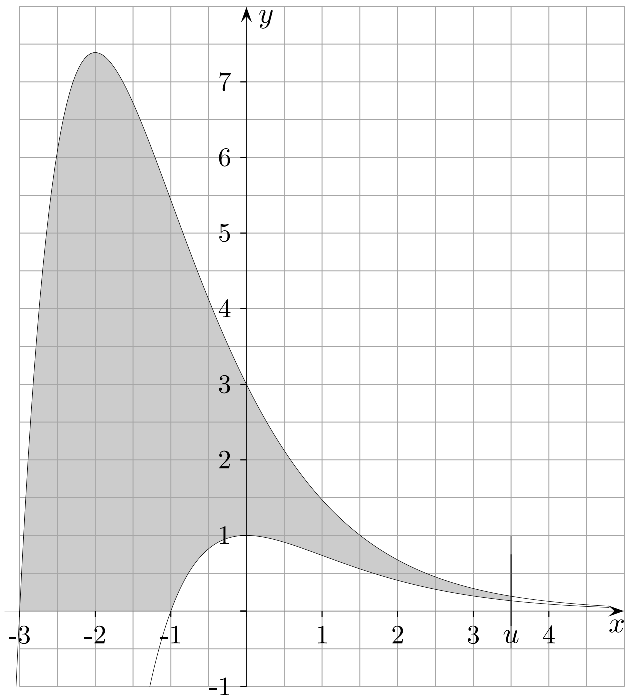
Aufgaben e-Funktion



Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = \dfrac{x+k}{e^x}$.

a) Leite $g(x) = \dfrac{1-x-k}{e^x}$ ab.

b) Die Graphen von f_1 und f_3, die x-Achse und die Gerade $x = u$ $(u > 0)$ begrenzen die Fläche $A(u)$. Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $u \longrightarrow \infty$?

e-Funktion   Ergebnisse

a) $g'(x) = \dfrac{x-2+k}{e^x}$

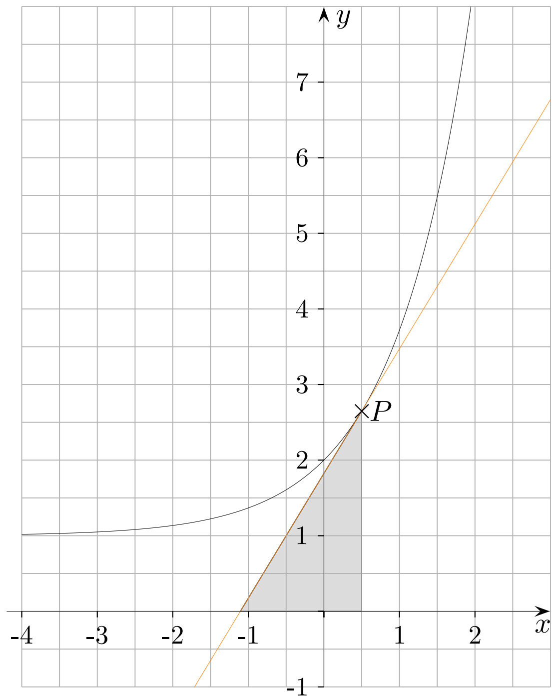
Mit $k = 5$ kann die nächste Teilaufgabe auch algebraisch gelöst werden.

b) $A(u) = \displaystyle\int_{-3}^{-1} f_3(x)\,dx + \int_{-1}^{u} (f_3(x) - f_1(x))\,dx = -3e + e^3 + (-2e^{-u} + 2e) = e^3 - e - 2e^{-u}$

$f_3(x) - f_1(x) = 2e^{-x}$

$\lim\limits_{u\to\infty} A(u) = e^3 - e$

e-Funktion



Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x + 1$,
sowie die Tangente in einem Punkt P (beliebig).

Wie ist P zu wählen, damit die Länge der Hypotenuse des grau gezeichneten Dreiecks minimal wird?

Aufgaben e-Funktion

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 - e^{-x^2}$.
   Ermittle die Stellen, an denen die zugehörigen Tangenten durch den Ursprung verlaufen.

2. Der Graph der Funktion $f(x) = ex + e^{-x}$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
   Ermittle algebraisch deren Inhalt.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5x \cdot e^{-x^2}$.
   Berechne den maximalen Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten:
   $A(0 \mid 0),\ B(a \mid 0),\ C(a \mid f(a))\ \ (a > 0)$.

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = tx^2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

   Begründe ohne jeden Bezug auf den GTR:
   Haben die Tangenten an der Stelle $x = 4$ einen Punkt gemeinsam und wenn ja welchen?

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (e^x - 2)^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

   a) Wie lautet eine Stammfunktion von f?

   b) Ermittle algebraisch den Inhalt der (unbegrenzten) Fläche,
      den der Graph von f mit der Geraden $y = 4$ einschließt.

6. Für jede positive Zahl a ist durch $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ eine Funktion gegeben.

   Zeige, dass die positive Nullstelle von f_a keine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

Aufgaben e-Funktion

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 - e^{-x^2}$.
   Ermittle die Stellen, an denen die zugehörigen Tangenten durch den Ursprung verlaufen.

   Tangente an der Stelle $x = a$:
   $y = 2ae^{-a^2}(x-a) + 1 - e^{-a^2}$
   y-Achsenabschnitt muss Null sein, das ergibt: $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 1{,}121$

2. Der Graph der Funktion $f(x) = ex + e^{-x}$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
   Ermittle algebraisch deren Inhalt.

   $A = \frac{1}{2}e - 1$

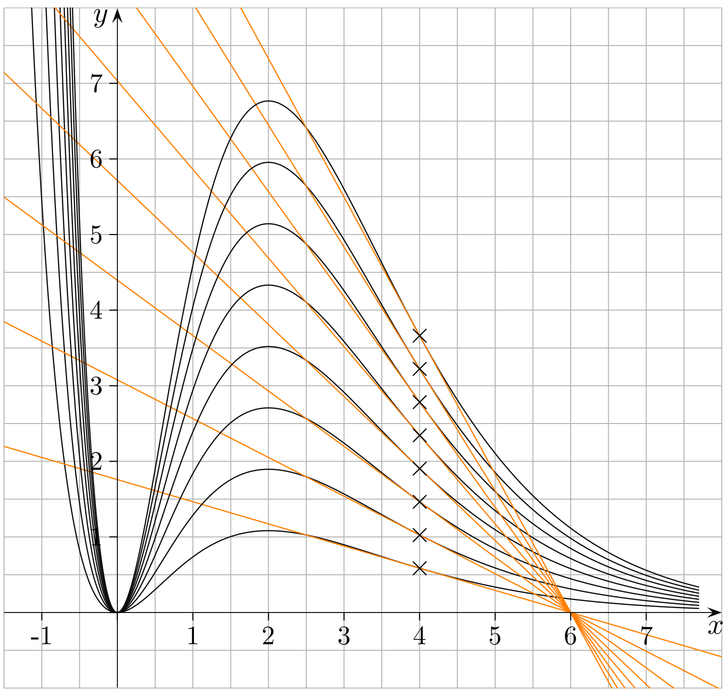
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5x \cdot e^{-x^2}$.
   Berechne den maximalen Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten:
   $A(0 \mid 0),\ B(a \mid 0),\ C(a \mid f(a))\ (a > 0)$.

   $A_{\max} = 0{,}920$

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = tx^2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

   Begründe ohne jeden Bezug auf den GTR:
   Haben die Tangenten an der Stelle $x = 4$ einen Punkt gemeinsam und wenn ja welchen?

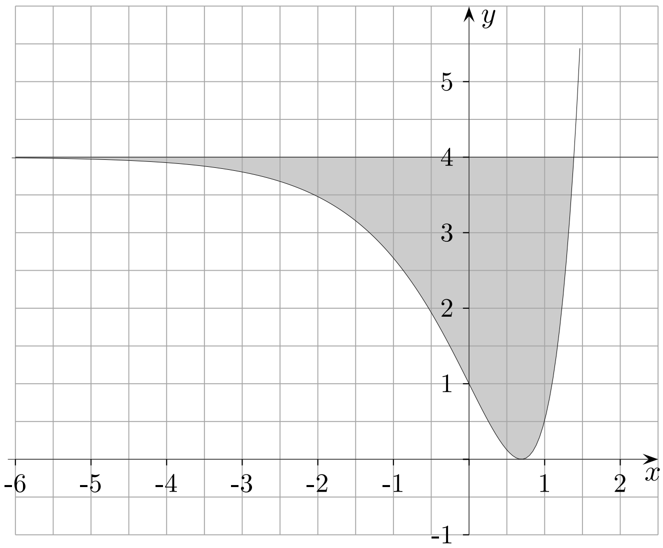
   Tangentengleichung: $y = -8te^{-4}(x-4) + 16te^{-4}$
   $y = -8te^{-4}(x-6), \quad A(6 \mid 0)$



5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (e^x - 2)^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

   a) Wie lautet eine Stammfunktion von f? $\qquad F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 4x$

   b) Ermittle algebraisch den Inhalt der (unbegrenzten) Fläche, den der Graph von f mit der Geraden $y = 4$ einschließt. $\qquad A = 8\ FE$



$$A(u) = \int_u^{\ln(4)} (4 - f(x))\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x \right]_u^{\ln(4)} = \ldots = 8 + \frac{1}{2}e^{2u} - 4e^u$$

$$\lim_{u \to -\infty} A(u) = 8$$

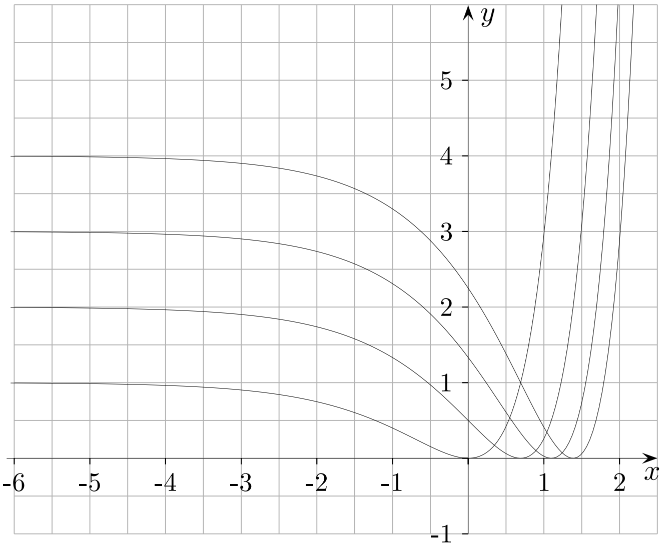
6. Für jede positive Zahl a ist durch $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ eine Funktion gegeben.
   Zeige, dass die positive Nullstelle von f_a keine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

   positive Nullstelle: $x = a$

   $f_a'(x) = e^{ax} \cdot (2x + ax^2 - a^3)$

   $f_a'(a) = 2ae^{a^2} > 0$, notwendige Bedingung für ein Extremum nicht erfüllt.

7. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{k}(e^x - k)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3, 4$
   Ermittle begründet die Parameter für die dargestellten Graphen.



8. Untersuche, ob die differenzierbaren Funktionen $g(x)$ und $f(x) = e^{g(x)} + c$ in den Extremstellen und der Art der Extrema übereinstimmen.

9. Untersuche, ob es eine Funktion der Schar $f_n(x) = x^n \cdot e^x$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, deren Graph das Rechteck
mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0)$, $B(1 \mid 0)$, $C(1 \mid e)$, $D(0 \mid e)$ halbiert?

10. Spiegelt man den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Geraden

    a) $y = 1$,

    b) $y = 2$,

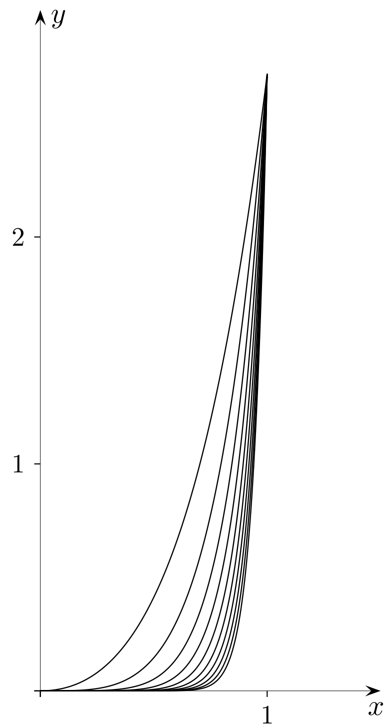
    c) $x = 2$,

    d) $x = -1$,

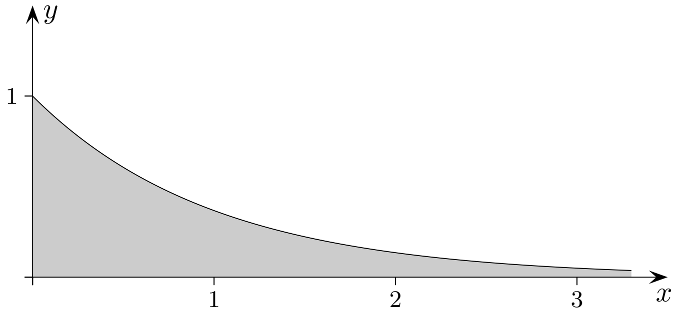
    erhält man den Graphen einer Funktion g.
    Gib die Gleichung von g an.

8. Untersuche, ob es eine Funktion der Schar $f_n(x) = x^n \cdot e^x$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, deren Graph das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0)$, $B(1 \mid 0)$, $C(1 \mid e)$, $D(0 \mid e)$ halbiert?

Hier ist alles zu sehen.



10. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - 1)$ und $g(x) = 2 - e^x$.
Gesucht ist der Inhalt derjenigen Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g sowie der y-Achse begrenzt wird.



11. Gesucht ist der Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstückes, das im l. Quadranten zwischen dem Graphen von $f(x) = e^{-x}$ und der x-Achse liegt.

12. Unter dem Graphen von $f(x) = e^{-x^2}$ werden achsenparallele Rechtecke (eine Kante auf der x-Achse) einbeschrieben. Welches Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?

13. Die Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2}$ soll durch eine quadratische Parabel g approximiert werden, deren Graph durch das Maximum und die beiden Wendepunkte von f verläuft.
    a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?
    b) Wie groß ist die maximale Abweichung von g und f auf dem Intervall, dass durch die Wendestellen von f begrenzt wird?

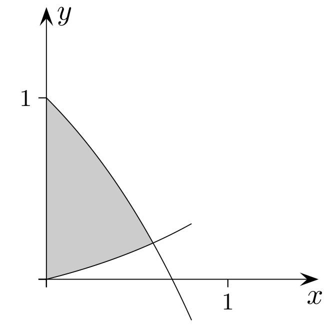
14. Gesucht ist eine Exponentialfunktion, deren Funktionsterm die Form $f(x) = ae^{bx}$ besitzt.
Ihr Graph soll den Punkt $P\big(2 \mid e^{-1}\big)$ enthalten und dort die Steigung 1 besitzen.

15. Wie ist $a > 0$ zu wählen, damit der Inhalt des im 2. Quadranten zwischen dem Graphen von $f_a(x) = (a+1) \cdot e^{ax}$ und der x-Achse liegenden, nach links unbegrenzten, Flächenstückes den Wert 2 annimmt?

16. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$
    a) Wo schneidet die Tangente an der Stelle $x = 2$ die x-Achse?
    b) Weise nach, dass $F(x) = (-1 - x) \cdot e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
    c) Ermittle algebraisch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f in den Grenzen von 1 bis 2.

17. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = e^{2x} - a \cdot e^x,\ \ a > 0$.
    a) Untersuche f_a auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
    b) Auf welcher Kurve (Ortskurve) liegen alle Extrema?

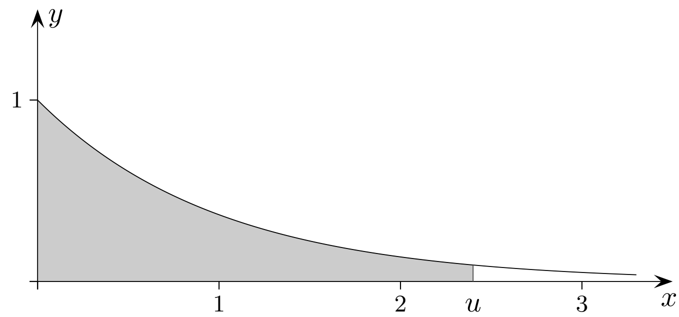
10. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - 1)$ und $g(x) = 2 - e^x$.
Gesucht ist der Inhalt derjenigen Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g sowie der y-Achse begrenzt wird.



$x_s = \ln\frac{9}{5}$

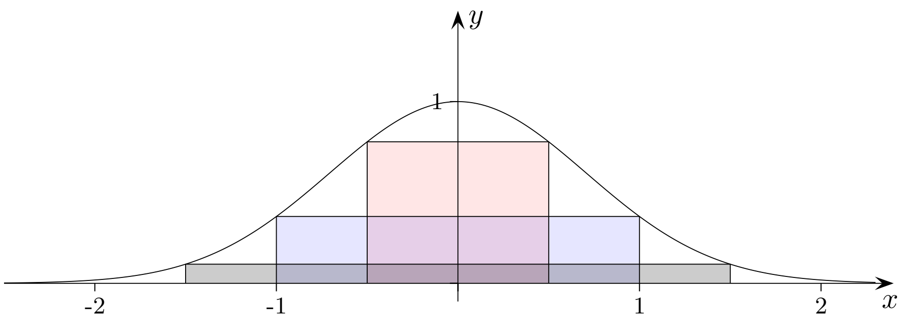
$A = \frac{9}{4}\ln\frac{9}{5} - 1 = 0{,}323$

11. Gesucht ist der Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstückes, das im I. Quadranten zwischen dem Graphen von $f(x) = e^{-x}$ und der x-Achse liegt.



$A(u) = \int_0^u e^{-x}\,dx = \ldots = 1 - e^{-u}$

$A = \lim\limits_{u\to\infty} A(u) = 1$



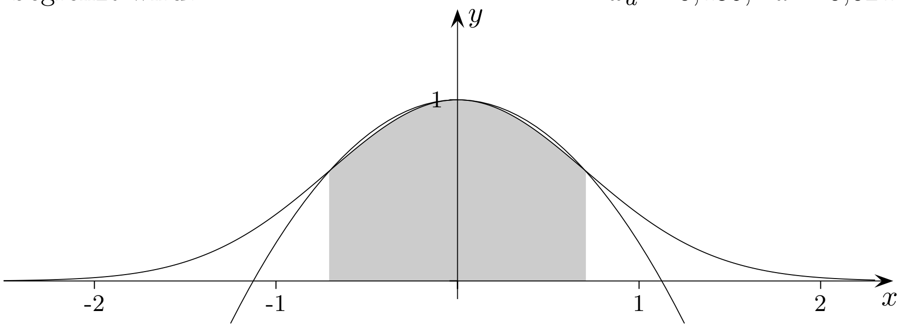
12. Unter dem Graphen von $f(x) = e^{-x^2}$ werden achsenparallele Rechtecke (eine Kante auf der x-Achse) einbeschrieben. Welches Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?

Die Extremstelle stimmt mit der Wendestelle $x_w = \frac{1}{\sqrt{2}}$ überein.

13. Die Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2}$ soll durch eine quadratische Parabel g approximiert werden, deren Graph durch das Maximum und die beiden Wendepunkte von f verläuft.

   a) Wie lautet die Gleichung der Parabel? $g(x) = -0{,}79x^2 + 1$

   b) Wie groß ist die maximale Abweichung von g und f auf dem Intervall, dass durch die Wendestellen von f begrenzt wird? $x_d = 0{,}486, \quad d = 0{,}024$



14. Gesucht ist eine Exponentialfunktion, deren Funktionsterm die Form $f(x) = ae^{bx}$ besitzt. Ihr Graph soll den Punkt $P\big(2 \mid e^{-1}\big)$ enthalten und dort die Steigung 1 besitzen.
$f(x) = e^{e(x-2)-1}$

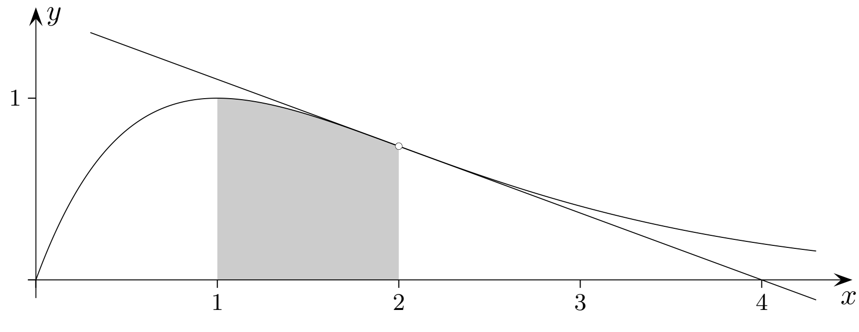
15. Wie ist $a > 0$ zu wählen, damit der Inhalt des im 2. Quadranten zwischen dem Graphen von $f_a(x) = (a+1) \cdot e^{ax}$ und der x-Achse liegenden, nach links unbegrenzten, Flächenstückes den Wert 2 annimmt? $a = 1$

16. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

   a) Wo schneidet die Tangente an der Stelle $x = 2$ die x-Achse? $x = 4$

   b) Weise nach, dass $F(x) = (-1-x) \cdot e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f ist. $F'(x) = f(x)$

   c) Ermittle algebraisch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f in den Grenzen von 1 bis 2. $A = 2 - \dfrac{3}{e}$



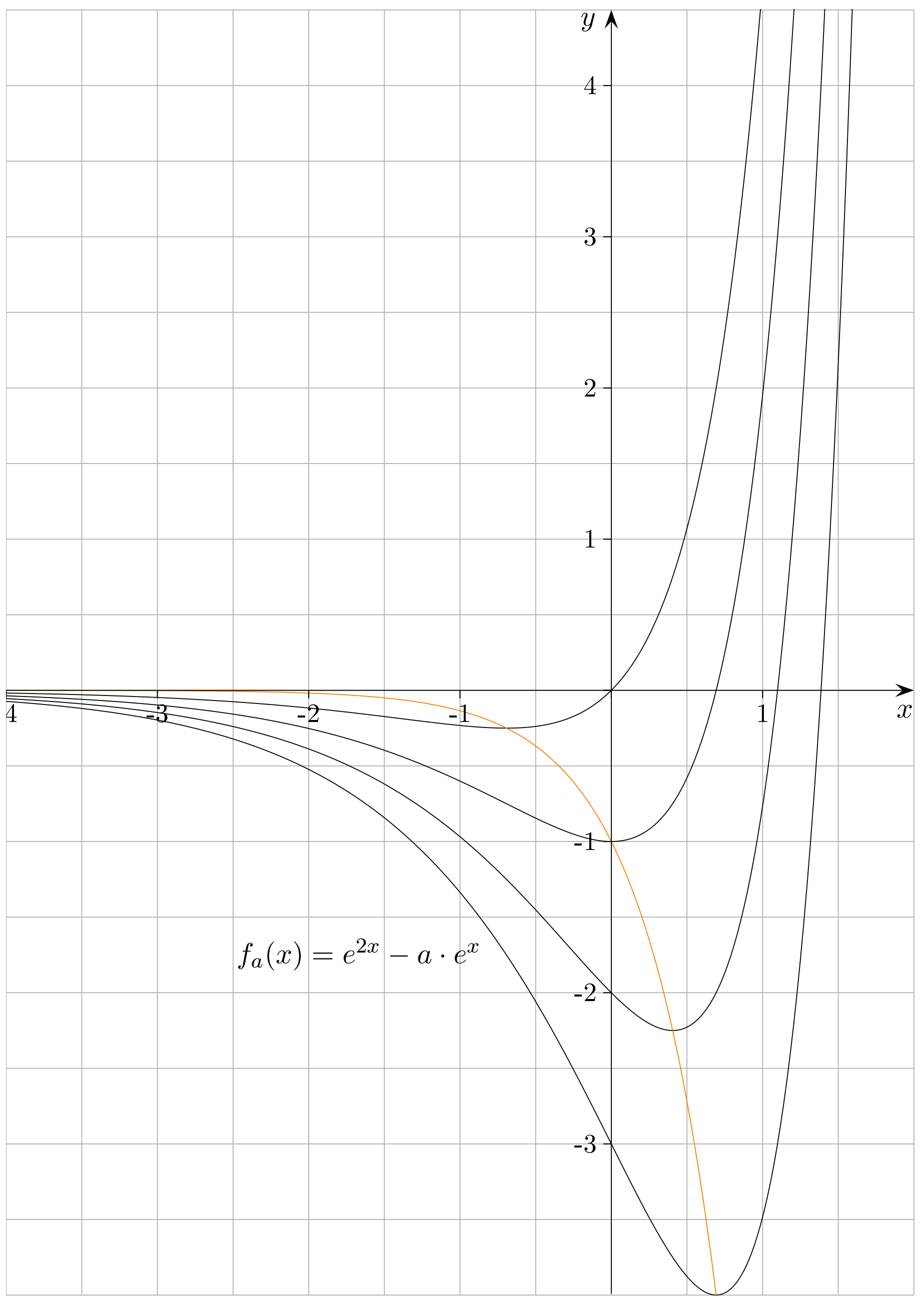
17. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = e^{2x} - a \cdot e^x, \;\; a > 0$.

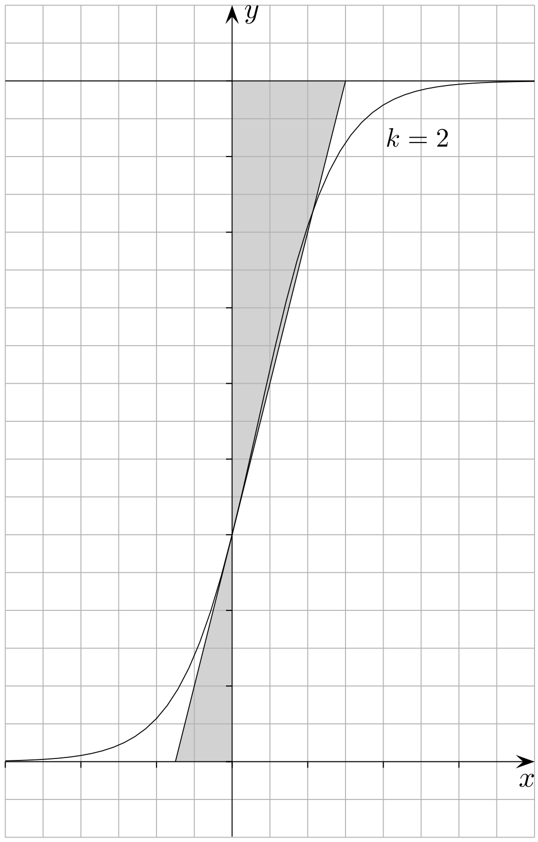
   a) Untersuche f_a auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Nullstelle $x_n = \ln a$

   $Min\Big(\ln \frac{a}{2} \mid -\frac{a^2}{4}\Big)$

   $W\Big(\ln \frac{a}{4} \mid -\frac{3}{16}a^2\Big)$

   b) Auf welcher Kurve (Ortskurve) liegen alle Extrema? $y = -e^{2x}$


$f_a(x) = e^{2x} - a \cdot e^x$
y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1

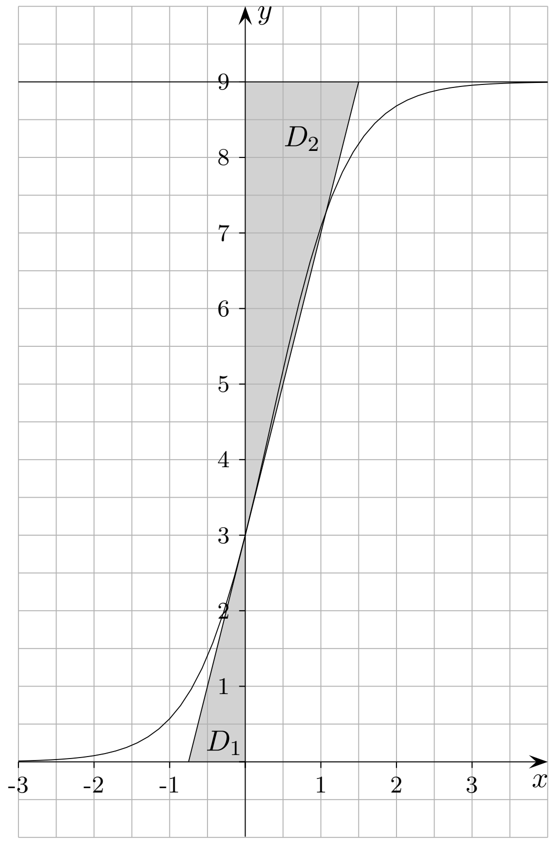


18. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \dfrac{9}{1+2e^{-kx}}, \quad x \in \mathbb{R}, \; k > 0$

   a) Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters k auf den Kurvenverlauf.

   b) Die Tangenten t_k an die Graphen von f_k an der Stelle $x = 0$ bilden mit den Koordinatenachsen jeweils ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob folgende Aussage für jedes k gilt: Wenn k halbiert wird, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt dieser Dreiecke.

   c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der gezeichneten Dreiecke für allgemeines k?



18. Gegeben ist die Funktionenschar $\quad f_k(x) = \dfrac{9}{1 + 2e^{-kx}}, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; k > 0$

a) Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters k auf den Kurvenverlauf.

b) Die Tangenten t_k an die Graphen von f_k an der Stelle $x = 0$ bilden mit den Koordinatenachsen jeweils ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob folgende Aussage für jedes k gilt: Wenn k halbiert wird, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt dieser Dreiecke.

$$f_k'(x) = \frac{18ke^{-kx}}{(1 + 2e^{-kx})^2}$$

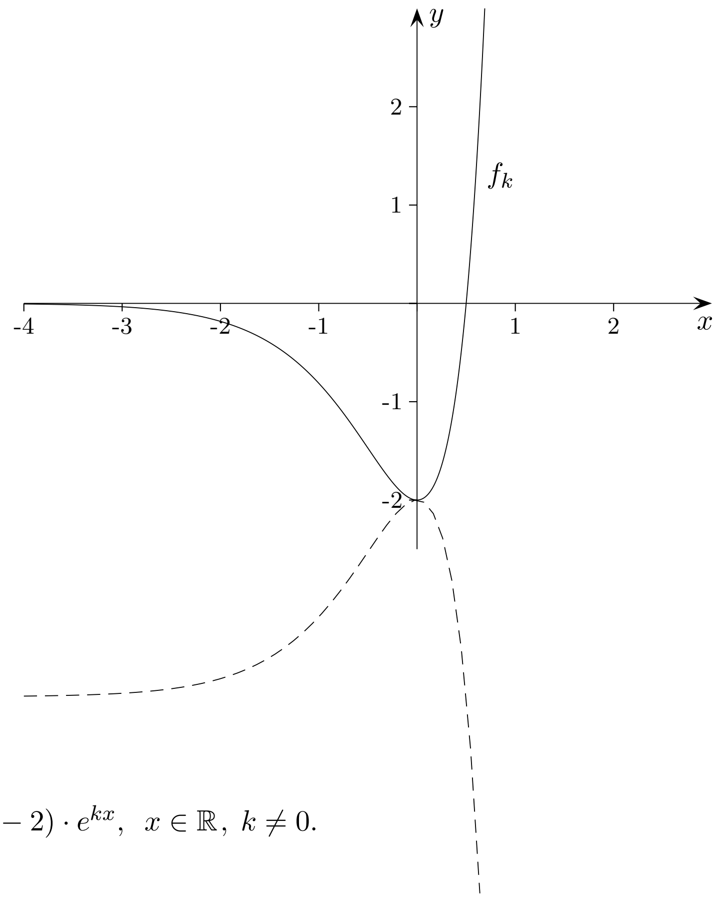
$$t_k(x) = 2kx + 3$$

$$D_1 = \tfrac{9}{4k}$$

Die Aussage ist richtig.

c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der gezeichneten Dreiecke für allgemeines k?

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{4}$$



Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (2kx - 2) \cdot e^{kx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ k \neq 0.$
Die 1. Ableitung lautet:

$$f_k'(x) = 2k^2 x \cdot e^{kx} \qquad \text{(Nachweis nicht erforderlich)}$$

a) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von k) die
Nullstellen,
Stellen mit waagerechter Tangente,
Wendestellen (nur notwendige Bedingung betrachten).

Finden Sie ohne Probieren heraus, für welches k der Graph abgebildet ist.

Ermitteln Sie einen Funktionsterm für den gestrichelten Graphen.

Untersuchen Sie (ohne Funktionen zu zeichnen), ob die Funktionenschar einen gemeinsamen Punkt hat.

b) Überprüfen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = (ax - b) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $g(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ ist.
Welchen Inhalt hat die unbegrenzte Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt?

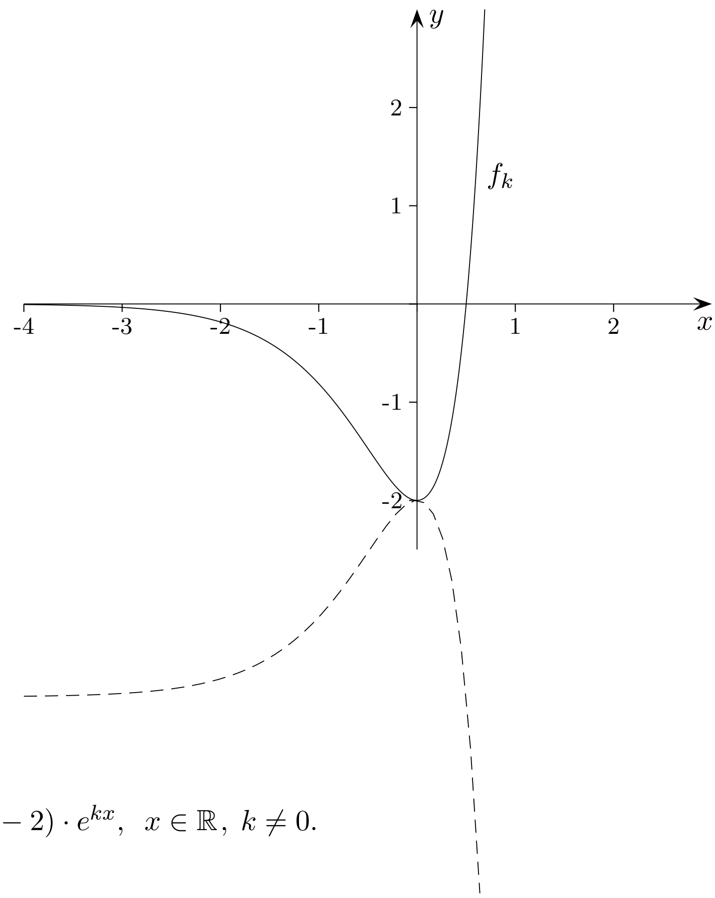
c) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten der Funktionenschar lauten:

$$t_k(x) = -\frac{2k}{e}\left(x + \frac{1}{k}\right) - \frac{4}{e}$$

Die Wendetangenten schließen mit den Koordinatenachsen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ein. Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

d) Sei die Gerade h: $y = x - 3$ gegeben. Beschreiben Sie (keine Rechnung), wie die Punkte auf dem Graphen von $g(x)$ (siehe b)) und der Geraden h ermittelt werden können, die sich am nächsten sind.

Lösungshinweise



Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (2kx - 2) \cdot e^{kx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \; k \neq 0.$
Die 1. Ableitung lautet:

$$f_k'(x) = 2k^2 x \cdot e^{kx} \qquad \text{(Nachweis nicht erforderlich)}$$

a) Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von k) die
Nullstellen, $x_N = \frac{1}{k}$
Stellen mit waagerechter Tangente, $x_E = 0$
Wendestellen (nur notwendige Bedingung betrachten). $f_k''(x) = 2k^2 e^{kx}(kx+1), \;\; x_W = -\frac{1}{k}$
Finden Sie ohne Probieren heraus, für welches k der Graph abgebildet ist. $x_N = 0{,}5 \implies k = 2$
Ermitteln Sie einen Funktionsterm für den gestrichelten Graphen. $h(x) = -4 - f_2(x)$
Untersuchen Sie (ohne Funktionen zu zeichnen), ob die Funktionenschar einen gemeinsamen Punkt hat. $P(0 \mid -2)$

b) Überprüfen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass $F(x) = (ax - b) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $g(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ ist. $F'(x) = e^{2x}(2ax + a - 2b), \;\; a = b = 2$
Welchen Inhalt hat die unbegrenzte Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt?
$A = |-e\,|$

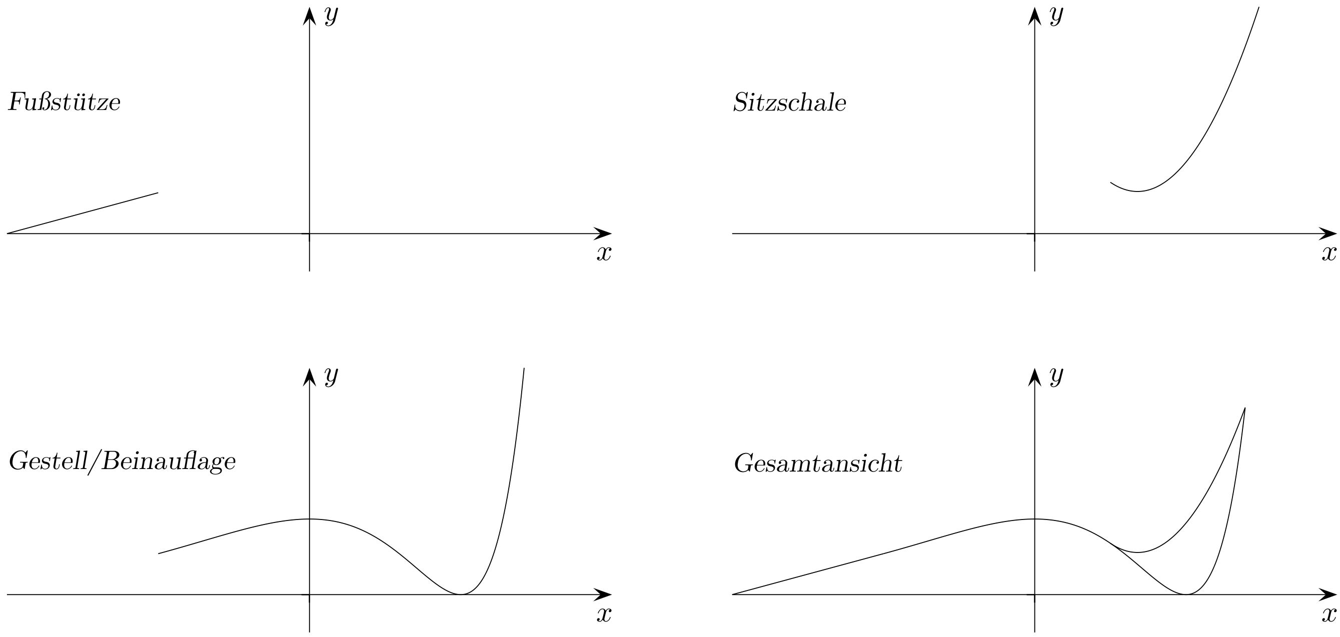
c) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten der Funktionenschar lauten:

$$t_k(x) = -\frac{2k}{e}\left(x + \frac{1}{k}\right) - \frac{4}{e} \qquad f_k'(-\tfrac{1}{k}) = -\frac{2k}{e}, \;\; f_k(-\tfrac{1}{k}) = -\frac{4}{e}$$

Die Wendetangenten schließen mit den Koordinatenachsen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ein. Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. $f_k'(x) = -1, \;\; k = \frac{e}{2}$

d) Sei die Gerade h: $y = x - 3$ gegeben. Beschreiben Sie (keine Rechnung), wie die Punkte auf dem Graphen von $g(x)$ (siehe b)) und der Geraden h ermittelt werden können, die sich am nächsten sind.
$f_k'(x) = 1, \; \ldots$

Wellness-Liege



Für das Design einer Wellness-Liege sollen Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt werden.

a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage g, wobei für g die Gleichung $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x-2)^2$ gilt.

a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von g gilt: $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$

a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an g, wenn der Übergang an $x = -2$ erfolgt.

a3) Geben Sie den Bereich für x an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.

b) Als Sitzschale wurde ein Ausschnitt aus der Parabel $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$ ermittelt.

b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von g und s an der Stelle $x = 1$ knickfrei ineinander übergehen.

b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale.

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden (x-Achse) soll ein bebürstetes Aluminiumblech verwendet werden, das aus einem rechteckigen Blech herausgeschnitten werden soll. Hier gilt: $1\,LE$ entspricht $0{,}25\,m$.

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

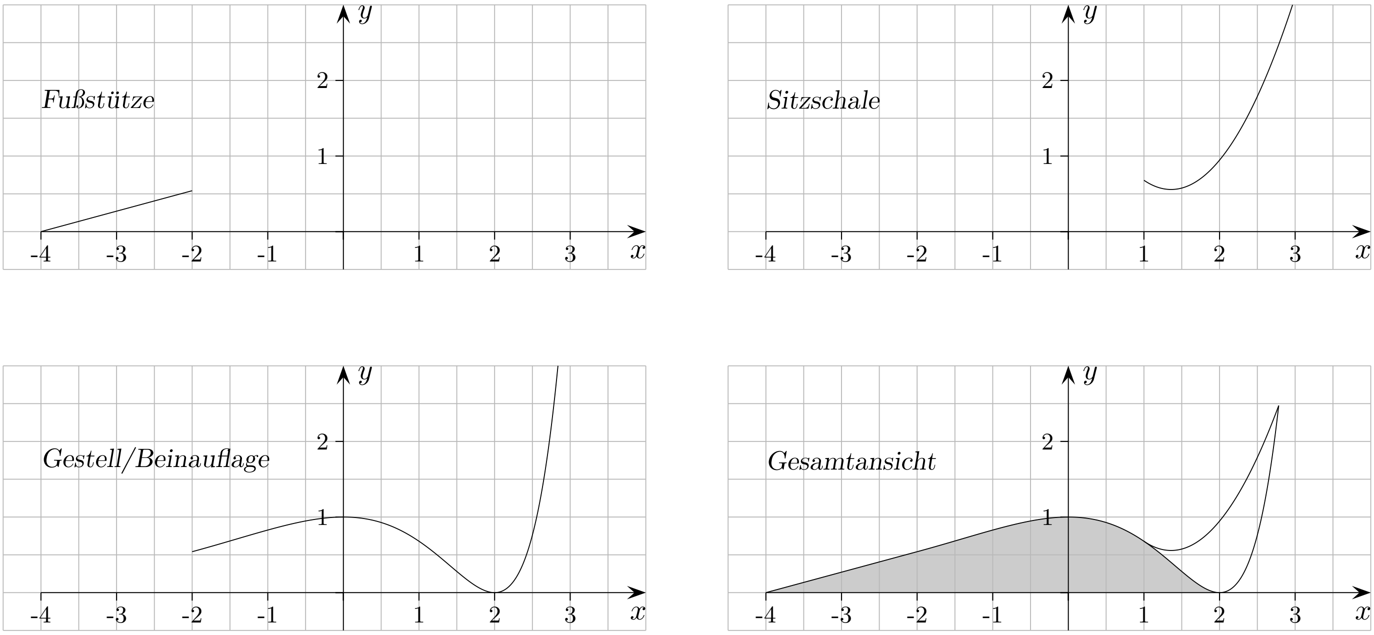
c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

c3) Eine Stammfunktion der Funktion g lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in m^2.

Wellness-Liege



Für das Design einer Wellness-Liege sollen Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt werden.

a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage g, wobei für g die Gleichung $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x-2)^2$ gilt.

a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von g gilt: $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$

a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an g, wenn der Übergang an $x = -2$ erfolgt.

$t(x) = \frac{2}{e^2}x + \frac{8}{e^2}$

a3) Geben Sie den Bereich für x an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.

$-4 \leq x \leq -2$

b) Als Sitzschale wurde ein Ausschnitt aus der Parabel $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$ ermittelt.

b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von g und s an der Stelle $x = 1$ knickfrei ineinander übergehen.

$s(1) = g(1) = \frac{e}{4}$, $s'(1) = g'(1) = -\frac{e}{4}$

b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale.

$x = \frac{e}{2}$

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden (x-Achse) soll ein bebürstetes Aluminiumblech verwendet werden, das aus einem rechteckigen Blech herausgeschnitten werden soll. Hier gilt: $1\,LE$ entspricht $0{,}25\,m$.

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

Mindestlänge $1{,}5\,m$, Mindestbreite $0{,}25\,m$

c3) Eine Stammfunktion der Funktion g lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in m^2.

$1\,FE \mathrel{\widehat{=}} (0{,}25\,m)^2$

$$(G(2) - G(-4)) \cdot \frac{1}{16}\,m^2 = 0{,}217\,m^2$$

Graph gesucht

Gegeben sind die Funktion $f(x) = (x+2)^2 \cdot e^{-x}$ und ihre Ableitung $f'(x) = -(x^2+2x) \cdot e^{-x}$.

a) Berechnen Sie $f''(x)$.

b) Vier Funktionsgraphen sind dargestellt, einer von ihnen gehört zur Funktion f.
Geben Sie den entsprechenden Graphen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

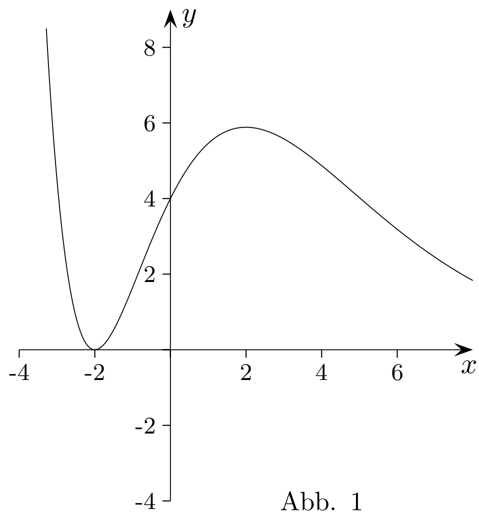


Abb. 1

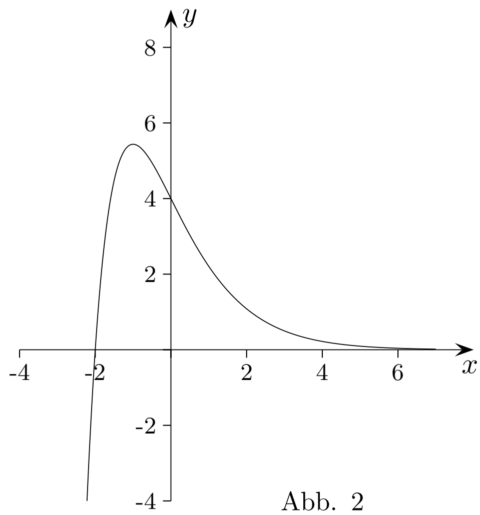


Abb. 2

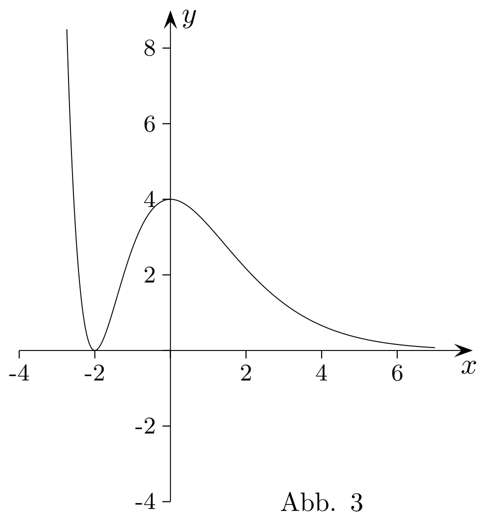


Abb. 3

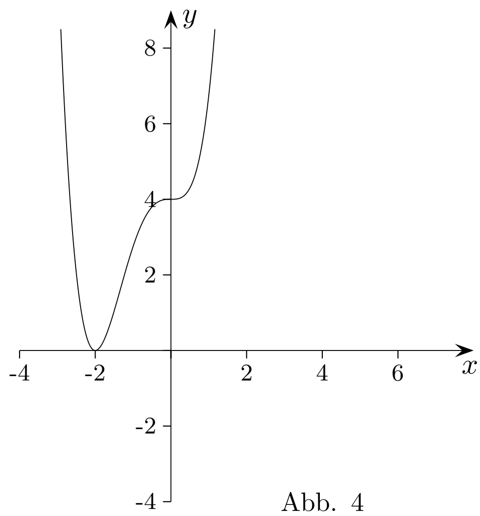


Abb. 4

1. Untersuche, ob a so gewählt werden kann, dass $F(x) = -e^{-x} \cdot (x + a)$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ist.

2. Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums $f(x) = 35 - a\,e^{-kx}$. Im Punkt $A(0 \mid 25)$ beträgt die Tangentensteigung $m = \frac{1}{2}$. Bestimme a und k.

3. Welcher Punkt (x- und y-Koordinate) auf der Geraden $y = -\frac{1}{3}x + 6$ hat von $C(1 \mid 0)$ die kürzeste Entfernung? (GTR)

4. Untersuche, ob für die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$ eine Tangente an einer Stelle $x_0 \neq 0$ existiert, die durch den Ursprung verläuft? Ermittle ggf. die Stelle x_0. (ohne GTR)

1. Untersuche, ob a so gewählt werden kann, dass $F(x) = -e^{-x} \cdot (x + a)$
   eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ist.

   $F'(x) = e^{-x} \cdot (x + a - 1),\ a = 1$

2. Gegeben ist eine Funktion des beschränkten Wachstums $f(x) = 35 - a\,e^{-kx}$.
   Im Punkt $A(0 \mid 25)$ beträgt die Tangentensteigung $m = \frac{1}{2}$. Bestimme a und k.

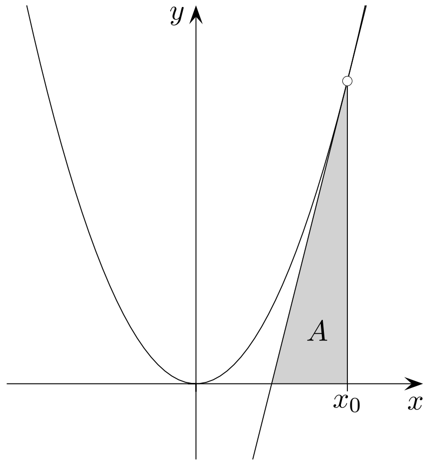
   $f(0) = 25$, $a = 10$
   $f'(0) = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{20}$

3. Welcher Punkt (x- und y-Koordinate) auf der Geraden $y = -\frac{1}{3}x + 6$ hat von $C(1 \mid 0)$ die kürzeste Entfernung? (GTR)

   $P(2{,}7 \mid 5{,}1)$

4. Untersuche, ob für die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$ eine Tangente an einer Stelle $x_0 \neq 0$ existiert, die durch den Ursprung verläuft? Ermittle ggf. die Stelle x_0. (ohne GTR)

   $t(x) = -x_0 e^{-x_0}(-2 + x_0)(x - x_0) + x_0^2 e^{-x_0},\ t(0) = 0,\ x_0 = 1$



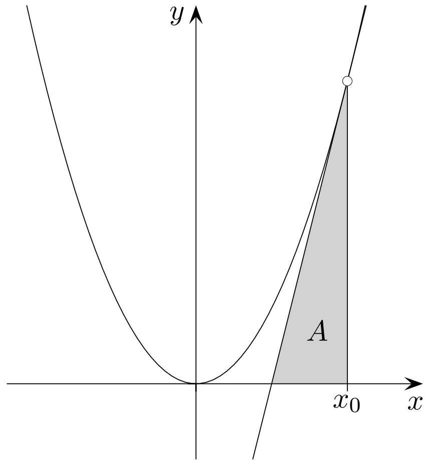
1. Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2$.
   Wie ist x_0 zu wählen, damit $A = 2\ FE$ gilt?
   Probieren ist hier nicht erlaubt.

2. Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
   Weisen Sie nach, dass sich die erste Ableitung von h in der Form $h'(x) = 2x \cdot g(x)$ mit geeigneter Funktion g schreiben lässt.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$.
   Die Funktion g ist differenzierbar. Beurteilen Sie, ob der Graph von f an allen Extremstellen von g jeweils eine waagerechte Tangente hat.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$.
   Untersuchen Sie, wie viele Stellen mit waagerechter Tangente der Graph von f haben kann, wenn g eine quadratische Funktion ist.

Analysis Aufgaben



1. Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2$.
   Wie ist x_0 zu wählen, damit $A = 2\ FE$ gilt?
   Probieren ist hier nicht erlaubt.

Tangentengleichung $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$

Nullstelle $x_N = \frac{x_0}{2}$

Dreiecksfläche $A = \frac{1}{4}x_0^3 = 2$

$x_0 = 2$

2. Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
   Weisen Sie nach, dass sich die erste Ableitung von h in der Form $h'(x) = 2x \cdot g(x)$ mit geeigneter Funktion g schreiben lässt.

$h'(x) = 2x \cdot (e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2})$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$.
   Die Funktion g ist differenzierbar. Beurteilen Sie, ob der Graph von f an allen Extremstellen von g jeweils eine waagerechte Tangente hat.

$f'(x) = (g(x) + 1) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$g'(x_E) = 0 \implies f'(x_E) = 0$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = g(x) \cdot e^{g(x)}$.
   Untersuchen Sie, wie viele Stellen mit waagerechter Tangente der Graph von f haben kann, wenn g eine quadratische Funktion ist.

$f'(x) = (g(x) + 1) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Hat $g(x) + 1 = 0$ zwei Lösungen, stimmen diese nicht mit der Scheitelstelle von g überein, sodass der Graph von f drei Stellen mit waagerechter Tangente hat.

Hat $g(x) + 1 = 0$ eine Lösung, stimmt diese mit der Scheitelstelle von g überein, sodass der Graph von f eine Stelle mit waagerechter Tangente hat.

Hat $g(x) + 1 = 0$ keine Lösung, so hat der Graph von f nur an der Scheitelstelle von g eine waagerechte Tangente.

Analysis Aufgaben

1. Zeige, dass $f(x) = G - ae^{-kx}$ die DGL $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$ löst.

2. Zeige, dass $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ die DGL $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$ löst.

3. Zeige, dass $f(x) = \dfrac{G}{1+ae^{-kx}}$ die DGL $f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$ mit $k^* = \frac{k}{G}$ löst.

   Für die Grafik siehe Wachstumsprozesse.

4. Ermittle die Wendestelle der Funktion $I(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

5. Untersuche, ob der Graph von $f(x) = g(x)e^{g(x)}$ an allen Extremstellen von g jeweils eine waagerechte Tangente hat.

6. Zeige:
   Für eine ganzrationale Funktion $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ...\ + a_nx^n$ gilt

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \ ...\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

   (f ist durch die Koeffizienten eindeutig bestimmt.)

Analysis Aufgaben

1. Zeige, dass $f(x) = G - ae^{-kx}$ die DGL $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$ löst.

$$\begin{aligned} f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \\ ake^{-kx} &= k \cdot \left(G - (G - ae^{-kx})\right) \\ &= k \cdot \left(G - G + ae^{-kx}\right) \\ &= ake^{-kx} \end{aligned}$$

2. Zeige, dass $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ die DGL $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$ löst.

$f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ möglich wäre die Umformung $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{(e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot (1 - \frac{e^x}{1+e^x})$$

$$= f(x) \cdot (1 - f(x))$$

3. Zeige, dass $f(x) = \dfrac{G}{1+ae^{-kx}}$ die DGL $f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$ mit $k^* = \frac{k}{G}$ löst.

Für die Grafik siehe Wachstumsprozesse.

4. Ermittle die Wendestelle der Funktion $I(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$ beachte: $I'(x) = e^{-x^2}$

5. Untersuche, ob der Graph von $f(x) = g(x)e^{g(x)}$ an allen Extremstellen von g jeweils eine waagerechte Tangente hat.

   Tipp: Bilde die Ableitung von f (Produkt- und Kettenregel).

6. Zeige:
   Für eine ganzrationale Funktion $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ gilt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Wir bestimmen den Funktionswert und die Ableitungen an der Stelle $x = 0$. Es ist:

$f(0) = a_0$; $f'(0) = a_1$; $f''(0) = 2a_2$; $f'''(0) = 3!\,a_3$; ... ; $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$

Likörglas Hessen LK 2017 *leicht abgeändert*

Gegeben ist die Funktionenschar $g_a(x) = \sqrt{a \cdot x \cdot e^{-x} + 0{,}1 \cdot a}, \quad a, x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \geq -0{,}09.$

Die Graphen aller Funktionen dieser Schar haben an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt.

1. a) Bestätigen Sie durch eine Rechnung, dass für jede Funktion der Schar $x = 1$ eine Extremstelle ist. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

   b) Berechnen Sie, für welchen Wert des Parameters a der Graph der zugehörigen Funktion der Schar durch den Punkt $H(1 \mid a)$ verläuft.

2. Bestimmen Sie die Asymptote der Graphen von g_a für $x \to \infty$.

3. Zeigen Sie, dass $G_a(x) = a \cdot (-x - 1) \cdot e^{-x} + 0{,}1 \cdot a \cdot x$ eine Stammfunktion von $\left(g_a(x)\right)^2$ ist.

4. Alle Funktionen der Schar haben genau eine Nullstelle. Zeigen Sie unter Verwendung einer Rechnung, dass alle Funktionen der Schar die gleiche Nullstelle haben. Die Nullstelle muss nicht ermittelt werden.

5. Eine Firma möchte ein neues Likörglas ähnlich wie das Abb. 1 dargestellte produzieren. Es soll einen massiven Stiel erhalten. In Abb. 2 ist die obere Hälfte der Querschnittsfläche des um 90° nach rechts gekippten Glases (ohne Stiel) abgebildet (1 LE entspricht 1 cm). Durch Rotation des Graphen von g_{20} um die x-Achse im Intervall $I = [-0,09; 9]$ entsteht der Glaskörper des Likörglases. Die Dicke des Glases ist dabei nicht zu berücksichtigen.

   a) Berechnen Sie das Volumen und den maximalen Umfang des Glaskörpers.

   b) Der Hersteller möchte auf dem Glas eine Markierung für die Mengenangabe „2 cl“ (20 cm^3) anbringen. Entwickeln Sie unter Angabe einer Stammfunktion einen rechnerischen Ansatz zur Ermittlung der Stelle, an der die Markierung angebracht werden muss. Das Ergebnis soll nicht ermittelt werden.

6. Betrachtet man die Flächen in Abb. 3, so ergibt sich für die graue Fläche $A_1 \approx 2{,}75\ \text{cm}^2$ und für die schraffierte Fläche $A_2 \approx 2{,}84\ \text{cm}^2$. Bei Rotation der Graphen der zugehörigen Randfunktionen g_{20} und f in den entsprechenden Intervallen um die x-Achse erhält man für die Volumina der zugehörigen Rotationskörper $V_1 \approx 23{,}18\ \text{cm}^3 > V_2 \approx 18{,}22\ \text{cm}^3$, obwohl $A_1 < A_2$ gilt.
   Erklären Sie dieses Phänomen.

Abb. 1

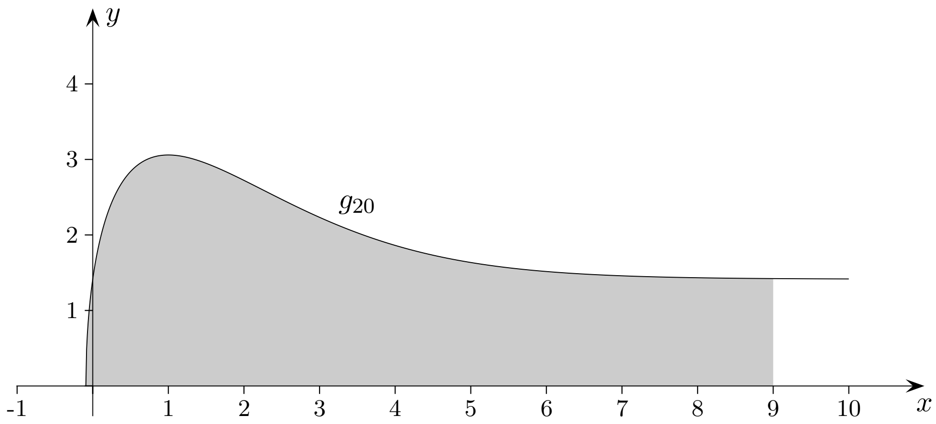


Abb. 2

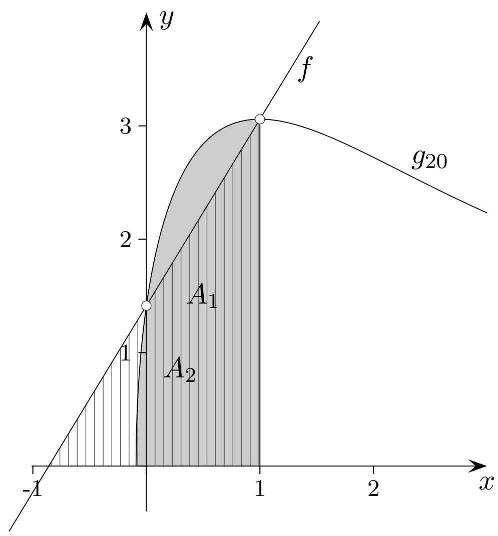


Abb. 3

Likörglas Lösungshinweise

Gegeben ist die Funktionenschar $g_a(x) = \sqrt{a \cdot x \cdot e^{-x} + 0{,}1 \cdot a}$, $\quad a, x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \geq -0{,}09$.

1. a) $g_a'(x) = \dfrac{ae^{-x}(1-x)}{2 \cdot \sqrt{\cdots}}$, $\quad$ notw. Bed.: $g_a'(1) = 0$

   b) $H(1 \mid a)$, $\quad g_a(1) = a$, $\quad a = e^{-1} + 0{,}1 \approx 0{,}468$

2. Asymptote der Graphen von g_a für $x \to \infty$, $\qquad t(x) = \sqrt{0{,}1 \cdot a}$

3. $G_a(x) = a \cdot (-x-1) \cdot e^{-x} + 0{,}1 \cdot a \cdot x$ ist eine Stammfunktion von $\left(g_a(x)\right)^2$.

4. Bed. für die Nullstelle $\qquad xe^{-x} = -0{,}1$

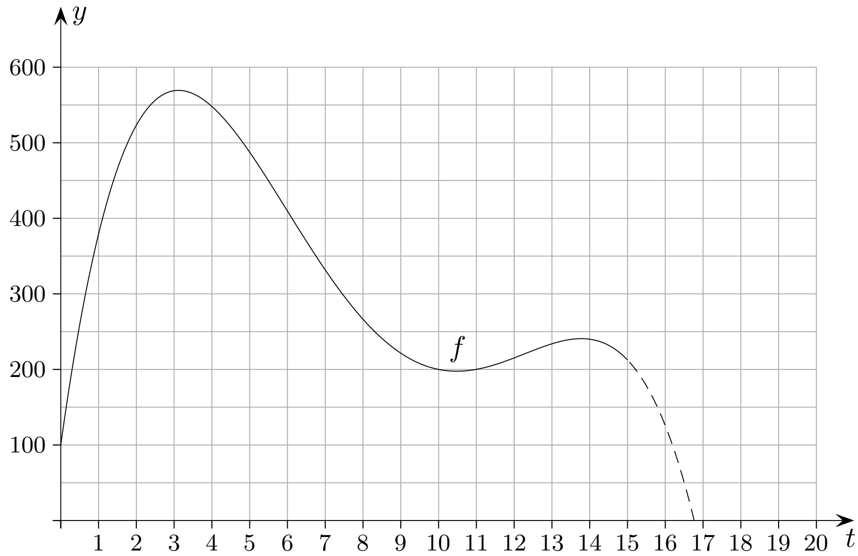
5. a) Volumen $\qquad V = 119{,}598\ \text{cm}^3$
   maximaler Umfang $\qquad U = 19{,}220\ \text{cm}$

   b) $\pi \displaystyle\int_{-0{,}09}^{x} \left(g_a(t)\right)^2 dt = 20$, $\qquad \pi \Big[G_a(t)\Big]_{-0{,}09}^{x} = 20$, $\qquad \pi\big[G_a(x) - G_a(-0{,}09)\big] = 20$

6. Beachte die (zu quadrierenden) Abstände zur x-Achse.

Wasserbecken

1. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



a) Geben Sie mit Hilfe der Grafik das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an.

Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.

Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form *I* noch die Form *II* hat:

I: $\quad y = at^3 + bt^2 + ct + 100$

II: $\quad y = at^4 + bt^2 + 100$

b) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in m^3/h. Die Funktion G mit

$$G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26t^3 + 180t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g.

Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.

Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken $350\,\mathrm{m}^3$ Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

Untersuchen Sie, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

c) Bei einem dritten Becken kann die momentane Änderungsrate des Wasservolumens durch ein Ventil reguliert werden. Die Änderungsrate wird je nach Einstellung des Ventils durch eine Funktion h_k mit

$$h_k = 10 \cdot k \cdot e^{-kt}, \quad k > 0$$

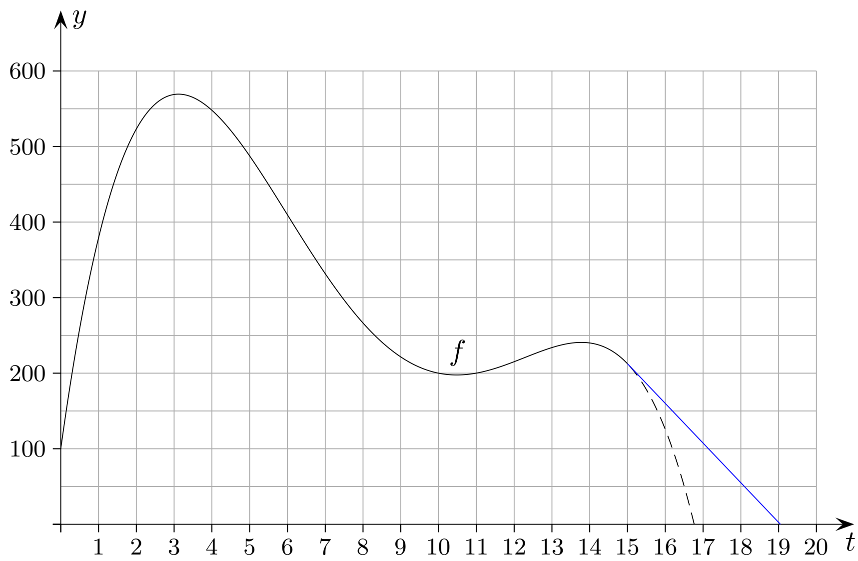
beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $3\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken.

Ermitteln Sie, für welchen Parameter k sich nach 2 Stunden genau $8\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken befinden.

Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_k an.

Wasserbecken

1. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



a) Geben Sie mit Hilfe der Grafik das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

$f(5) \approx 490$ [m^3], $\quad 0{,}9 \leq t \leq 6{,}8$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. $f'(2) \approx 90 \ [\frac{\text{m}^3}{\text{h}}]$

Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an.

Die Tangente an der Stelle $t = 15$ schneidet die x-Achse an der Stelle $t = 19$.

Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.

Ab dem Zeitpunkt t fließen in den folgenden 6h 350m^3 Wasser aus dem Becken.

Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form *I* noch die Form *II* hat:

I: $\quad y = at^3 + bt^2 + ct + 100$

II: $\quad y = at^4 + bt^2 + 100$

Der Graph von f hat drei Extrempunkte, f ist mindestens 4. Grades, *I* scheidet aus.
Form *II* bedeutet Achsensymmetrie. Dies steht im Widerspruch zu den sichtbaren Extrema.

b) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in m^3/h. Die Funktion G mit

$$G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26t^3 + 180t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g.

Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. $t = 15$, Randextremum

Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt. $7{,}5 \leq t \leq 12$

Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken $350\,m^3$ Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

$G_k(3) = G(3) + k,\ k = 150{,}2\ [m^3]$

Untersuchen Sie, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Es gibt keinen Zeitpunkt, zu dem ...

Für den Graphen von g gilt: Der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse ist kleiner als der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse im Bereich $0 \leq t \leq 7{,}5$.

c) Bei einem dritten Becken kann die momentane Änderungsrate des Wasservolumens durch ein Ventil reguliert werden. Die Änderungsrate wird je nach Einstellung des Ventils durch eine Funktion h_k mit

$$h_k = 10 \cdot k \cdot e^{-kt}, \quad k > 0$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $3\,m^3$ Wasser in dem Becken.

Ermitteln Sie, für welchen Parameter k sich nach 2 Stunden genau $8\,m^3$ Wasser in dem Becken befinden.

Stammfunktion $H_k(t) = -10 \cdot e^{-kt} + c,\ H_k(0) = 3,\ c = 13$

$H_k(2) = 8,\ k \approx 0{,}35$

Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_k an.

$h'_k(t) = -10 \cdot k^{104} \cdot e^{-kt}$