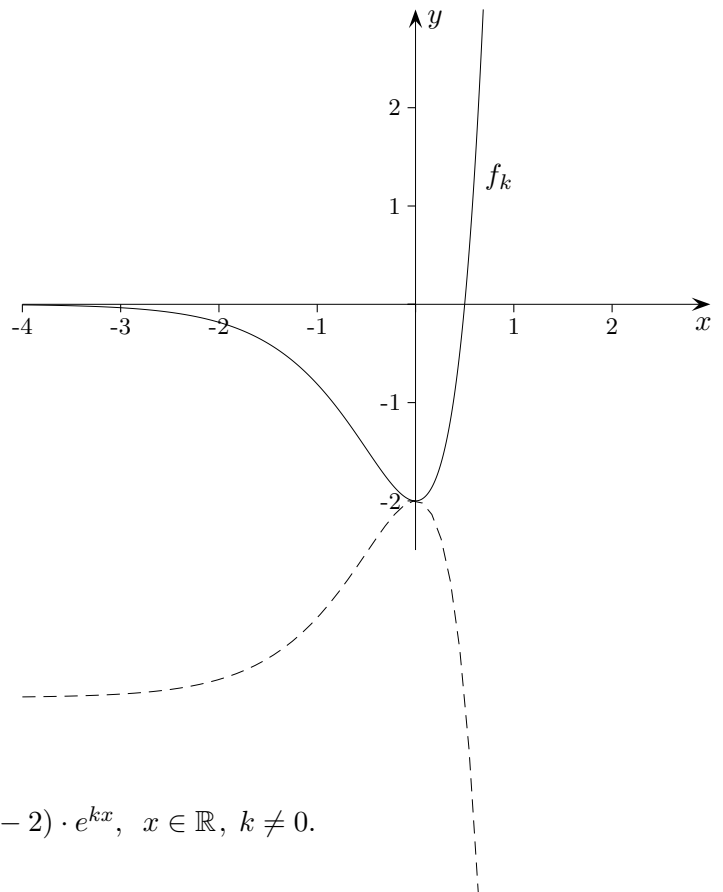
$$t_k(x) = 2kx + 3$$

$$D_1 = \frac{9}{4k}$$

Die Aussage ist richtig.

- c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der gezeichneten Dreiecke für allgemeines  $k$ ?

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{4}$$



Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = (2kx - 2) \cdot e^{kx}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ .

Die 1. Ableitung lautet:

$$f'_k(x) = 2k^2 x \cdot e^{kx} \quad (\text{Nachweis nicht erforderlich})$$

- a) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von  $k$ ) die Nullstellen, Stellen mit waagerechter Tangente, Wendestellen (nur notwendige Bedingung betrachten). Finden Sie ohne Probieren heraus, für welches  $k$  der Graph abgebildet ist. Ermitteln Sie einen Funktionsterm für den gestrichelten Graphen. Untersuchen Sie (ohne Funktionen zu zeichnen), ob die Funktionenschar einen gemeinsamen Punkt hat.

- b) Überprüfen Sie, ob  $a$  und  $b$  so gewählt werden können, dass  $F(x) = (ax - b) \cdot e^{2x}$  eine Stammfunktion von  $g(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$  ist. Welchen Inhalt hat die unbegrenzte Fläche, die der Graph von  $g$  mit der  $x$ -Achse einschließt?

- c) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten der Funktionenschar lauten:

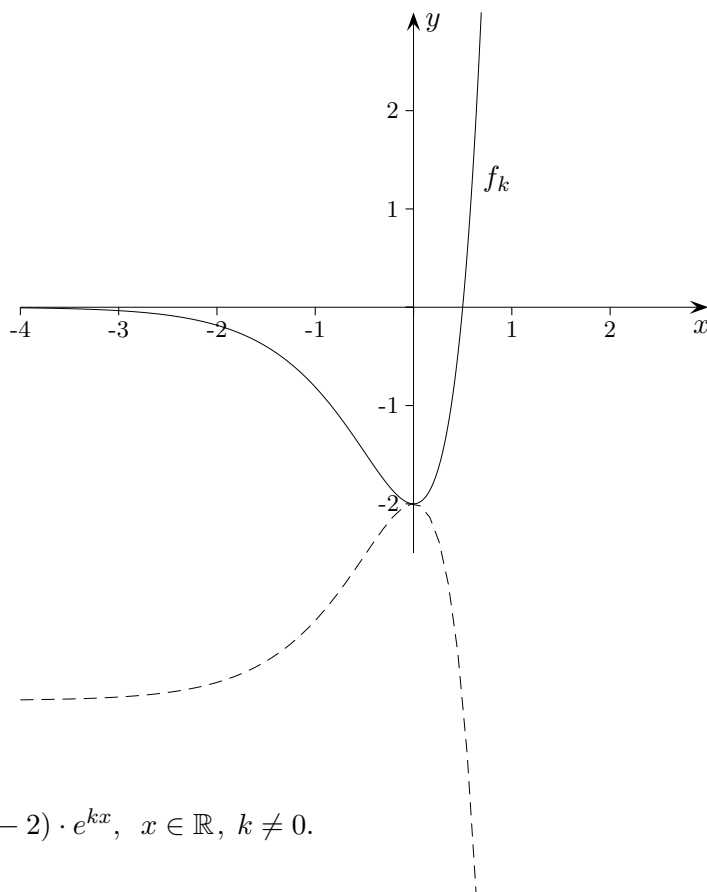
$$t_k(x) = -\frac{2k}{e} \left( x + \frac{1}{k} \right) - \frac{4}{e}$$

Die Wendetangenten schließen mit den Koordinatenachsen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ein. Ermitteln Sie einen Wert für  $k$ , so dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

- d) Sei die Gerade  $h: y = x - 3$  gegeben. Beschreiben Sie (keine Rechnung), wie die Punkte auf dem Graphen von  $g(x)$  (siehe b)) und der Geraden  $h$  ermittelt werden können, die sich am nächsten sind.



## Lösungshinweise



Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = (2kx - 2) \cdot e^{kx}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ .

Die 1. Ableitung lautet:

$$f'_k(x) = 2k^2 x \cdot e^{kx} \quad (\text{Nachweis nicht erforderlich})$$

a) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von  $k$ ) die

Nullstellen,

Stellen mit waagerechter Tangente,

Wendestellen (nur notwendige Bedingung betrachten).

$$x_N = \frac{1}{k}$$

$$x_E = 0$$

$$f''_k(x) = 2k^2 e^{kx}(kx + 1), \quad x_W = -\frac{1}{k}$$

Finden Sie ohne Probieren heraus, für welches  $k$  der Graph abgebildet ist.

$$x_N = 0,5 \implies k = 2$$

Ermitteln Sie einen Funktionsterm für den gestrichelten Graphen.

$$h(x) = -4 - f_2(x)$$

Untersuchen Sie (ohne Funktionen zu zeichnen), ob die Funktionenschar einen gemeinsamen

Punkt hat.

$$P(0 \mid -2)$$

b) Überprüfen Sie, ob  $a$  und  $b$  so gewählt werden können, dass  $F(x) = (ax - b) \cdot e^{2x}$

eine Stammfunktion von  $g(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$  ist.

$$F'(x) = e^{2x}(2ax + a - 2b), \quad a = b = 2$$

Welchen Inhalt hat die unbegrenzte Fläche, die der Graph von  $g$  mit der  $x$ -Achse einschließt?

$$A = |-e|$$

c) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten der Funktionenschar lauten:

$$t_k(x) = -\frac{2k}{e} \left(x + \frac{1}{k}\right) - \frac{4}{e} \quad f'_k\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{2k}{e}, \quad f_k\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{4}{e}$$

Die Wendetangenten schließen mit den Koordinatenachsen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck

ein. Ermitteln Sie einen Wert für  $k$ , so dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

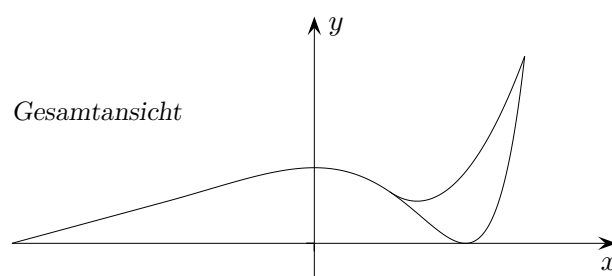
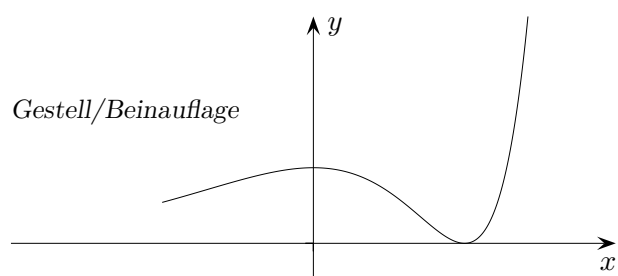
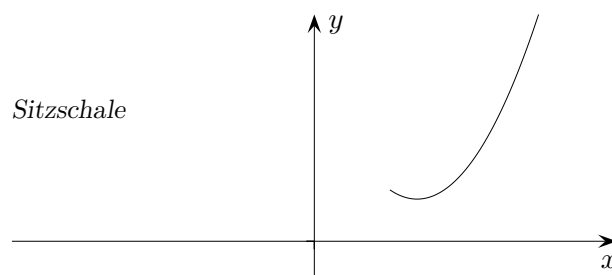
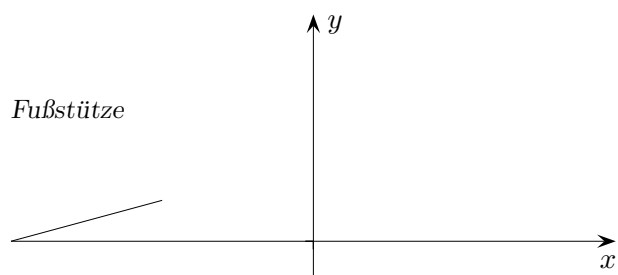
$$f'_k(x) = -1, \quad k = \frac{e}{2}$$

d) Sei die Gerade  $h: y = x - 3$  gegeben. Beschreiben Sie (keine Rechnung), wie die Punkte auf dem

Graphen von  $g(x)$  (siehe b)) und der Geraden  $h$  ermittelt werden können, die sich am nächsten sind.

$$f'_k(x) = 1, \dots$$

# Wellness-Liege



Für das Design einer Wellness-Liege sollen Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt werden.

- a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage  $g$ , wobei für  $g$  die Gleichung  $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x - 2)^2$  gilt.
- a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von  $g$  gilt:  $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$
  - a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an  $g$ , wenn der Übergang an  $x = -2$  erfolgt.
  - a3) Geben Sie den Bereich für  $x$  an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.
- b) Als Sitzschale wurde ein Ausschnitt aus der Parabel  $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$  ermittelt.
- b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von  $g$  und  $s$  an der Stelle  $x = 1$  knickfrei ineinander übergehen.
  - b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale.

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden ( $x$ -Achse) soll ein bebürstetes Aluminiumblech verwendet werden, das aus einem rechteckigen Blech herausgeschnitten werden soll. Hier gilt: 1  $LE$  entspricht 0,25  $m$ .

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

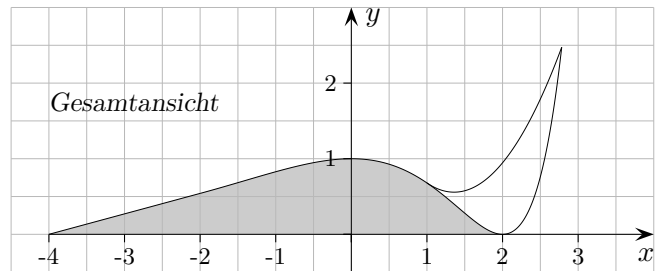
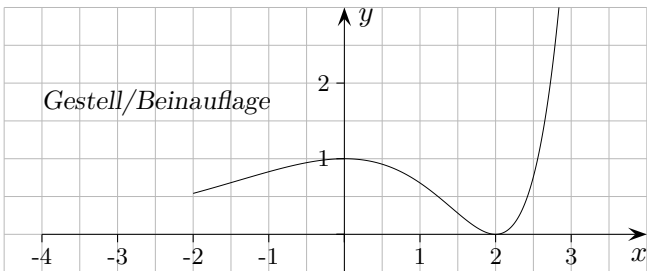
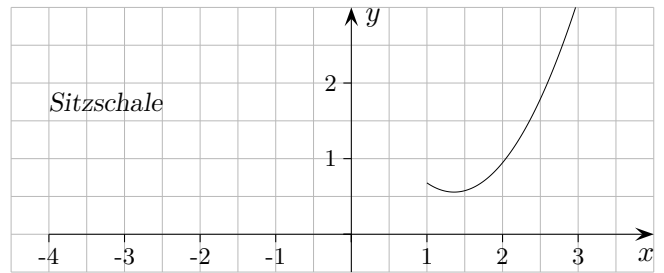
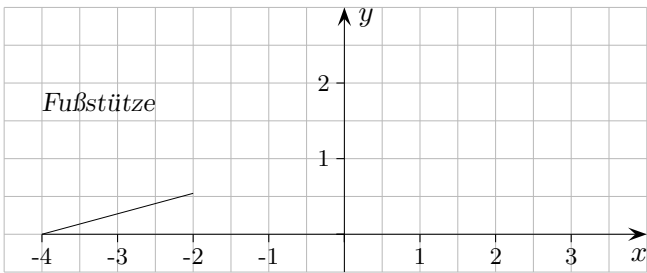
c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

c3) Eine Stammfunktion der Funktion  $g$  lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4} e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in  $m^2$ .

# Wellness-Liege



Für das Design einer Wellness-Liege sollen Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt werden.

- a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage  $g$ , wobei für  $g$  die Gleichung  $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x - 2)^2$  gilt.
- a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von  $g$  gilt:  $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$
- a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an  $g$ , wenn der Übergang an  $x = -2$  erfolgt.  

$$t(x) = \frac{2}{e^2}x + \frac{8}{e^2}$$
- a3) Geben Sie den Bereich für  $x$  an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.  

$$-4 \leq x \leq -2$$
- b) Als Sitzschale wurde ein Ausschnitt aus der Parabel  $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$  ermittelt.
- b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von  $g$  und  $s$  an der Stelle  $x = 1$  knickfrei ineinander übergehen.  

$$s(1) = g(1) = \frac{e}{4}, \quad s'(1) = g'(1) = -\frac{e}{4}$$
- b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale.  

$$x = \frac{e}{2}$$

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden ( $x$ -Achse) soll ein bebürstetes Aluminiumblech verwendet werden, das aus einem rechteckigen Blech herausgeschnitten werden soll. Hier gilt: 1  $LE$  entspricht 0,25  $m$ .

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss. Mindestlänge 1,5  $m$ , Mindestbreite 0,25  $m$

c3) Eine Stammfunktion der Funktion  $g$  lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4} e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

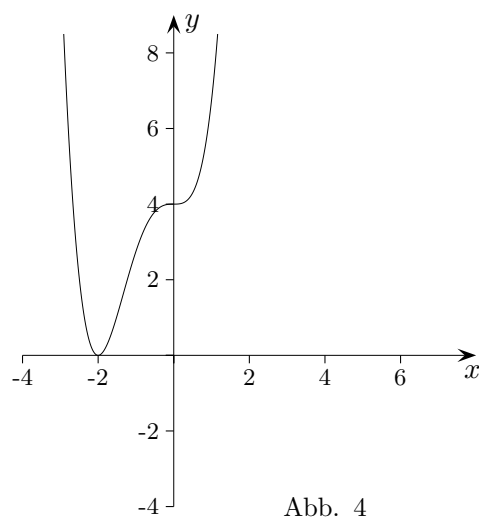
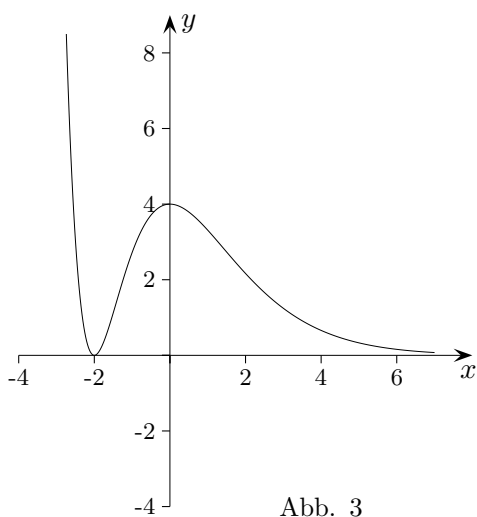
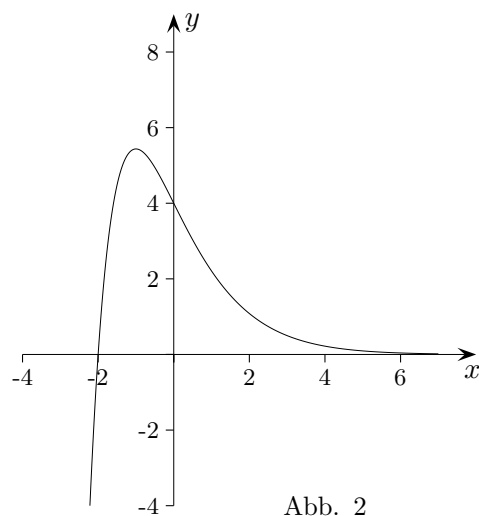
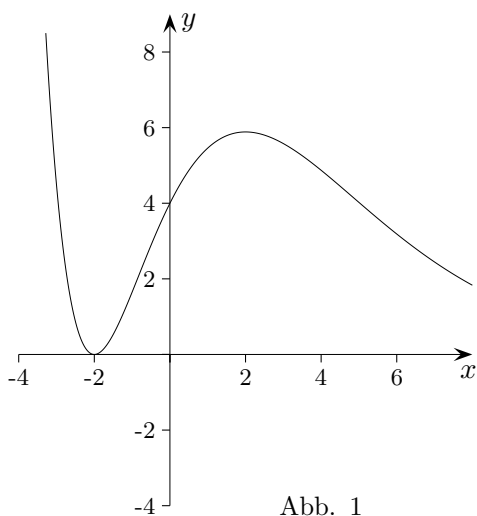
Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in  $m^2$ .

$$1 \text{ FE} \hat{=} (0,25 \text{ m})^2$$
$$(G(2) - G(-4)) \cdot \frac{1}{16} \text{ m}^2 = 0,217 \text{ m}^2$$

# Graph gesucht

Gegeben sind die Funktion  $f(x) = (x + 2)^2 \cdot e^{-x}$  und ihre Ableitung  $f'(x) = -(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$ .

- a) Berechnen Sie  $f''(x)$ .
- b) Vier Funktionsgraphen sind dargestellt, einer von ihnen gehört zur Funktion  $f$ .  
Geben Sie den entsprechenden Graphen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.



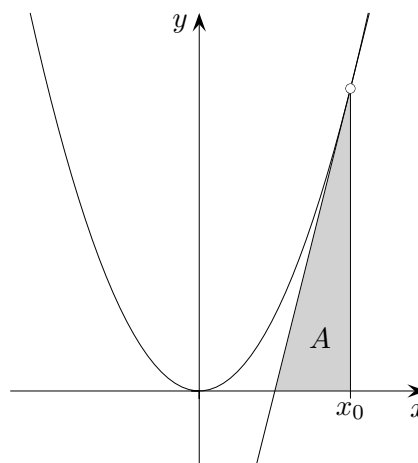
1. Untersuche, ob  $a$  so gewählt werden kann, dass  $F(x) = -e^{-x} \cdot (x + a)$  eine Stammfunktion von  $f(x) = x \cdot e^{-x}$  ist.
2. Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums  $f(x) = 35 - a e^{-kx}$ .  
Im Punkt  $A(0 | 25)$  beträgt die Tangentensteigung  $m = \frac{1}{2}$ . Bestimme  $a$  und  $k$ .
3. Welcher Punkt ( $x$ - und  $y$ -Koordinate) auf der Geraden  $y = -\frac{1}{3}x + 6$  hat von  $C(1 | 0)$  die kürzeste Entfernung? (GTR)
4. Untersuche, ob für die Funktion  $f(x) = x^2 e^{-x}$  eine Tangente an einer Stelle  $x_0 \neq 0$  existiert, die durch den Ursprung verläuft? Ermittle ggf. die Stelle  $x_0$ . (ohne GTR)

1. Untersuche, ob  $a$  so gewählt werden kann, dass  $F(x) = -e^{-x} \cdot (x + a)$  eine Stammfunktion von  $f(x) = x \cdot e^{-x}$  ist.  $F'(x) = e^{-x} \cdot (x + a - 1), a = 1$
  
2. Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums  $f(x) = 35 - a e^{-kx}$ .  
 Im Punkt  $A(0 | 25)$  beträgt die Tangentensteigung  $m = \frac{1}{2}$ . Bestimme  $a$  und  $k$ .  $f(0) = 25, a = 10$   
 $f'(0) = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{20}$
  
3. Welcher Punkt ( $x$ - und  $y$ -Koordinate) auf der Geraden  $y = -\frac{1}{3}x + 6$  hat von  $C(1 | 0)$  die kürzeste Entfernung? (GTR)  $P(2,7 | 5,1)$
  
4. Untersuche, ob für die Funktion  $f(x) = x^2 e^{-x}$  eine Tangente an einer Stelle  $x_0 \neq 0$  existiert, die durch den Ursprung verläuft? Ermittle ggf. die Stelle  $x_0$ . (ohne GTR)  

$$t(x) = -x_0 e^{-x_0} (-2 + x_0)(x - x_0) + x_0^2 e^{-x_0}, t(0) = 0, x_0 = 1$$

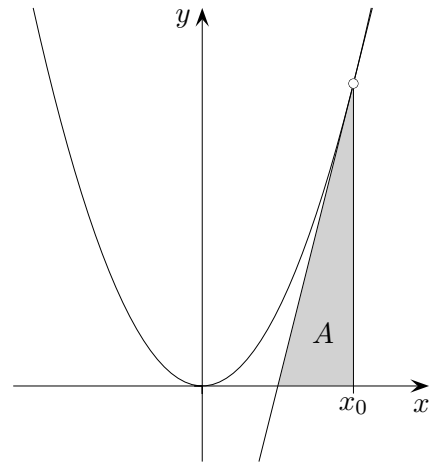


# Analysis Aufgaben



1. Gegeben ist die Parabel  $f(x) = x^2$ .  
Wie ist  $x_0$  zu wählen, damit  $A = 2 FE$  gilt?  
*Probieren ist hier nicht erlaubt.*
2. Gegeben ist die Funktion  $h(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ .  
Weisen Sie nach, dass sich die erste Ableitung von  $h$  in der Form  $h'(x) = 2x \cdot g(x)$   
mit geeigneter Funktion  $g$  schreiben lässt.
3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$ .  
Die Funktion  $g$  ist differenzierbar. Beurteilen Sie, ob der Graph von  $f$  an allen Extremstellen  
von  $g$  jeweils eine waagerechte Tangente hat.
4. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$ .  
Untersuchen Sie, wie viele Stellen mit waagerechter Tangente der Graph von  $f$  haben kann,  
wenn  $g$  eine quadratische Funktion ist.

# Analysis Aufgaben



1. Gegeben ist die Parabel  $f(x) = x^2$ .  
Wie ist  $x_0$  zu wählen, damit  $A = 2$  FE gilt?  
*Probieren ist hier nicht erlaubt.*

$$\text{Tangentengleichung } y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$$

$$\text{Nullstelle } x_N = \frac{x_0}{2}$$

$$\text{Dreiecksfläche } A = \frac{1}{4}x_0^3 = 2$$

$$x_0 = 2$$

2. Gegeben ist die Funktion  $h(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ .  
Weisen Sie nach, dass sich die erste Ableitung von  $h$  in der Form  $h'(x) = 2x \cdot g(x)$   
mit geeigneter Funktion  $g$  schreiben lässt.

$$h'(x) = 2x \cdot (e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2})$$

3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$ .  
Die Funktion  $g$  ist differenzierbar. Beurteilen Sie, ob der Graph von  $f$  an allen Extremstellen  
von  $g$  jeweils eine waagerechte Tangente hat.

$$f'(x) = (g(x) + 1) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$g'(x_E) = 0 \implies f'(x_E) = 0$$

4. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$ .  
Untersuchen Sie, wie viele Stellen mit waagerechter Tangente der Graph von  $f$  haben kann,  
wenn  $g$  eine quadratische Funktion ist.

$$f'(x) = (g(x) + 1) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Hat  $g(x) + 1 = 0$  zwei Lösungen, stimmen diese nicht mit der Scheitelstelle von  $g$  überein,  
sodass der Graph von  $f$  drei Stellen mit waagerechter Tangente hat.

Hat  $g(x) + 1 = 0$  eine Lösung, stimmt diese mit der Scheitelstelle von  $g$  überein,  
sodass der Graph von  $f$  eine Stelle mit waagerechter Tangente hat.

Hat  $g(x) + 1 = 0$  keine Lösung, so hat der Graph von  $f$  nur an der Scheitelstelle von  $g$   
eine waagerechte Tangente.

# Analysis Aufgaben

1. Zeige, dass  $f(x) = G - ae^{-kx}$  die DGL  $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$  löst.
2. Zeige, dass  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$  die DGL  $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$  löst.
3. Zeige, dass  $f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}}$  die DGL  $f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$  mit  $k^* = \frac{k}{G}$  löst.

Für die Grafik siehe [Wachstumsprozesse](#).

4. Ermittle die Wendestelle der Funktion  $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ .
5. Untersuche, ob der Graph von  $f(x) = g(x)e^{g(x)}$  an allen Extremstellen von  $g$  jeweils eine waagerechte Tangente hat.
6. Zeige:

Für eine ganzrationale Funktion  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  gilt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

( $f$  ist durch die Koeffizienten eindeutig bestimmt.)

# Analysis Aufgaben

1. Zeige, dass  $f(x) = G - ae^{-kx}$  die DGL  $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$  löst.

$$\begin{aligned}f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \\ake^{-kx} &= k \cdot (G - (G - ae^{-kx})) \\&= k \cdot (G - G + ae^{-kx}) \\&= ake^{-kx}\end{aligned}$$

2. Zeige, dass  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  die DGL  $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$  löst.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x}{1+e^x} && \text{möglich wäre die Umformung } f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \\f'(x) &= \frac{e^x \cdot (1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{(e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) \\&= f(x) \cdot (1 - f(x))\end{aligned}$$

3. Zeige, dass  $f(x) = \frac{G}{1+ae^{-kx}}$  die DGL  $f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$  mit  $k^* = \frac{k}{G}$  löst.

Für die Grafik siehe [Wachstumsprozesse](#).

4. Ermittle die Wendestelle der Funktion  $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ . beachte:  $I'(x) = e^{-x^2}$

5. Untersuche, ob der Graph von  $f(x) = g(x)e^{g(x)}$  an allen Extremstellen von  $g$  jeweils eine waagerechte Tangente hat.

Tipp: Bilde die Ableitung von  $f$  (Produkt- und Kettenregel).

6. Zeige:

Für eine ganzrationale Funktion  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  gilt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Wir bestimmen den Funktionswert und die Ableitungen an der Stelle  $x = 0$ . Es ist:

$$f(0) = a_0; \quad f'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2a_2; \quad f'''(0) = 3!a_3; \quad \dots; \quad f^{(n)}(0) = n!a_n$$