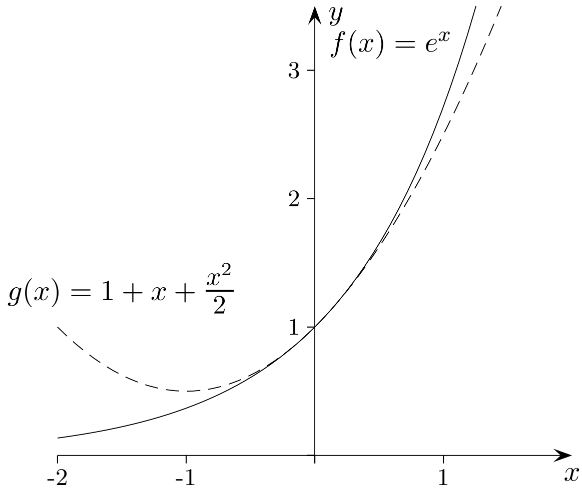
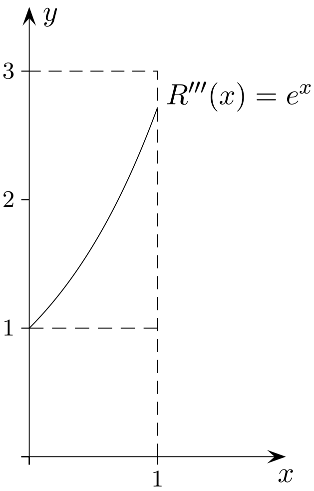
Fehlerabschätzung für Taylorpolynome der e-Funktion





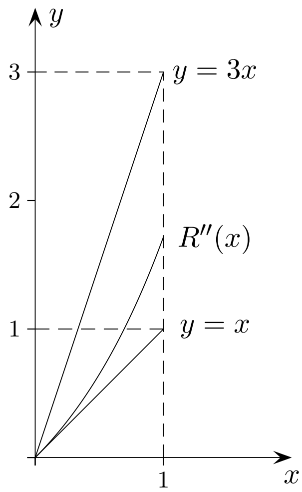
1. Wir approximieren die Funktion $f(x) = e^x$ durch $g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$ und schätzen den Fehler $R(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ ab.

   Sei also $\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + R(x) \quad$ wir leiten beide Seiten ab:

   $$e^x = 1 + x + R'(x)$$

   $$e^x = 1 + R''(x)$$

   $$e^x = R'''(x)$$



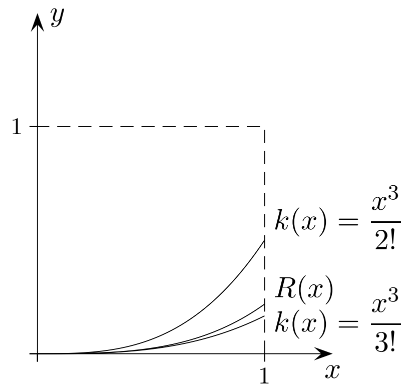
2. Aus einer Abschätzung für $R'''(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ leiten wir eine Abschätzung für $R(x)$ her.

   Es ist $\quad 1 \leq R'''(x) < 3 \quad \Longrightarrow$ (beachte $R''(0) = 0$)

   $$x \leq R''(x) < 3x \quad \Longrightarrow \text{(beachte } R'(0) = 0 \text{)}$$

   $$\frac{x^2}{2} \leq R'(x) < 3\,\frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \text{(beachte } R(0) = 0 \text{)}$$

   $$\frac{x^3}{3!} \leq R(x) < 3\,\frac{x^3}{3!}$$



3. Beispielhafte Begründung für: $\quad 1 \leq R'''(x) \quad \Longrightarrow \quad x \leq R''(x)$
   $R''(x)$ verläuft durch den Ursprung und hat eine Ableitung (nämlich $R'''(x)$), die größer als 1 ist. $R''(x)$ steigt also stärker als $y = x$ an, verläuft daher oberhalb von $y = x$, es gilt daher $x \leq R''(x)$.

Aufg.
Schätze den Näherungsfehler $R(x)$ für das Taylorpolynom 4. Grades (5. Grades, n-ten Grades) ab, das die e-Funktion approximiert.

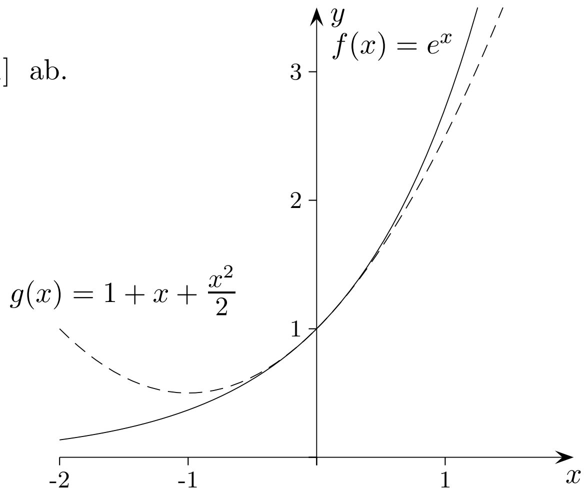
Brook Taylor (1685-1731)

Fehlerabschätzung (durch Integration) für Taylorpolynome der e-Funktion

1. Wir approximieren die Funktion $f(x) = e^x$ durch

$$g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

und schätzen den Fehler $R(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ ab.



Sei also $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + R(x)$$

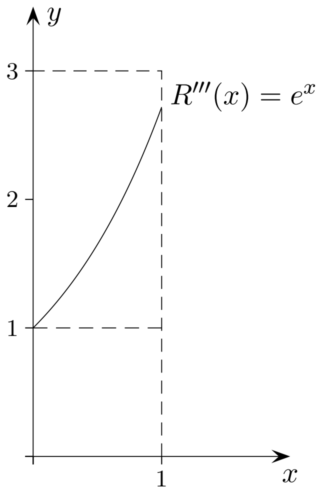
Wir leiten beide Seiten ab:

$$e^x = 1 + x + R'(x)$$

$$e^x = 1 + R''(x)$$

$$e^x = R'''(x)$$

2. Aus einer Abschätzung für $R'''(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ leiten wir eine Abschätzung für $R(x)$ durch Integration her.



$$1 \leq R'''(x) < 3 \quad \Longrightarrow \quad (\text{beachte } R''(0) = 0)$$

$$x \leq R''(x) < 3x \quad \Longrightarrow \quad (\text{beachte } R'(0) = 0)$$

$$\frac{x^2}{2} \leq R'(x) < 3\,\frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad (\text{beachte } R(0) = 0)$$

$$\frac{x^3}{3!} \leq R(x) < 3\,\frac{x^3}{3!}$$

Begründung für den ersten Übergang:

$$1 \leq R'''(x) < 3 \quad \Longrightarrow \quad (\text{rechte Grenze } x, \text{ Integrationsvariable } x \text{ wird umbenannt})$$

$$\int_0^x 1\, dt \leq \int_0^x R'''(t)\, dt < \int_0^x 3\, dt \quad \Longrightarrow \quad (\text{beachte } R''(0) = 0)$$

$$x \leq R''(x) < 3x$$

Aufg.
Schätze den Näherungsfehler $R(x)$ für das Taylorpolynom 4. Grades (5. Grades, n-ten Grades) ab, das die e-Funktion approximiert.

Taylorpolynome und Taylorreihen

Die bestmögliche lineare Approximation einer Funktion an einer Stelle ist die Tangente.
Bessere Näherungen sind durch Parabeln zu erzielen. Die Krümmung der Funktion an einer Stelle wird durch ganzrationale Funktionen höheren Grades - den Taylorpolynomen - besonders gut erfasst.
Soll die ganzrationale Funktion vom Grad n $\quad p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... \ + a_nx^n$
im Funktionswert und den ersten n Ableitungen an der Stelle $x = 0$ mit der Funktion f übereinstimmen,

$$f(0) = p_n(0) = a_0; \quad f'(0) = p_n'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2a_2; \quad f'''(0) = 3!\,a_3; \quad ... \ ; \ f^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

so erhalten wir das n-te Taylorpolynom:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ ... \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Fehler $f(x) - p_n(x)$ abzuschätzen.

Für Funktionen, die beliebig oft (stetig) differenzierbar sind, existiert eine Taylorreihe, z. B.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\,x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\,x^4 + - \ \ldots$$

Taylorreihen können differenziert, integriert, multipliziert und substituiert werden:

$$(e^x)' = e^x, \ (\sin x)' = \cos x$$

Mit der Reihe für e^x erhalten wir

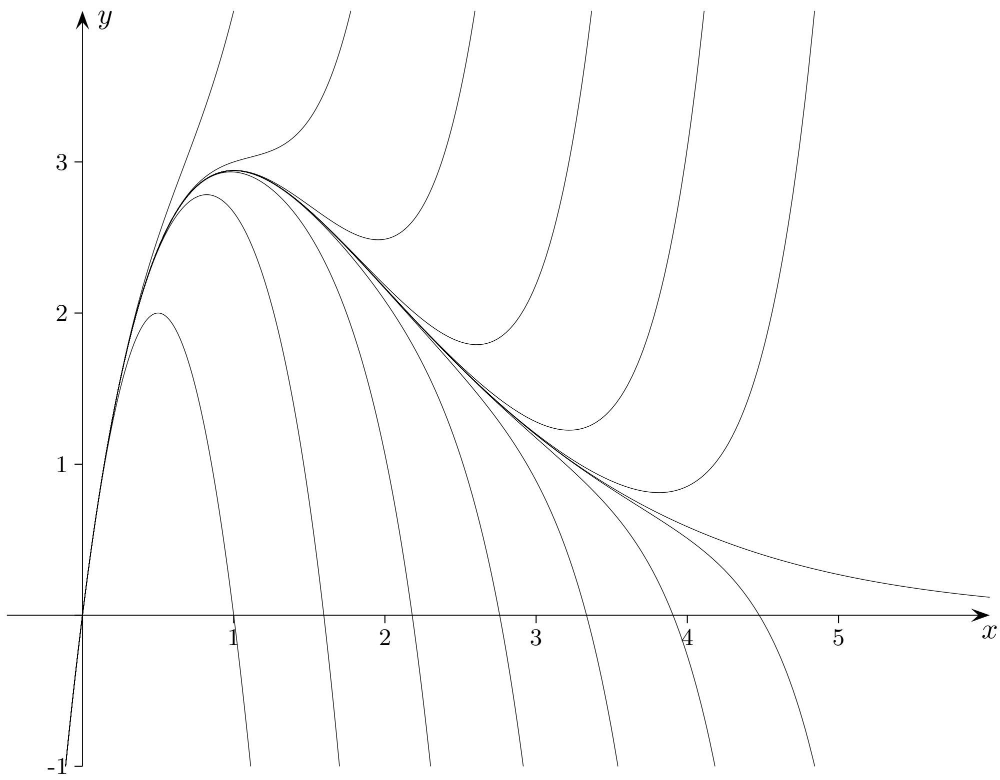
$$x^2 \cdot e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \ ...$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ ...$$

Das vielfältige Verwenden der Taylorreihen in Grenzwert-Berechnungen, Beweisen, DGLn, Verallgemeinerungen im Komplexen oder Abschätzungen in der Physik liegt außerhalb der Schule. SchülerInnen dürfen sich aber an der math. Ästhetik dieser Reihen erfreuen und an der Erkenntnis, dass sich transzendente Funktionen (z. B. e^x, $\sin x$) durch einfache und regelmäßige Funktionen beliebig genau approximieren lassen.
Die obigen Taylorpolynome sind gute Näherungen für f in der Umgebung von $x = 0$. Für eine Näherung an der Stelle $x = a$ wird f verschoben, $g(x) = f(x + a)$, das Taylorpolynom für g (beachte $g(0) = f(a)$, $g'(0) = f'(a)$ usw.) wird sodann um a in umgekehrte Richtung verschoben. Ergebnis:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ ... \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

Taylorentwicklung von $f(x) = 8xe^{-x}$



Ordne den Graphen die Funktionen zu.

$$f_1(x) \;=\; 8x$$

$$f_2(x) \;=\; 8x - 8x^2$$

$$f_3(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3$$

$$f_4(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{4}{3}x^4$$

$$f_5(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5$$

$$f_6(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{15}x^6$$

$$f_7(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{15}x^6 + \frac{1}{90}x^7$$

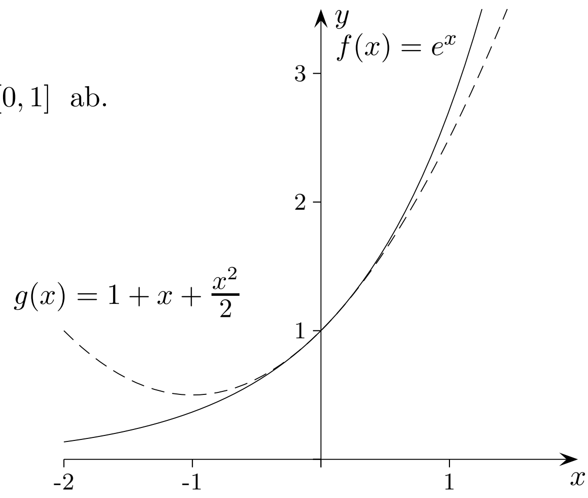
$$f_8(x) \;=\; 8x - 8x^2 + 4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{15}x^6 + \frac{1}{90}x^7 - \frac{1}{630}x^8$$

Fehlerabschätzung für die Approximation mit Taylorpolynomen

1. Wir approximieren die Funktion $f(x) = e^x$ durch

$$g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

und schätzen den Fehler $R(x)$ auf dem Intervall $I = [0,1]$ ab.



Sei also $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + R(x)$$

Wir leiten beide Seiten ab:

$$e^x = 1 + x + R'(x)$$

$$e^x = 1 + R''(x)$$

$$f'''(x) = e^x = R'''(x)$$

2. Aus einer Abschätzung für $R'''(x)$ auf dem Intervall I leiten wir eine Abschätzung für $R(x)$ durch Integration her.

$$\begin{array}{rcccl} & 1 & \leq R'''(x) & < & 3 \\ \Longrightarrow & x & \leq R''(x) & < & 3x \\ \Longrightarrow & \frac{x^2}{2} & \leq R'(x) & < & 3\,\frac{x^2}{2} \\ \Longrightarrow & \frac{x^3}{3!} & \leq R(x) & < & 3\,\frac{x^3}{3!} \end{array}$$

Allgemeiner:

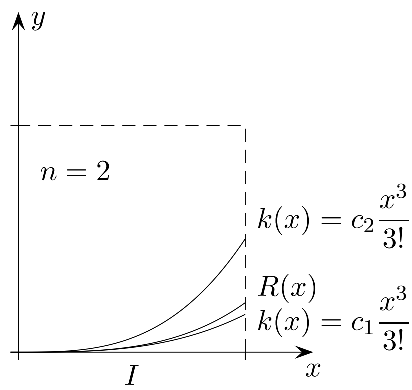
Sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + R(x) \qquad \big(R(0) = R'(0) = R''(0)\big)$

$\Longrightarrow \quad R'''(x) = f'''(x)$

Mit der Abschätzung (auf dem Intervall I)

$c_1 \leq f'''(x) \leq c_2$, d. h.

$c_1 \leq R'''(x) \leq c_2$, folgt $\quad \frac{c_1}{3!}\,x^3 \leq R(x) \leq \frac{c_2}{3!}\,x^3.$



Wird $f(x)$ durch ein Polynom 3. Grades approximiert ...

Optimale Approximation durch Taylorpolynome, Fehlerabschätzung

Ist $f(x)$ in einer Umgebung von a $(n+1)$-mal differenzierbar,
so approximiert das n-te Taylorpolynom

$$p_n(x) \; = \; f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \; ... \; + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

f an der Stelle a besser als jedes andere Polynom n-ten Grades.

Kann auf einer Umgebung von a die $(n+1)$-te Ableitung durch

$$c_1 \leq f^{(n+1)}(x) \leq c_2$$

abgeschätzt werden, so liegt die Abweichung $f(x) - p_n(x)$ zwischen

$$\frac{c_1}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \qquad \text{und} \qquad \frac{c_2}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Für die Approximation mit der Tangentenfunktion

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$$

bedeutet dies: $\;|\,R(x)\,| \leq \frac{1}{2}\,(x-a)^2 \cdot \max\limits_{a \leq z \leq x} |\,f''(z)\,|$

Die Taylor-Entwicklung n-ten Grades einer Funktion f setzt sich zusammen aus dem Taylor-Polynom n-ten Grades und dem Restglied:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x).$$

Für das Restglied $r_n(x)$ gilt:

Ist die Funktion f (wenigstens) $(n+1)$-mal auf $[\,a,\,x\,]$ stetig differenzierbar,

so gibt es ein $b \in [\,a,\,x\,]$ mit

$$f(x) = p_n(x) \; + \; \frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \qquad \text{und}$$

$$f(x) = p_n(x) \; + \; \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Bestätige durch partielle Integration:

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \int_0^x (x-t) \cdot f''(t)\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \cdot e^x\,dt$$