1. Beschränktes Wachstum Aufgaben
2. Medikament-Aufgabe
3. Wasserbecken-Aufgabe
4. Beschränktes Wachstum Regressionskurve
5. Flüssigkeitsmenge
6. Fieberkurve
7. Motorboot
8. Viruserkrankung
9. Medikament-Aufgabe
10. Wassertank-Aufgabe
11. Konzentration eines Medikaments

↑ Beschränktes Wachstum   Aufgaben

Nehmen wir an, es existiert eine feste obere Grenze G für die Größe der Population (eines Individuums, eines Gewebes), und der Zuwachs Δy ist proportional zur Differenz von Grenze G und Bestand $f(x)$ und proportional zur Zeit.

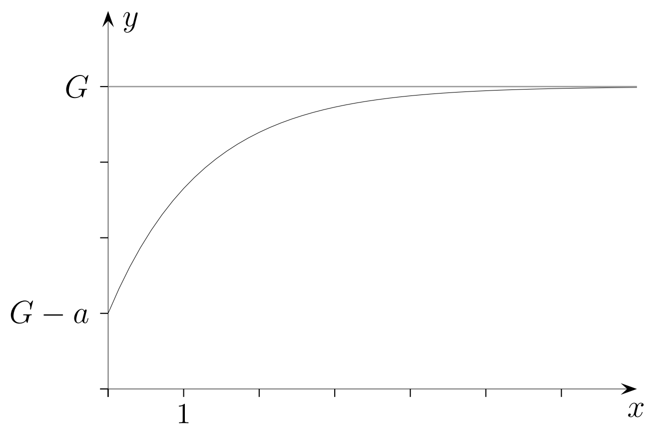
$$\begin{aligned} \Delta y &= k \cdot (G - f(x)) \cdot \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= k \cdot (G - f(x)) \\ f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \end{aligned}$$

Darin ist k eine positive Konstante, die festlegt, wie schnell $f(x)$ gegen G strebt.

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$f(x) = G - a\,e^{-kx}$

Der Anfangsbestand ist dann $G - a$.



1. Ein Wachstumsprozess wird durch die Funktion $f(x) = 4 - 3\,e^{-0{,}02\,x}$, x in *min*, beschrieben.
   a) Berechne den Anfangsbestand und den Bestand nach 2 Stunden.

   b) Wie lange dauert es, bis 90 % des Endbestandes erreicht sind?

   c) Zu welcher Zeit beträgt der Zuwachs in der nächsten Minute 1 %?
   Gesucht sind 2 Lösungswege, einer mit der Ableitung.

2. Im Mittel ergeben sich beim Wachstum von Forellen folgende Werte:

Lebenszeit in Monaten	4	8
Länge (in cm)	11,2	17,0

   a) Ermittle a und k der Funktion $f(x) = a - a\,e^{-k\,x}$, die das Wachstum beschreibt.

   b) Wie groß sind die Fische im Mittel nach einem Jahr?

   c) Welche durchschnittliche Länge hat eine ausgewachsene Forelle?

↑ Beschränktes Wachstum Lösungen

1. a) $f(0) = 1, \qquad f(120) = 3{,}728$

   b) $G = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$

   $4 - 3\,e^{-0{,}02\,x} = 3{,}6 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 100{,}75$ *(min)*

   c) 1. Lösungsweg (exakt)

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \frac{f(x)}{100} \\ (-3\,e^{-0{,}02} + 3 + 0{,}03)\cdot e^{-0{,}02\,x} &= 0{,}04 \\ \Longrightarrow \quad x &= 40{,}21 \end{aligned}$$

   2. Lösungsweg (genähert)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x)}{100} \\ -3\cdot(-0{,}02)\cdot e^{-0{,}02\,x} &= 0{,}01\cdot(4 - 3\,e^{-0{,}02\,x}) \\ \Longrightarrow \quad x &= 40{,}55 \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned} 11{,}2 &= a\cdot(1 - e^{-k\,4}) \\ 17 &= a\cdot(1 - e^{-k\,8}) \\ \Longrightarrow \quad \frac{11{,}2}{17} &= \frac{1 - e^{-k\,4}}{1 - e^{-k\,8}} \end{aligned}$$

mit $c = \dfrac{11{,}2}{17} \quad \Longrightarrow$

$$c - c\,e^{-k\,8} = 1 - e^{-k\,4}$$

mit $x = e^{-k\,4} \quad \Longrightarrow$

$$x^2 - \frac{1}{c}\,x - \frac{c-1}{c} = 0$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 0{,}5179$$

$$\Longrightarrow \quad k = 0{,}1645$$

$$\begin{aligned} 11{,}2 &= a\cdot(1 - e^{-k\,4}) \\ \Longrightarrow \quad a &= 23{,}23 \end{aligned}$$

   b) $f(12) = 20{,}0$

   c) $G = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a = 23{,}23$

↑ Medikament-Aufgabe

Von einem Medikament wird einem Patienten eine Dosis von 200 mg intravenös verabreicht. Danach wird das Medikament im Körper abgebaut und über die Nieren ausgeschieden. Gibt $f(t)$ die zum Zeitpunkt t noch vorhandene Menge des Medikaments im Blut an, so gilt für die Funktion f näherungsweise die Differenzialgleichung $f'(t) = -k \cdot f(t) \;\; (k > 0)$ ($f(t)$ in Milligramm, t in Stunden seit der Verabreichung).

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f, die eine Lösung der Differenzialgleichung ist, wenn die Menge des Medikaments im Blut pro Stunde um 6 % abnimmt!

b) Nach welcher Zeit sind 90 % des Medikaments abgebaut?

c) 5 Stunden nach der Verabreichung erhält der Patient auf die gleiche Art noch einmal 200 mg des Medikaments. Wie viel Milligramm des Medikaments sind nach weiteren 10 Stunden noch im Körper?

Von dem gleichen Medikament nimmt ein anderer Patient 500 mg oral auf. Das Medikament gelangt jetzt zunächst in den Magen-Darm-Trakt und wird von dort ins Blut abgegeben. Vereinfacht gilt für die Änderungsrate der im Blut vorhandenen Menge des Medikaments in diesem Fall:
$g'(t) = -0{,}06 \cdot g(t) + 40 \cdot e^{-0{,}08t} \;\; $ ($g(t)$ in Milligramm, t in Stunden seit der Einnahme).

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(t) = 2000\,(e^{-0{,}06t} - e^{-0{,}08t})$ eine Lösung der DGL ist, zeichnen Sie den Graphen von g und interpretieren Sie ihn kurz!

e) Nach welcher Zeit befindet sich die größte Menge des Medikaments im Blut? Wie groß ist sie dann?

f) Damit das Medikament wirkt, müssen mindestens 80 mg im Blut vorhanden sein. Wann beginnt es zu wirken und wie lange dauert die Wirkung an?

↑

↑ Medikament-Aufgabe   Lösungshinweise

Von einem Medikament wird einem Patienten eine Dosis von 200 mg intravenös verabreicht. Danach wird das Medikament im Körper abgebaut und über die Nieren ausgeschieden. Gibt $f(t)$ die zum Zeitpunkt t noch vorhandene Menge des Medikaments im Blut an, so gilt für die Funktion f näherungsweise die Differenzialgleichung $f'(t) = -k \cdot f(t)$ $(k > 0)$ ($f(t)$ in Milligramm, t in Stunden seit der Verabreichung).

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f, die eine Lösung der Differenzialgleichung ist, wenn die Menge des Medikaments im Blut pro Stunde um 6 % abnimmt!

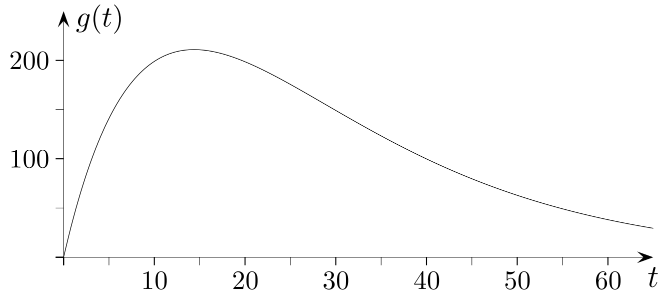
$$a \cdot e^{-k \cdot 1} = 0{,}94 \cdot a \quad \Longrightarrow \quad k = 0{,}06$$
$$f(t) = 200 \cdot e^{-0{,}06 \cdot t}$$

b) Nach welcher Zeit sind 90 % des Medikaments abgebaut? $\quad f(t) = 0{,}1 \cdot a \quad \Longrightarrow \quad t = 38{,}4$

c) 5 Stunden nach der Verabreichung erhält der Patient auf die gleiche Art noch einmal 200 mg des Medikaments. Wie viel Milligramm des Medikaments sind nach weiteren 10 Stunden noch im Körper? $\quad$ 191 (mg)

Von dem gleichen Medikament nimmt ein anderer Patient 500 mg oral auf. Das Medikament gelangt jetzt zunächst in den Magen-Darm-Trakt und wird von dort ins Blut abgegeben. Vereinfacht gilt für die Änderungsrate der im Blut vorhandenen Menge des Medikaments in diesem Fall:
$g'(t) = -0{,}06 \cdot g(t) + 40 \cdot e^{-0{,}08t}$ ($g(t)$ in Milligramm, t in Stunden seit der Einnahme).

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(t) = 2000\left(e^{-0{,}06t} - e^{-0{,}08t}\right)$ eine Lösung der DGL ist, zeichnen Sie den Graphen von g und interpretieren Sie ihn kurz!

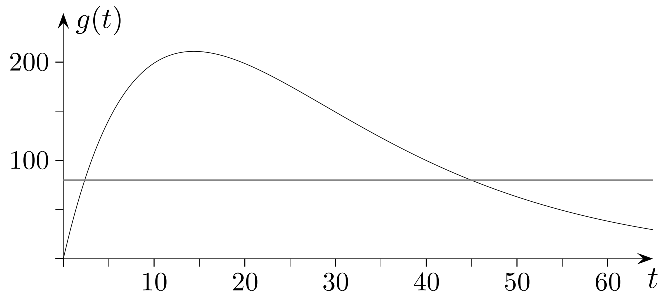


Die oral aufgenommene Medikamentenmenge wird verzögert ins Blut aufgenommen und erreicht nach einer gewissen Zeit ein Maximum.
Die anschließende Abnahme erfolgt deutlich langsamer als die Zunahme.

e) Nach welcher Zeit befindet sich die größte Menge des Medikaments im Blut? Wie groß ist sie dann? $\quad$ GTR $\quad t = 14{,}4 \quad$ 211 (mg)

f) Damit das Medikament wirkt, müssen mindestens 80 mg im Blut vorhanden sein. Wann beginnt es zu wirken und wie lange dauert die Wirkung an?

Schnittstellen mit GTR
$t_1 = 2{,}4$ und $t_2 = 44{,}9$
Die Wirkungsdauer beträgt 42,5 Stunden.



↑ Wasserbecken-Aufgabe

In einem Wasserbecken, das sowohl eine Zufluss- als auch eine Abflussmöglichkeit besitzt, befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt 100 m^3 Wasser. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Wasservolumen im Becken, wobei die Änderungsrate des Volumens durch $v(t) = -0{,}49e^{-0{,}007t}$ $(t \geq 0)$ beschrieben wird. (t in Stunden, $v(t)$ in m^3 pro Stunde).

a) Nimmt die Wassermenge im Becken zu oder ab? Bestimmen Sie einen Funktionsterm $V(t)$ für das Wasservolumen! Mit welchem Wasservolumen im Becken ist langfristig zu rechnen?

b) $V(t)$ erfüllt eine Differenzialgleichung der Form $V'(t) = 0{,}007 \cdot (a - V(t))$. Bestätigen Sie dies!

c) Begründen Sie mithilfe dieser Differenzialgleichung, dass die Veränderung auf einen konstanten Zufluss und einen vom Bestand zeitabhängigen Abfluss zurückgeführt werden kann!

d) Wie groß müsste dieser konstante Zufluss sein, damit sich im Becken langfristig ein Wasservolumen von 50 m^3 einstellt, wenn $V(t)$ eine Differenzialgleichung der angegeben Form erfüllt?

Zu Beobachtungszwecken sind nun 10 m^3 Wasser im Becken. Über Ventile können der Zufluss und der Abfluss geregelt werden. Näherungsweise können die Zuflussrate durch die Funktion $Z(t) = \frac{5}{t+1}$ und die Abflussrate durch die Funktion $A(t) = 2e^{-t} + 1$ beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $A(t)$ und $Z(t)$ in m^3 pro Stunde).

e) Skizzieren Sie die Graphen von $Z(t)$ und $A(t)$ in einem Koordinatensystem und beschreiben Sie anhand der Graphen die Entwicklung des Wasservolumens im Becken.

f) Berechnen Sie das größte auftretende Wasservolumen!

g) Sinkt das Wasservolumen im Becken unter 10 m^3, so werden Zu- und Ablauf des Wassers sofort unterbrochen. Wann ist dies der Fall?

↑

↑ Wasserbecken-Aufgabe Lösungshinweise

In einem Wasserbecken, das sowohl eine Zufluss- als auch eine Abflussmöglichkeit besitzt, befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt 100 m^3 Wasser. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Wasservolumen im Becken, wobei die Änderungsrate des Volumens durch $v(t) = -0{,}49e^{-0{,}007t}$ $(t \geq 0)$ beschrieben wird. (t in Stunden, $v(t)$ in m^3 pro Stunde).

a) Nimmt die Wassermenge im Becken zu oder ab? Bestimmen Sie einen Funktionsterm $V(t)$ für das Wasservolumen! Mit welchem Wasservolumen im Becken ist langfristig zu rechnen?

$v(t) < 0$, daher Abnahme

$$V(t) = 100 + \int_0^t v(x)\,dx = 100 + \Big[\frac{0{,}49}{0{,}007}e^{-0{,}007x}\Big]_0^t = 30 + 70 \cdot e^{-0{,}007 \cdot t}, \quad 30$$

b) $V(t)$ erfüllt eine Differenzialgleichung der Form $V'(t) = 0{,}007 \cdot (a - V(t))$. Bestätigen Sie dies!

$a = 30$

c) Begründen Sie mithilfe dieser Differenzialgleichung, dass die Veränderung auf einen konstanten Zufluss und einen vom Bestand zeitabhängigen Abfluss zurückgeführt werden kann!

$$V'(t) = 0{,}007 \cdot (30 - V(t)) = \underbrace{0{,}21}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{0{,}007 \cdot V(t)}_{\text{Abfluss}}$$

d) Wie groß müsste dieser konstante Zufluss sein, damit sich im Becken langfristig ein Wasservolumen von $50\,m^3$ einstellt, wenn $V(t)$ eine Differenzialgleichung der angegeben Form erfüllt?

$$V'(t) = 0{,}007 \cdot (50 - V(t)) = 0{,}35 - 0{,}007 \cdot V(t), \quad 0{,}35\ (m^3)$$

Zu Beobachtungszwecken sind nun $10\,m^3$ Wasser im Becken. Über Ventile können der Zufluss und der Abfluss geregelt werden. Näherungsweise können die Zuflussrate durch die Funktion $Z(t) = \frac{5}{t+1}$ und die Abflussrate durch die Funktion $A(t) = 2e^{-t} + 1$ beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $A(t)$ und $Z(t)$ in m^3 pro Stunde).

e) Skizzieren Sie die Graphen von $Z(t)$ und $A(t)$ in einem Koordinatensystem und beschreiben Sie anhand der Graphen die Entwicklung des Wasservolumens im Becken.

Zunächst ist die Zuflussrate größer als die Abflussrate.
Die Graphen schneiden sich an der Stelle $t = 3{,}8$ (GTR).
Danach nimmt das Wasservolumen wieder ab.
Langfristig würde sich das Becken vollständig leeren,
da die Zuflussrate gegen null und die Abflussrate gegen $1\,m^3$ pro Stunde strebt.

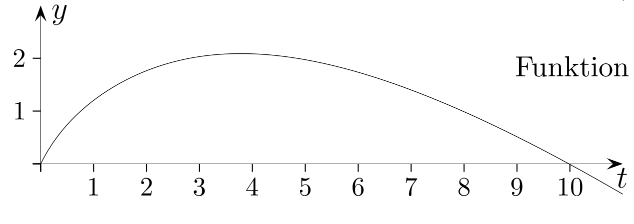
f) Berechnen Sie das größte auftretende Wasservolumen!

$$V_{max} = 10 + \int_0^{3{,}8} \big(Z(t) - A(t)\big)\,dx = 12{,}1\ (m^3) \quad \text{(GTR)}$$

g) Sinkt das Wasservolumen im Becken unter 10 m^3, so werden Zu- und Ablauf des Wassers sofort unterbrochen. Wann ist dies der Fall?

$$\underbrace{10 + \int_0^T \big(Z(t) - A(t)\big)\,dx}_{} = 10 \quad \Longrightarrow \quad T = 9{,}98 \quad \text{(GTR)}$$

Funktion von T grafisch darstellen und Nullstelle bestimmen.

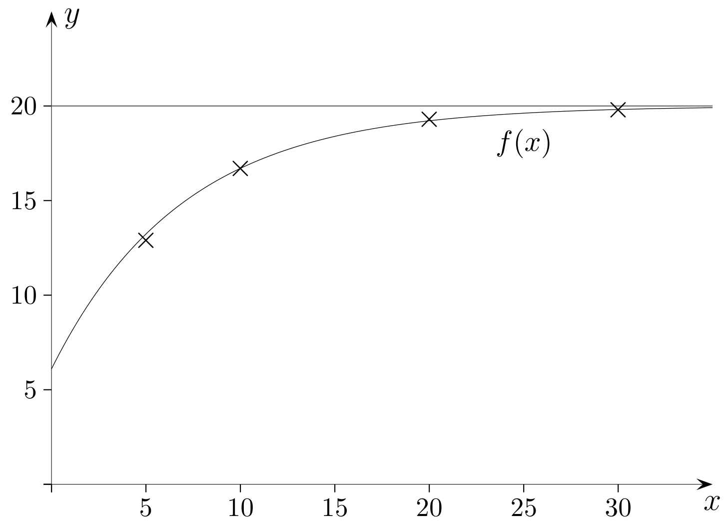


↑ Beschränktes Wachstum Regressionskurve

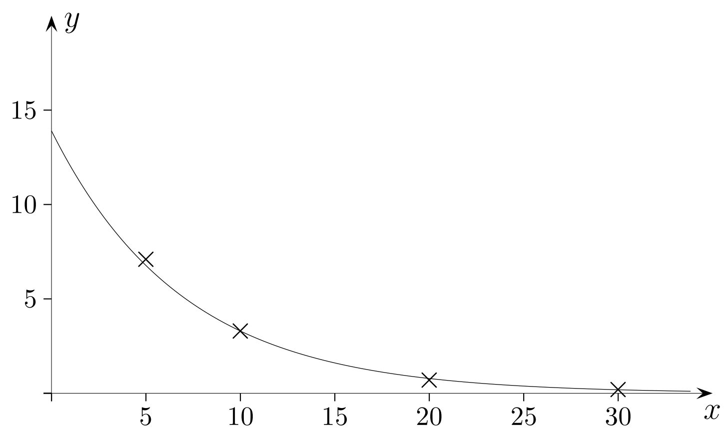
Um zu den Daten

x	5	10	20	30
y	12,9	16,7	19,3	19,8

eine Regressionskurve des beschränkten Wachstums $f(x) = G - a \cdot e^{-kx}$ $\left(\Longleftrightarrow\ G - f(x) = a \cdot e^{-kx}\right)$ zu ermitteln, gehen wir zu den Werten $G - f(x)$ über und nähern sie exponentiell durch $a \cdot e^{-kx}$ an. Hierzu ist der Grafik ein Näherungswert für die Sättigungsgrenze G zu entnehmen.



x	5	10	20	30
$G - y$	7,1	3,3	0,7	0,2



Der GTR liefert: $G - f(x) = 13{,}9 \cdot 0{,}866^x$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 20 - 13{,}9 \cdot 0{,}866^x \qquad \text{oder} \qquad f(x) = 20 - 13{,}9 \cdot e^{-0{,}14x}$$

↑ Flüssigkeitsmenge Baden-Württemberg 2008

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird durch die Funktion

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t},\ t \geq 0$$

beschrieben (t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85 % des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1 % des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.
Geben Sie a und b an.
Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2 % des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt.
Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

↑

↑ Flüssigkeitsmenge   Baden-Württemberg 2008

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird durch die Funktion

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t},\ t \geq 0$$

beschrieben (t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt? $t = 69{,}3$
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt. $f'(t) > 0$
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde. 398,4 Liter
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85 % des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten?
Begründen Sie Ihre Antwort. $f(t) \leq 1000 < 1020$

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1 % des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.
Geben Sie a und b an. $B'(t) = 10 - 0{,}01 \cdot B(t)$

genauer: $e^{-b} = 1 - \frac{p}{100}$, siehe Zu- und Abfluss, jedoch gilt: $-\ln(0{,}99) = 0{,}010050$

Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist. f ist in die DGL einzusetzen.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2 % des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt.

$B'(t) = 12 - 0{,}02 \cdot B(t)$

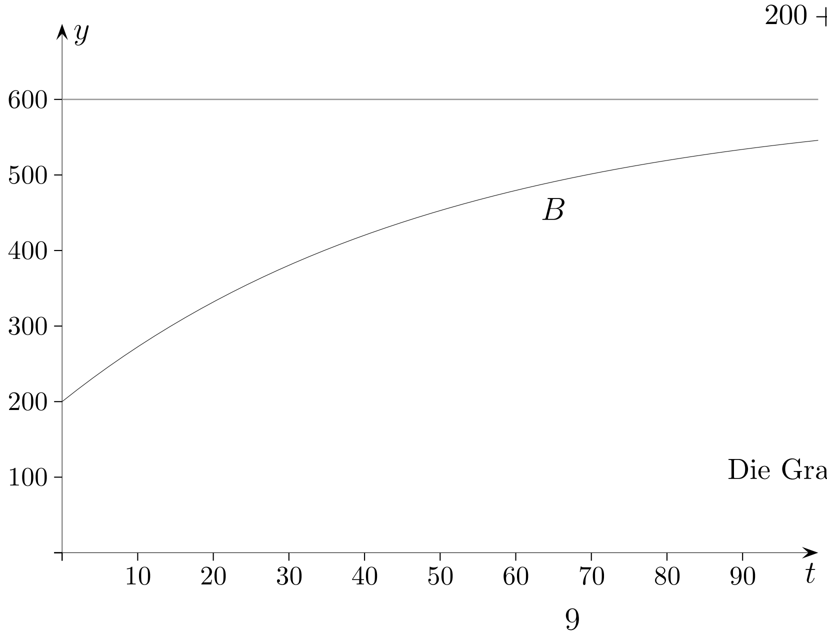
beachte: für G gilt: Zufluss = Abfluss, $0{,}02 \cdot G = 12$, $B'(t) = 0{,}02 \cdot (600 - B(t))$

$B(t) = 600 - 400 \cdot e^{-0{,}02t}$

Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

$B(60) = 479{,}5$ Liter

$200 + 60 \cdot 12 - 479{,}5 = 440{,}5$ (Liter)



Die Grafik dient dem Verständnis.

↑ Fieberkurve Baden-Württemberg 2009

Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei $36{,}5°C$.
Die Funktion

$$f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t}$$

beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten.
Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$.

a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten?
Geben Sie diese Temperatur an.
Skizzieren Sie die Fieberkurve innerhalb der ersten 48 Stunden in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.
Zu welchen beiden Zeitpunkten innerhalb der ersten 48 Stunden nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab?

b) Wann sinkt die Körpertemperatur unter $37°C$?
Weisen Sie nach, dass die Temperatur ab diesem Zeitpunkt dauerhaft unter $37°C$ bleibt.
Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur für den Zeitraum vom Krankheitsbeginn bis zu diesem Zeitpunkt.
In welchem 2-Stunden-Zeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu?

c) Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur.
Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur $38{,}4°C$.
Bestimmen Sie eine Funktion g, welche den weiteren Temperaturverlauf beschreibt.
Zu welchem Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikament wäre?

↑

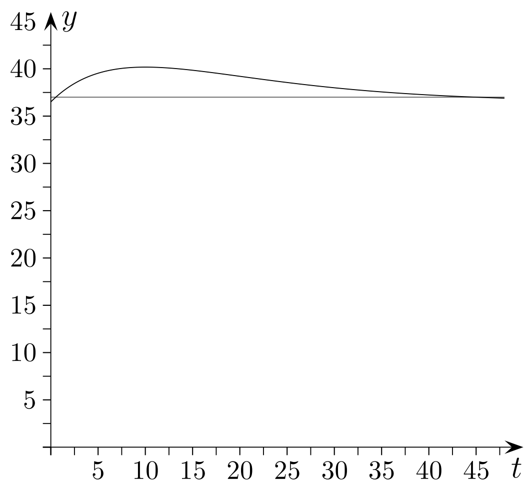
↑ Fieberkurve Baden-Württemberg 2009

Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei 36,5°C.
Die Funktion

$$f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t}$$

beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten. Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in °C.

a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten? $t = 10$
Geben Sie diese Temperatur an. 40,18°C
Skizzieren Sie die Fieberkurve innerhalb der ersten 48 Stunden in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.



Zu welchen beiden Zeitpunkten innerhalb der ersten 48 Stunden nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab? $t_{\text{zu}} = 0,\ t_{\text{ab}} = 20$

b) Wann sinkt die Körpertemperatur unter 37°C? 45 Stunden nach Krankheitsbeginn
Weisen Sie nach, dass die Temperatur ab diesem Zeitpunkt dauerhaft unter 37°C bleibt.
$f'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > 10$
Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur für den Zeitraum vom Krankheitsbeginn bis zu diesem Zeitpunkt. 38,6°C
In welchem 2-Stunden-Zeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu? $f(t+2) - f(t) = 1$
$t = 2{,}2, \quad 2{,}2 \leq t \leq 4{,}2$

↑

c) Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur.
Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur 38,4°C.
Bestimmen Sie eine Funktion g, welche den weiteren Temperaturverlauf beschreibt.

$$h(t) = G + ae^{-kt}$$

$$h(0) = f(5),\ h(2) = 38{,}4\ (°C)$$

$$h(t) = 36{,}5 + 3 \cdot e^{-0{,}228t}$$

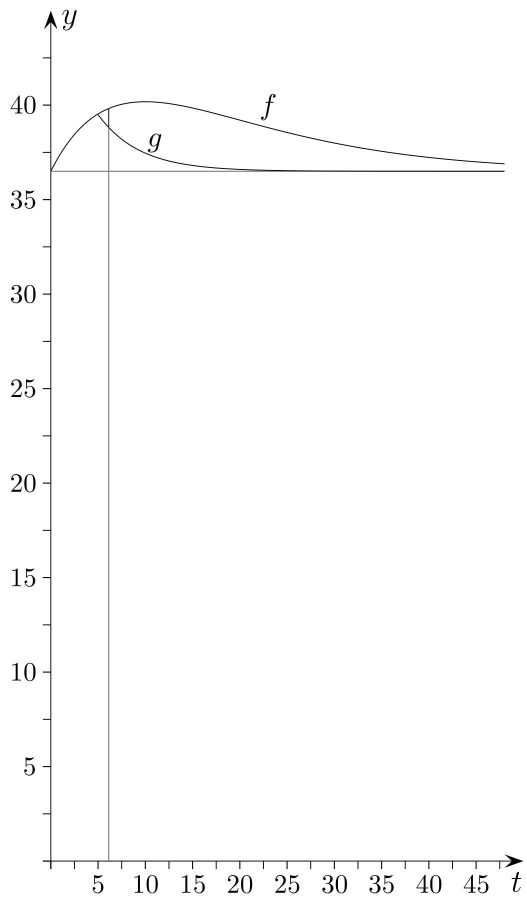
$$g(t) = h(t-5)$$

Zu welchem Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikament wäre?

$$f(t) - g(t) = 1,\ t = 6{,}13$$

alternativ $f(t+5) - h(t) = 1,\ t = 1{,}13$

1,13 Stunden nach der Medikamenteneinnahme ist die Körpertemperatur um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikamente wäre.



Die Grafik dient dem Verständnis.

↑

↑ Motorboot Baden-Württemberg 2010

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit 160 $\frac{m}{min}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

beschrieben. (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{m}{min}$).

a) Skizzieren Sie den Zeit-Geschwindigkeits-Graphen des Motorbootes für die ersten fünf Minuten.
Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum.
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab?
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?
Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot?

b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren?
Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als $500\,m$ zurück?
Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot?

c) Zum Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein.
Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit.
Ab dem Zeitpunkt t_0 wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an den Graphen der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_0 ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand. Wann kommt das Segelboot zum Stillstand?

↑

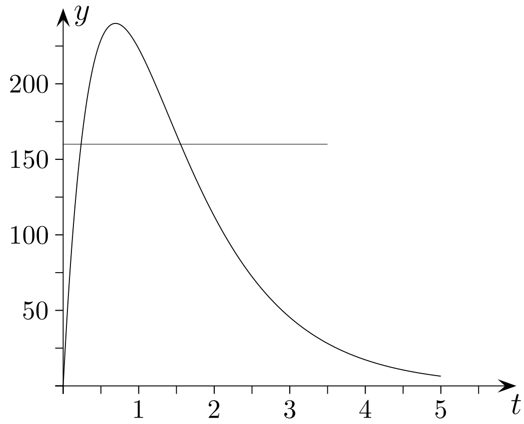
↑ Motorboot Baden-Württemberg 2010

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit $160\,\frac{m}{min}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot (e^{-t} - e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

beschrieben. (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{m}{min}$).

a) Skizzieren Sie den Zeit-Geschwindigkeits-Graphen des Motorbootes für die ersten fünf Minuten.



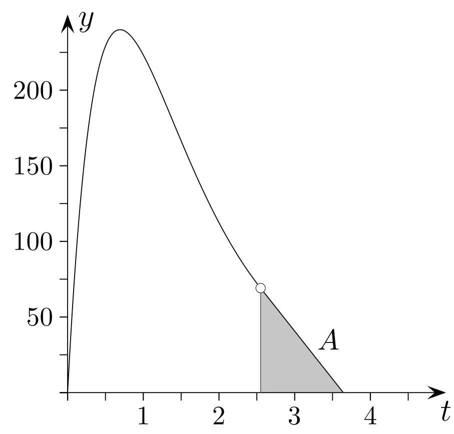
Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum. $240\ m/min$
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab? $t = 1{,}39$
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten? $94{,}7\ m/min$
Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot?
$1{,}554 - 0{,}237 = 1{,}317$

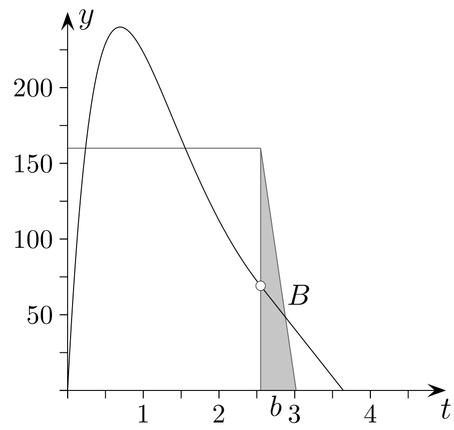
b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren? $358{,}9\,m$
Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. $s(t) = -960 \cdot e^{-t} + 480 \cdot e^{-2t} + 480$
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als $500\,m$ zurück? $s(t) \longrightarrow 480$
Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot? $s^* = 160 \cdot t$, Schnitt s, s^*, $t = 0{,}58$

c) Zum Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein.
Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit.
Ab dem Zeitpunkt t_0 wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an den Graphen der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben. $y = -63{,}25t + 230{,}4$
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand? $t = 3{,}64\ min$

↑

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_0 ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand. Wann kommt das Segelboot zum Stillstand?





Die beiden Dreiecksflächen A, B müssen gleichen Inhalt haben.

$A = 37{,}66\ FE \quad \Longrightarrow \quad b = 0{,}47,\ \ t = 2{,}55 + 0{,}47 = 3{,}02$

Das Segelboot kommt nach ca. $3\,min$ zum Stillstand.

↑

↑ Viruserkrankung Baden-Württemberg 2011

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft durch die Funktion

$$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}2t},\ t \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Wann erkranken die meisten Personen?
Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.
Wann nimmt sie am stärksten ab?

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet.
Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.
Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet?
Die Funktion $F(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0{,}2t}$ ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
Wann wird die Zahl von 20000 gemeldeten Personen erreicht?
Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40000 bleiben wird.

In einer benachbarten Stadt mit 30000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an.
Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Bestimmen Sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein?
Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22000 Personen.
Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an.

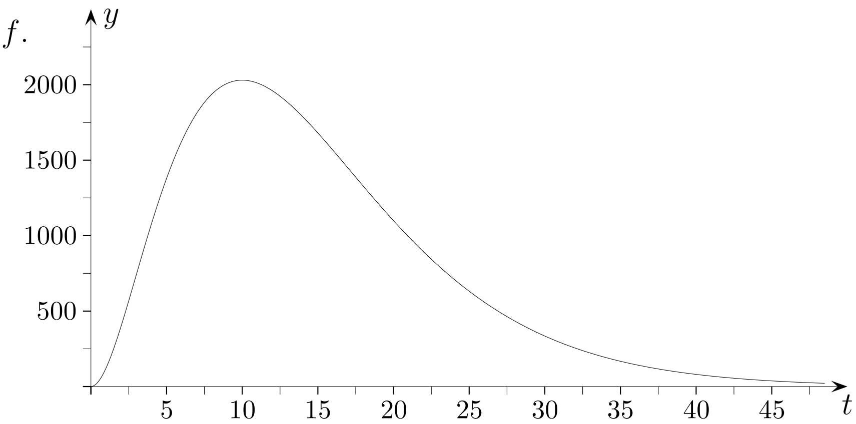
↑ Viruserkrankung Baden-Württemberg 2011

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft durch die Funktion

$$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t},\ t \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.



Wann erkranken die meisten Personen? $t = 10$

Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.

Wann nimmt sie am stärksten ab? $f'(t) < 0$ für $t > 10,\ t = 17{,}07$

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet.
Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.
Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet? 16236

Die Funktion $F(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t}$ ist eine Stammfunktion von f.

Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.

$$G(t) = F(t) + C,\ G(0) = 100 \quad \Longrightarrow \quad C = 37600$$

$$F(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t} + 37600$$

Wann wird die Zahl von 20000 gemeldeten Personen erreicht? $t = 14$

Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40000 bleiben wird.

$$G'(t) > 0,\ \lim_{t\to\infty} G(t) = 37600$$

In einer benachbarten Stadt mit 30000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an.

Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an. $B'(t) = 0{,}1 \cdot \left(30000 - B(t)\right)$

Bestimmen Sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt. $B(t) = 30000 - 15000 \cdot e^{-0,1t}$

Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein? 19945

Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22000 Personen.

Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an. $B^*(t) = 30000 - 15000 \cdot e^{-0,1572t}$

↑ Medikament-Aufgabe Baden-Württemberg 2012

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten durch die Funktion

$$f(t) = 130 \cdot \left(e^{-0{,}2t} - e^{-0{,}8t}\right),\ 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden, $f(t)$ in mg) beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab?
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden.

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut durch die Funktion

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05t}\right),\ t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg) beschreiben.

b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\frac{mg}{min}$?
In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg?

c) Geben Sie eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion g erfüllt wird.
Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut.
Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute?
Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden?

↑ Medikament-Aufgabe Baden-Württemberg 2012

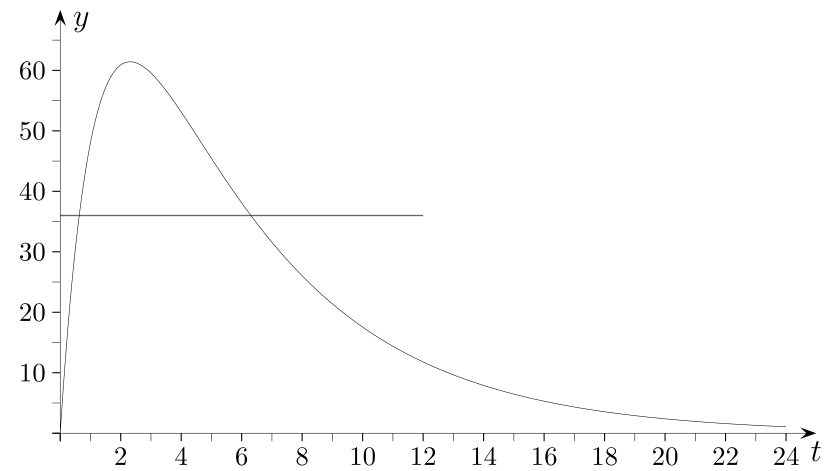
Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten durch die Funktion

$$f(t) = 130 \cdot \left(e^{-0{,}2t} - e^{-0{,}8t}\right),\ 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden, $f(t)$ in mg) beschrieben.

Skizzieren Sie den Graphen von f.



Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt. $0{,}628 \leq t \leq 6{,}305$
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab?
$f'(0) = 78,\ f'(4{,}62) = -7{,}74$
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden. $35{,}71\ mg$

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut durch die Funktion

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05t}\right),\ t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg) beschreiben.

b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden? $80\ mg$
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt. $g'(t) > 0$
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\frac{mg}{min}$?
$27{,}7\ min$
In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg? $[6{,}83; 21{,}83]$
$g(t+15) - g(t) = 30,\ t = 6{,}83$

c) Geben Sie eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion g erfüllt wird. $g'(t) = 0{,}05 \cdot \big(80 - g(t)\big)$
Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut.
Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute? $g'(t) = 4 - 0{,}05 \cdot g(t),\ 4\ mg$
Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden? $g'(t) = 0{,}05 \cdot \big(90 - g(t)\big) = 4{,}5 - 0{,}05 \cdot g(t),\ 4{,}5\ mg$

↑ Wassertank-Aufgabe Baden-Württemberg 2013

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right), \quad 0 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

b) Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank?

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion

$$w(t) = r(t) - 400, \quad 3 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

↑ Wassertank-Aufgabe Lösungshinweise ohne Einheiten

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right), \quad 0 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale Zuflussrate. $r(1{,}386) = 2500$
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde? $0{,}647 \le t \le 2{,}572$
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? $2{,}77$

b) Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank? $6035{,}27$
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? $\int_0^u r(t)\,dt = 5000, \ u = 2{,}456$

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion

$$w(t) = r(t) - 400, \quad 3 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen? $9 \cdot 400 = 3600$
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab? $w(6{,}352) = 0$
Für $t > 6{,}352$ ist die Zuflussrate negativ.

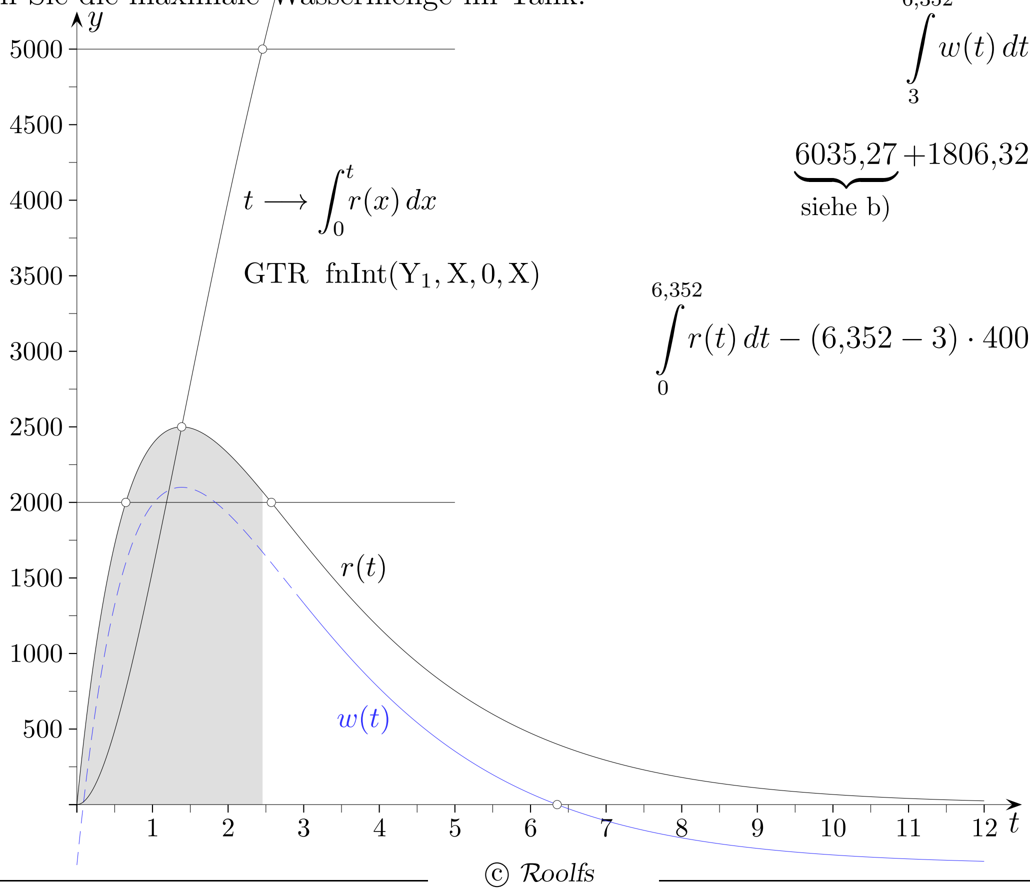
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

$$\int_3^{6{,}352} w(t)\,dt = 1806{,}32$$

$$\underbrace{6035{,}27}_{\text{siehe b)}} + 1806{,}32 = 7841{,}59$$

alternativ:

$$\int_0^{6{,}352} r(t)\,dt - (6{,}352 - 3) \cdot 400 = 7841{,}59$$



↑ Konzentration eines Medikaments

Ein Patient bekommt durch eine Tropfinfusion ein Medikament zugeführt.

Zeit t in Minuten	0	10	20	30	40	50	60
Inhalt des Tropfes in ml	300	285	270	255	240	225	210
Medikamentenmenge im Körper in ME	0	11,8	18,96	23,31	25,94	27,54	28,51

Die Tabelle enthält Messwerte für die erste Stunde nach Anlegen des Tropfes
bei einem bestimmten Patienten (Patient S) mit einem Gewicht von $60\,kg$.

a) In welcher Weise hängt der Inhalt des Tropfes von der Zeit ab?
Geben Sie die Gleichung der entsprechenden Funktion f an.

Die im Körper verbliebene Medikamentenmenge lässt sich durch die Funktionsgleichung
$g(t) = a - a \cdot e^{-bt}$ mit patientenabhängigen Parametern a und b beschreiben.
Für einen bestimmten Patienten ist a der halbe Zahlenwert seines Gewichts (in kg).

b) Untersuchen Sie, wie sich die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S entwickelt.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g (Patient S).
Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g und ihrer Ableitung im Intervall $[0; 120]$
jeweils in ein Koordinatensystem. Interpretieren Sie den Wert $g'(30)$.

d) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an dem die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S
die Nachweisgrenze von 3 ME überschreitet, bzw. an dem die Änderungsrate der Medikamentenmenge nur noch $0{,}03\,\frac{\text{ME}}{\text{min}}$ beträgt.

e) Bestimmen Sie die Werte der Integrale $\int_0^{30} f'(t)\,dt$ und $\int_0^{30} g'(t)\,dt$ und interpretieren Sie
sie im Sachkontext.

Für eine Langzeitstudie über die Nebenwirkungen des Medikaments wird ermittelt,
wie hoch die durchschnittliche Menge im Körper des Patienten in der ersten Stunde ist.

f) Ermitteln Sie diese Menge für den Patienten S.

g) Beurteilen Sie, wie sich der Parameter b ändert, wenn der Körper eines anderen Patienten,
der ebenfalls $60\,kg$ wiegt, das Medikament deutlich schneller abbaut.

h) Die gewünschte Wirkung des Medikaments tritt ein, wenn die Medikamentenmenge im Körper
des Patienten 75 % des jeweiligen Wertes von a erreicht.
Untersuchen Sie, ob die Wirkung beim Patienten S oder beim Patienten H, der $100\,kg$ wiegt
und für den $b = 0{,}1$ ist, schneller eintritt.

↑ Konzentration eines Medikaments

Ein Patient bekommt durch eine Tropfinfusion ein Medikament zugeführt.

Zeit t in Minuten	0	10	20	30	40	50	60
Inhalt des Tropfes in ml	300	285	270	255	240	225	210
Medikamentenmenge im Körper in ME	0	11,8	18,96	23,31	25,94	27,54	28,51

Die Tabelle enthält Messwerte für die erste Stunde nach Anlegen des Tropfes
bei einem bestimmten Patienten (Patient S) mit einem Gewicht von $60\,kg$.

a) In welcher Weise hängt der Inhalt des Tropfes von der Zeit ab? linear
Geben Sie die Gleichung der entsprechenden Funktion f an. $f(t) = -1{,}5t + 300$

Die im Körper verbliebene Medikamentenmenge lässt sich durch die Funktionsgleichung
$g(t) = a - a \cdot e^{-bt}$ mit patientenabhängigen Parametern a und b beschreiben.
Für einen bestimmten Patienten ist a der halbe Zahlenwert seines Gewichts (in kg).

b) Untersuchen Sie, wie sich die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S entwickelt.
$b \approx 0{,}05$
$\lim\limits_{t\to\infty} (30 - 30 \cdot e^{-0{,}05t}) = 30$

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g (Patient S). $g'(t) = 1{,}5 \cdot e^{-0{,}05t}$
Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g und ihrer Ableitung im Intervall $[0; 120]$
jeweils in ein Koordinatensystem. Interpretieren Sie den Wert $g'(30)$. $g'(30) \approx 0{,}33$
Die Medikamentenmenge nimmt in der 31. Minute um ca. 0,33 ME zu.

d) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an dem die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S die Nachweisgrenze von 3 ME überschreitet, bzw. an dem die Änderungsrate der Medikamentenmenge nur noch $0{,}03\,\frac{\text{ME}}{\text{min}}$ beträgt. $t_1 = 2{,}1,\ t_2 = 78{,}2$ (Minuten)

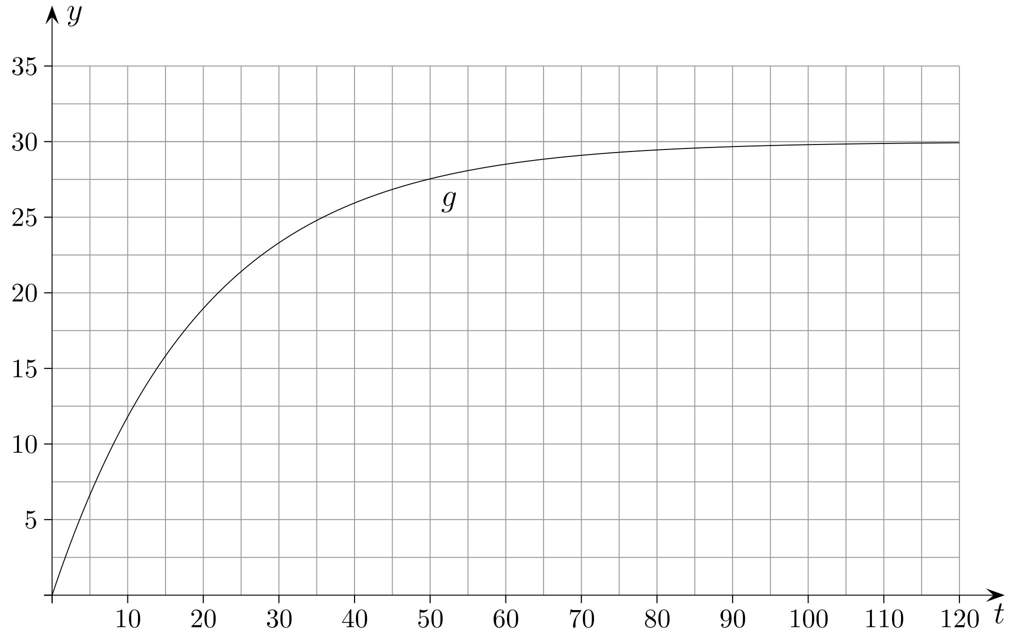
e) Bestimmen Sie die Werte der Integrale $\int_0^{30} f'(t)\,dt$ und $\int_0^{30} g'(t)\,dt$ und interpretieren Sie
sie im Sachkontext. -45 bzw. $23{,}31$
aus dem Tropf in 30 Minuten abgeflossene Menge (in ml) bzw.
Medikamentenmenge (in ME) im Körper des Patienten S nach 30 Minuten

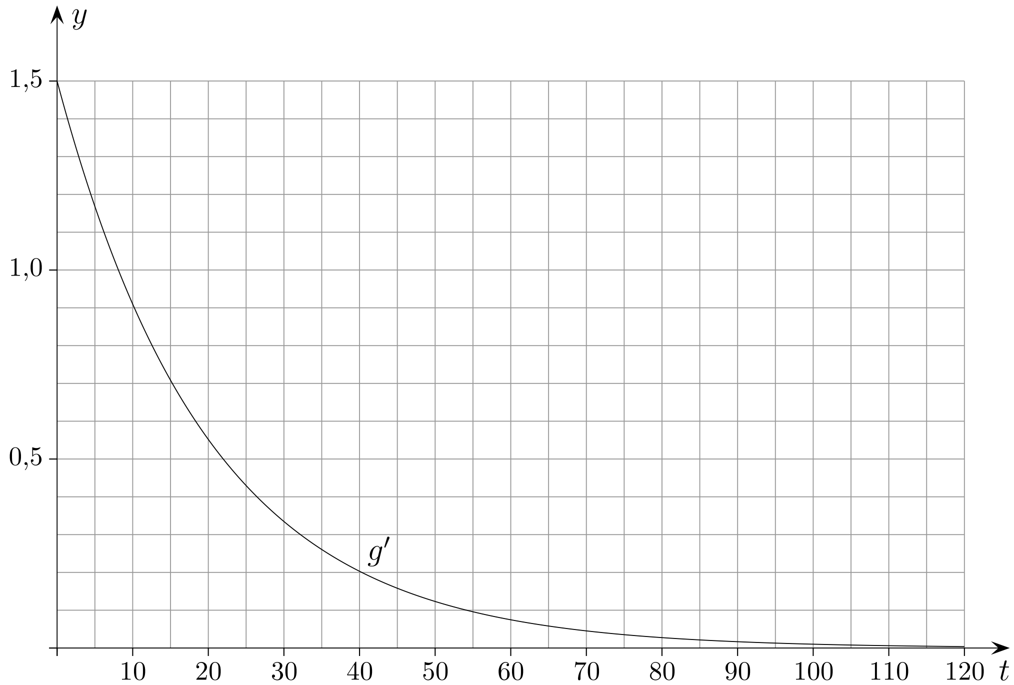
Für eine Langzeitstudie über die Nebenwirkungen des Medikaments wird ermittelt,
wie hoch die durchschnittliche Menge im Körper des Patienten in der ersten Stunde ist.

f) Ermitteln Sie diese Menge für den Patienten S. $\frac{1}{60}\int_0^{60} g(t)\,dt = 20{,}5$

g) Beurteilen Sie, wie sich der Parameter b ändert, wenn der Körper eines anderen Patienten, der ebenfalls $60\,kg$ wiegt, das Medikament deutlich schneller abbaut. $a - a \cdot e^{-bt} < a - a \cdot e^{-b_S t}$
$\iff b < b_S$

h) Die gewünschte Wirkung des Medikaments tritt ein, wenn die Medikamentenmenge im Körper des Patienten 75 % des jeweiligen Wertes von a erreicht.
Untersuchen Sie, ob die Wirkung beim Patienten S oder beim Patienten H, der 100 kg wiegt und für den $b = 0{,}1$ ist, schneller eintritt. S: $t_S = 27{,}7$, H: $t_H = 13{,}9$ (schneller)





↑