Beschränktes Wachstum

Nehmen wir an, es existiert eine feste obere Grenze G für die Größe der Population (eines Individuums, eines Gewebes), und der Zuwachs Δy ist proportional zur Differenz von Grenze G und Bestand $f(x)$ und proportional zur Zeit.

$$\begin{aligned} \Delta y &= k \cdot (G - f(x)) \cdot \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= k \cdot (G - f(x)) \\ * \quad f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \end{aligned}$$

Darin ist k eine positive Konstante, die festlegt, wie schnell $f(x)$ gegen G strebt.

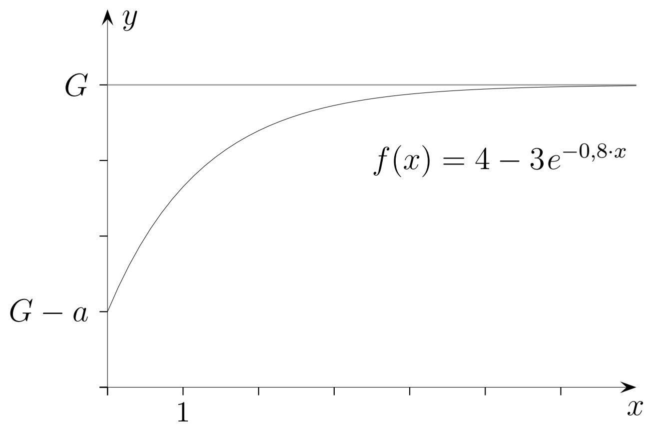
Wenn $f(x)$ klein im Vergleich zu G ist, ergibt sich annähernd $f'(x) = k\,G$, d.h. die Größe $f(x)$ wächst ungefähr als lineare Funktion der Zeit x.

Wenn jedoch $f(x)$ fast gleich G ist, so wird der Verlauf von $f(x)$ immer flacher.

Die allgemeine Lösung der DGL $*$ lautet:

$f(x) = G - a\,e^{-kx}$

Der Anfangsbestand ist dann $G - a$.



Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird $f'(x)$ durch $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst. y_{n+1} kann dann iterativ errechnet werden.

Aufg.
Gegeben sei ein beschränktes Wachstum mit $G = 8$, Anfangswert $y_0 = 1$ und $k = 0{,}8$. Ermittle die diskrete Näherungslösung für die nächsten 5 Iterationsschritte für $\Delta x = 1$ $\quad(\Delta x = 0{,}5)$.

Beschränktes Wachstum

Aufg.
Gegeben sei ein beschränktes Wachstum mit $G = 8$, Anfangswert $y_0 = 1$ und $k = 0{,}8$. Ermittle die diskrete Näherungslösung für die nächsten 5 Iterationsschritte für $\Delta x = 1$ ($\Delta x = 0{,}5$).

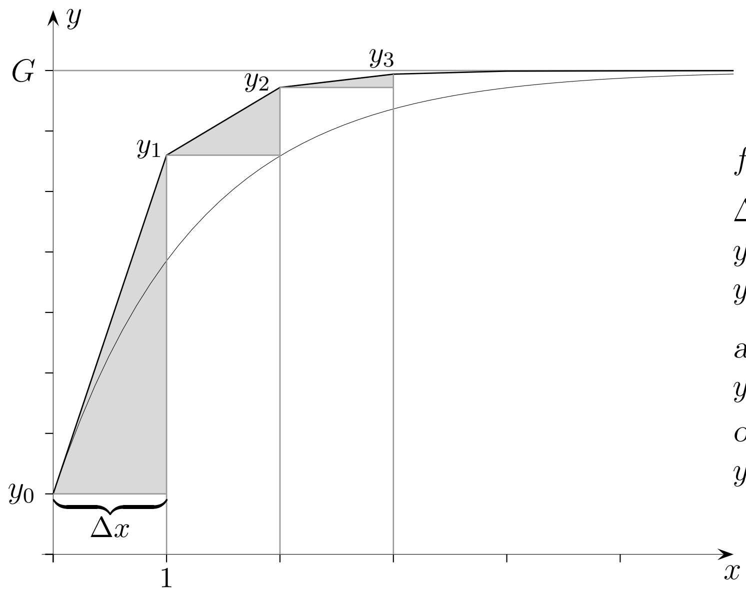
Lösung:
Iterationsgleichung: $y_{n+1} = 0{,}8 \cdot (8 - y_n) + y_n \iff y_{n+1} = 6{,}4 + 0{,}2\, y_n$

Anfangswert: $y_0 = 1$

x	0	1	2	3	4	5
Näherung	1	6,60	7,72	7,94	7,99	7,998

Eulersches Polygonzugverfahren

Um eine Näherungskurve für die Lösung einer DGL zu erhalten, geht man vom Anfangswert y_0 geradlinig in die Richtung, deren Steigung durch die DGL gegeben ist.
Mit einer vorgegebenen Schrittweite Δx wird dies wiederholt.



$f'(x) = 0{,}8 \cdot (8 - f(x))$

$\Delta x = 1$

$y_1 - y_0 = 0{,}8 \cdot (8 - y_0)$

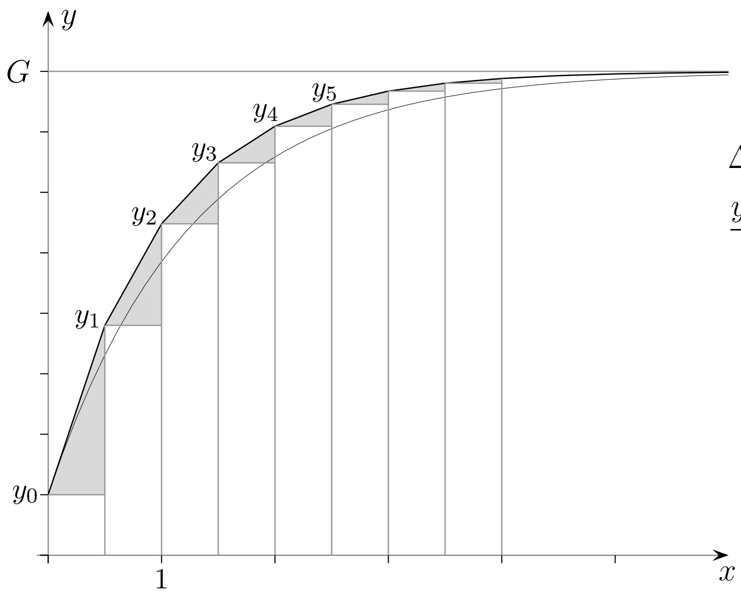
$y_2 - y_1 = 0{,}8 \cdot (8 - y_1)$

allgemein:

$y_{n+1} - y_n = 0{,}8 \cdot (8 - y_n)$

oder

$y_n - y_{n-1} = 0{,}8 \cdot (8 - y_{n-1})$



$\Delta x = 0{,}5$

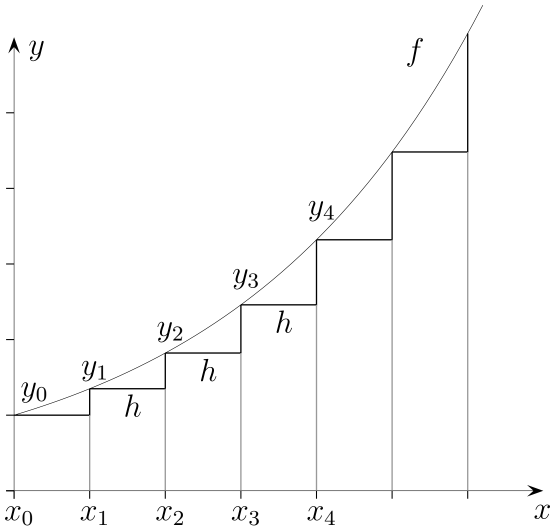
$$\frac{y_n - y_{n-1}}{0{,}5} = 0{,}8 \cdot (8 - y_{n-1})$$

Für die rechn. Umsetzung dieses Verfahrens (für $\Delta x = 0{,}5$) wird die rekursive Iterationsgleichung

$$y_n - y_{n-1} = 0{,}8 \cdot (8 - y_{n-1}) \cdot 0{,}5$$

nach y_n aufgelöst und zweckmäßigerweise zu $y_n = 0{,}6\, y_{n-1} + 3{,}2$ vereinfacht. Die Folgenglieder können nun ohne Aufwand mit dem GTR ermittelt und grafisch dargestellt werden.

Eulersches Polygonzugverfahren mit GTR



$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{y_2 - y_1}{h}$$

$$f'(x_2) \approx \frac{y_3 - y_2}{h}$$

allgemein: $$f'(x_{n-1}) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

$$\Longrightarrow \quad y_1 \approx y_0 + f'(x_0) \cdot h$$

$$y_2 \approx y_1 + f'(x_1) \cdot h$$

$$y_3 \approx y_2 + f'(x_2) \cdot h$$

allgemein: $$y_n \approx y_{n-1} + f'(x_{n-1}) \cdot h$$

Für die DGL $f'(x) = 0{,}25 \cdot f(x)$ lautet die Iterationsgleichung z. B.:

$$y_n \approx y_{n-1} + 0{,}25 \cdot f(x_{n-1}) \cdot h$$

$$y_n = y_{n-1} + 0{,}25 \cdot y_{n-1} \cdot h$$

Zusammengefasst:
Für eine diskrete Näherungslösung einer Differentialgleichung wird in der DGL $f'(x)$ durch $\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h}$ und $f(x)$ durch y_{n-1} ersetzt und nach y_n aufgelöst.

Aufg.
Berechne für die obige DGL mit dem Anfangswert $y_0 = 1$ die nächsten 5 Iterationsschritte, Schrittweite $h = 1$.

Eulersches Polygonzugverfahren mit GTR

Aufg.
Berechne für die obige DGL mit dem Anfangswert $y_0 = 1$ die nächsten 5 Iterationsschritte, Schrittweite $h = 1$.

Lösung:

n	0	1	2	3	4	5
y_n	1	1,25	1,56	1,95	2,44	3,05

Eulersches Polygonzugverfahren mit Tabellenkalkulation

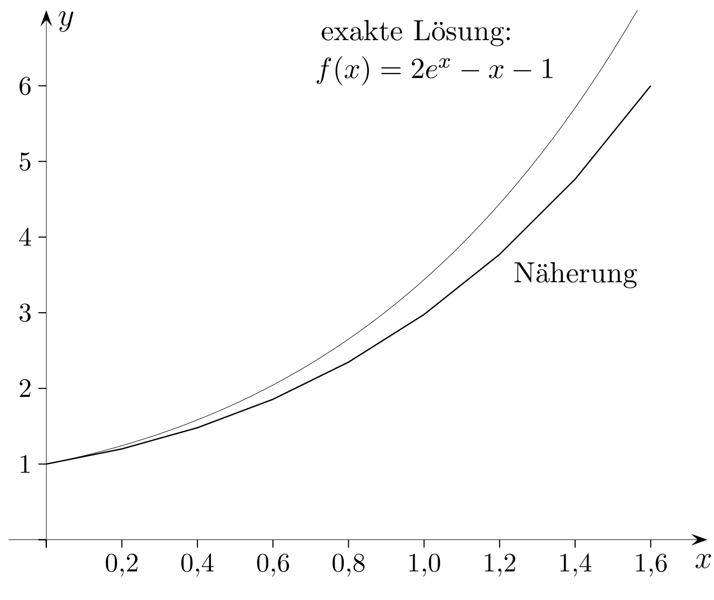
Die DGL $f'(x) = x + f(x)$ (Anfangswert $f(0) = 1$) soll näherungsweise mit der Iterationsgleichung

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + f'(x_n) \cdot h \\ \text{oder} \quad f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n) \cdot h \end{aligned}$$

gelöst werden, $x_{n+1} = x_n + h$.

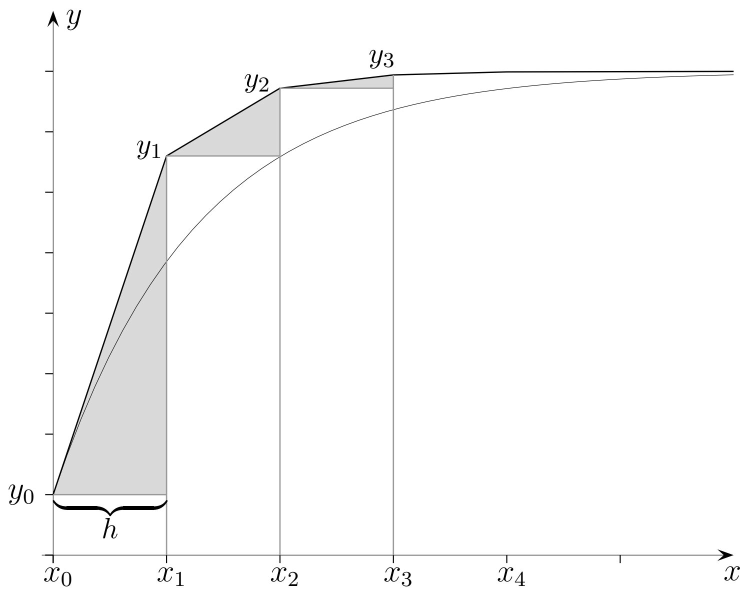
Die Schrittweite sei $h = 0{,}2$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n) = x_n + f(x_n)$	$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot h$
0	0	1	1	1,2
1	0,2	1,2	1,4	1,48
2	0,4	1,48	1,88	1,856
3	0,6	1,856	2,456	2,347
4	0,8	2,347	3,147	2,977
5	1,0	2,977	3,977	3,772
6	1,2	3,772	4,972	4,766
7	1,4	4,766	6,166	6,000
8	1,6	6,000	7,600	7,520



Für eine kleinere Schrittweite h wäre die Näherung natürlich besser.

Eulersches Polygonzugverfahren



Allgemeines Vorgehen:

Zur DGL

$$f'(x) = T(x, f(x))$$

(T ist ein Term, der x und $f(x)$ enthält, Anfangswert sei $f(x_0) = y_0$)
soll die Iterationsgleichung aufgestellt werden.

$f'(x)$ wird ersetzt.

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1} - y_n}{h} &= T(x_n, f(x_n)) \\
y_{n+1} - y_n &= T(x_n, y_n) \cdot h \\
y_{n+1} &= y_n + T(x_n, y_n) \cdot h \\
x_{n+1} &= x_n + h
\end{aligned}$$

Lösung der DGL des beschränkten Wachstums

$$\begin{aligned}
f'(x) &= k \cdot\ (G - f(x)) \\
\frac{f'(x)}{G - f(x)} &= k \\
-\ln(G - f(x)) &= kx + C \qquad\qquad \textit{beachte:}\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln(f(x)) + C \\
\ln(G - f(x)) &= -kx - C \\
G - f(x) &= e^{-kx-C} \\
-f(x) &= -G + e^{-kx-C} \\
f(x) &= G - e^{-kx} \cdot e^{-C} \\
f(x) &= G - a\, e^{-kx} \qquad\qquad \textit{mit}\ \ a = e^{-C}
\end{aligned}$$

z. B. $G = 50,\ \ f(0) = 10,\ \ k =$
0,5

$$\Longrightarrow\ \ f(x) = 50 - 40\, e^{-0{,}5\, x}$$

Bestimme die Integrale:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1}\ dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1}\ dx$$

$$\int \frac{1}{1 - x}\ dx$$

Zur Erinnerung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
e^{\ln x} &= x \qquad |\ (\ )' \\
e^{\ln x}\, (\ln x)' &= 1 \qquad \text{(Kettenregel)} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$