Merkhilfe Integralrechnung

1. Integralfunktion $A_a(x) = ?$

   Hauptsatz $A'_a(x) = ?$

   $$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

2. von der Änderungsrate zum Bestand
   Bestandsfunktion $F(x) = ?$

3. mittlerer Funktionswert $m = ?$

4. Volumen eines Rotationskörpers $V = ?$

5. Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

6. Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

7. durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $m = ?$
   momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a ?

8. Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\qquad A = ?$

mehrere Schnittstellen $\qquad A = ?$

9. uneigentliches Integral $\qquad \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = ?$

10. Volumen eines Hohlkörpers
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\qquad V = ?$

11. Volumen bei Rotation um die y-Achse

12. unbestimmtes Integral $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ?$

Ende der Merkhilfe Integralrechnung

zum Anfang

zur Merkhilfe

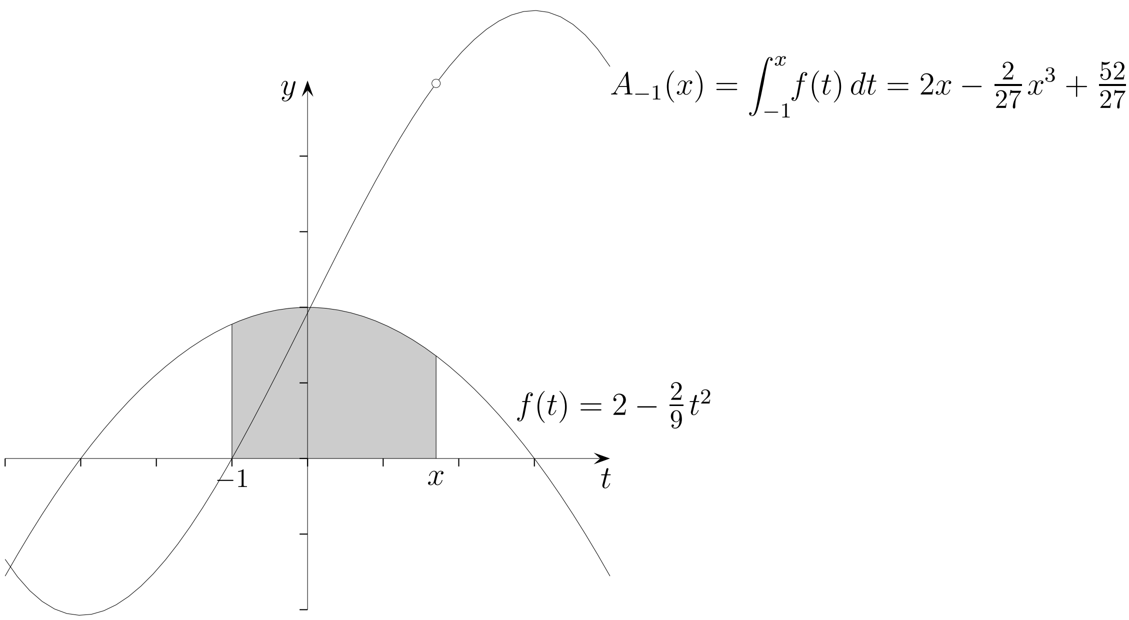
- Grundwissen
- Differenzialrechnung
- Vektorrechnung
- Stochastik

Homepage

Integralfunktion $A_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$

Hauptsatz $A_a'(x) = ?$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$\longleftarrow$

Integralfunktion $A_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$

Hauptsatz $A_a'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

$\longleftarrow$

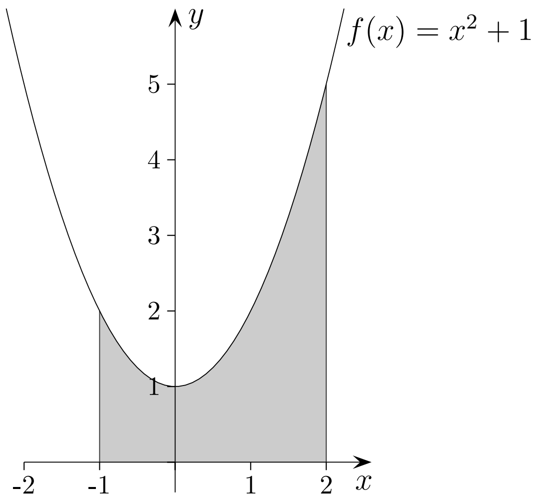
Integralfunktion $A_a(x) = ?$

Hauptsatz $A_a'(x) = ?$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\longleftarrow$

$$A = \int\limits_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 - (-\frac{1}{3} - 1) = \ldots = 6$$



von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion $F(x) = ?$

$\longleftarrow$

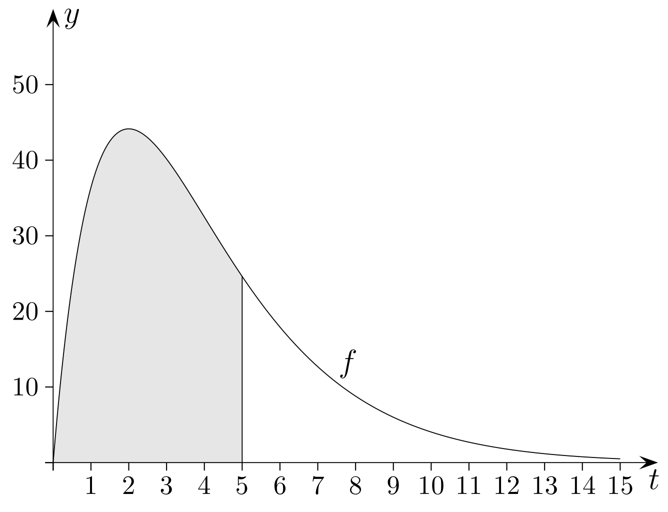
Bei einem Gewitter beschreibt die Funktion $f(t) = 60 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t}$, $0 \leq t \leq 15$, modellhaft die Menge des auftretenden Regens in ml pro m^2 und Minute, Zeit t nach Beginn des Gewitters in Minuten.

a) Ermittle die Regenmenge in ml pro m^2, die

1) in den ersten 5 Minuten nach Beginn des Gewitters,

2) zwischen der 5. und 10. Minute gefallen ist.

b) Nach welcher Zeit von Beginn des Gewitters sind 200 ml pro m^2 gefallen?



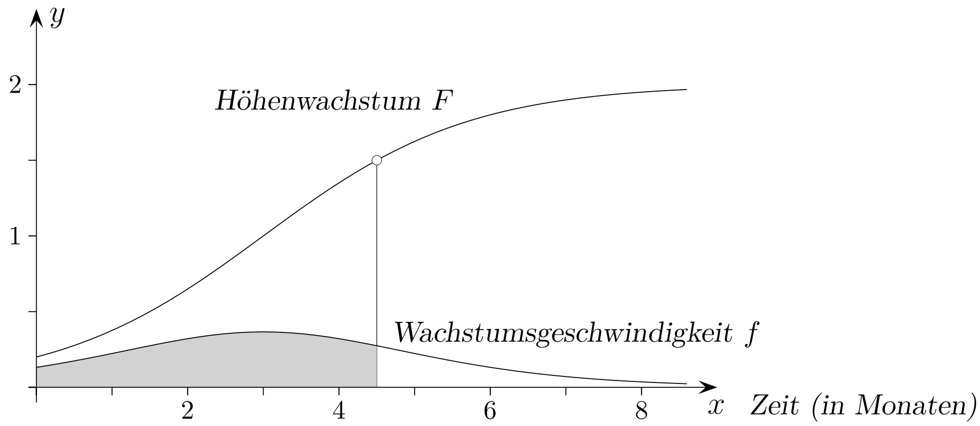
a) 1) $\displaystyle\int_0^5 f(t)\,dt = 171{,}0 \quad [\mathrm{ml/m^2}]$

2) $\displaystyle\int_5^{10} f(t)\,dt = 59{,}2 \quad [\mathrm{ml/m^2}]$

b) $\displaystyle\int_0^{t_0} f(t)\,dt = 200 \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 6{,}5$ [Minuten]

von der Änderungsrate zum Bestand

Bestandsfunktion $$F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)\,du$$

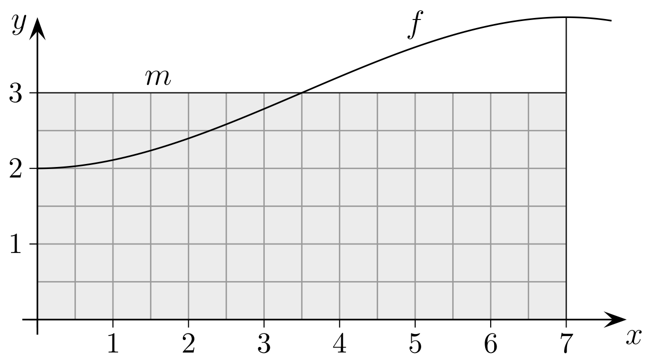


Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.
Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 m.

⟵

$F(0) = 0{,}20$
Anfangsbestand $F(a)$, Anfang a (meistens $a = 0$)

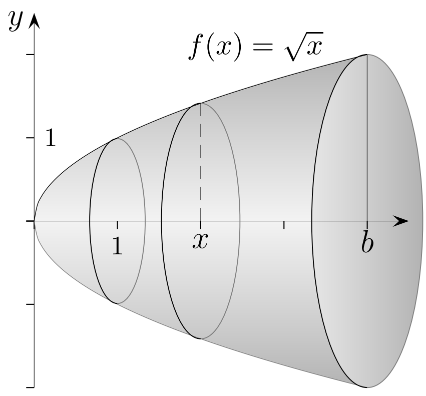
mittlerer Funktionswert $\quad m = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



⟵

Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \int\limits_a^b \left[\,f(x)\right]^2 \, dx$$



⟵

$$V = \pi \int\limits_0^b \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \pi \, \frac{b^2}{2}$$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	$k \cdot F(x)$
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}\, x^{r+1}$
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax + b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	
e^x	
$\dfrac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	$\sin x$
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax + b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	e^x
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax + b)$	

$\longleftarrow$

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	$\ln x$
$f(ax+b)$	

$\longleftarrow$

Beachte:
Über Unendlichkeitsstellen (Polstellen) darf man nicht einfach „hinweg integrieren".

Stammfunktion von

$k \cdot f(x)$	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} F(ax+b)$

$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

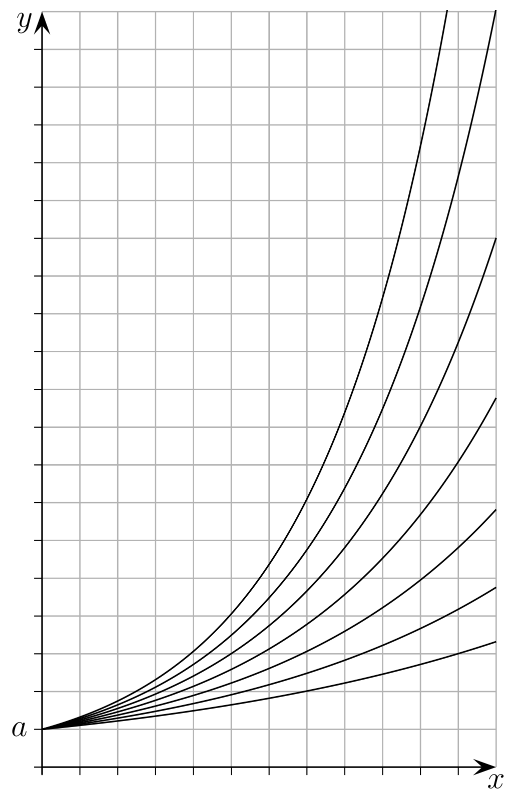
Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

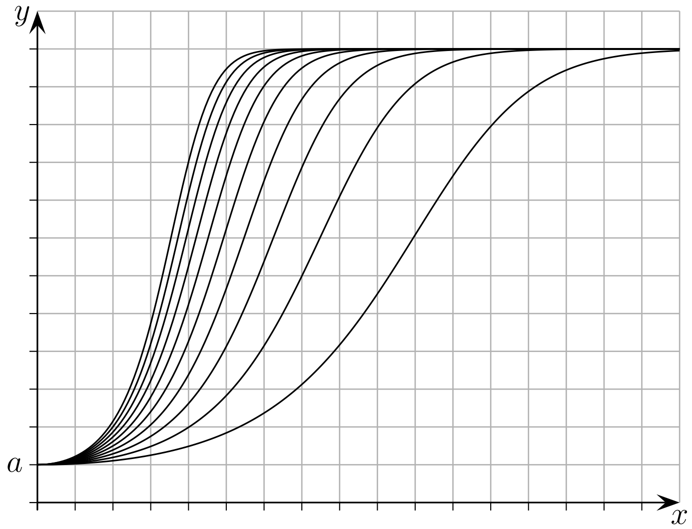
$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ae^{kx}$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$



⟵

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = \dfrac{aS}{a + (S-a)e^{-kSx}}$



$\longleftarrow$

alternativ

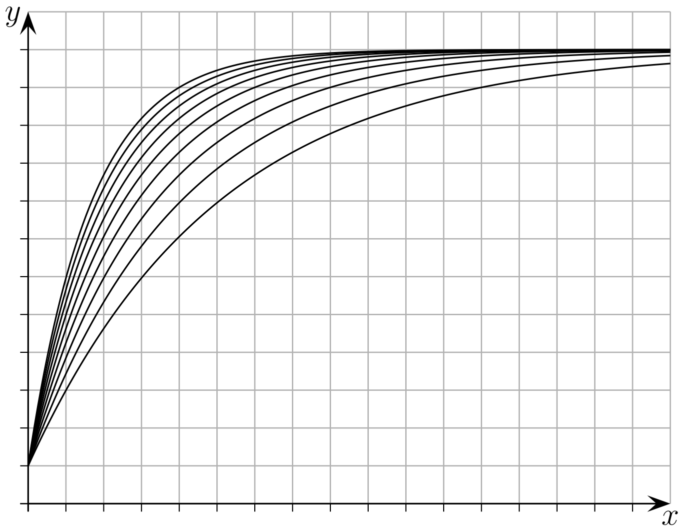
$$f(t) = \frac{S}{1 + ae^{-kt}}, \qquad f(0) = \frac{S}{1+a}$$

$$f'(t) = \frac{k}{S} \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = k(S - f(x))$	$f(x) = S - ae^{-kx}$
logistisch	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$



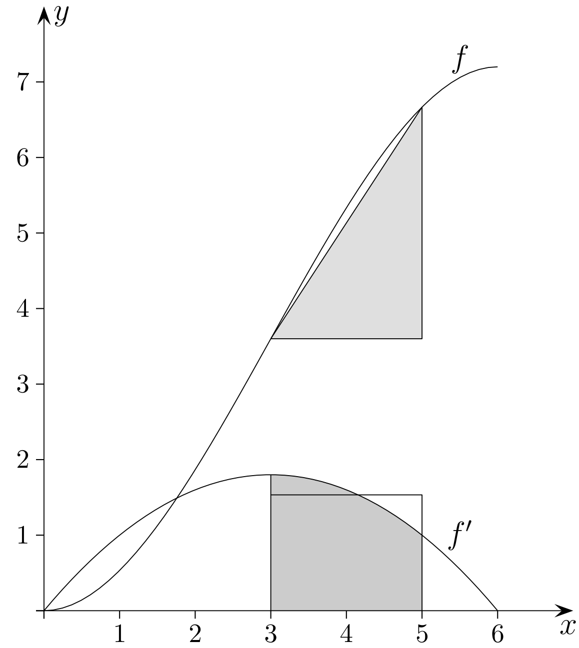
$\longleftarrow$

Wachstumsfunktionen, $k > 0$	Differenzialgleichung	Funktion
linear	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
exponentiell	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
beschränkt	$f'(x) = ?$	$f(x) = ?$
logistisch	$f'(x) = k(S - f(x))f(x)$	$f(x) = ?$

$\longleftarrow$

durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$ $\qquad m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a $\qquad$?



⟵

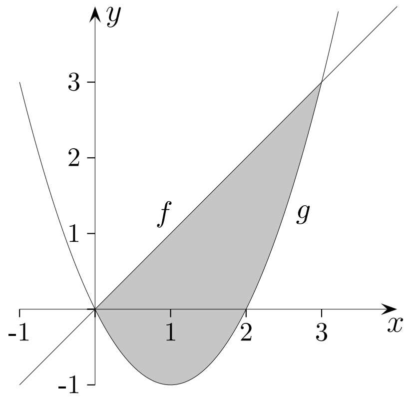
durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a, b]$	$m = ?$
momentane (lokale) Änderungsrate von f an der Stelle a	$f'(a)$

$\longleftarrow$

Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,

obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\qquad A(x) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

mehrere Schnittstellen $\qquad A(x) =$



⟵

Inhalt der Fläche zwischen zwei Graphen,

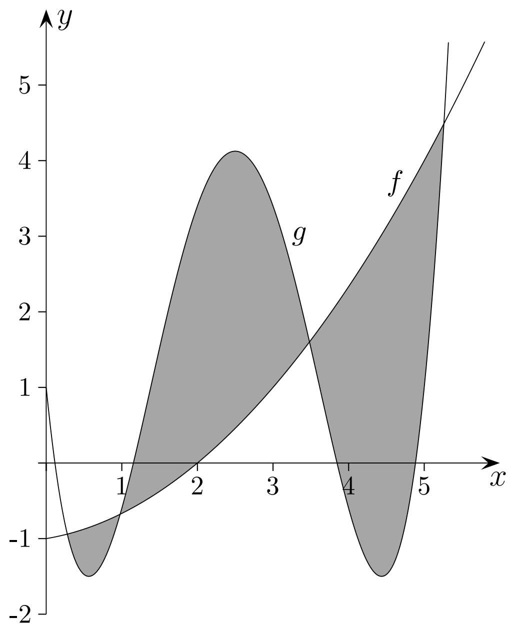
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b $\qquad A = ?$

mehrere Schnittstellen

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

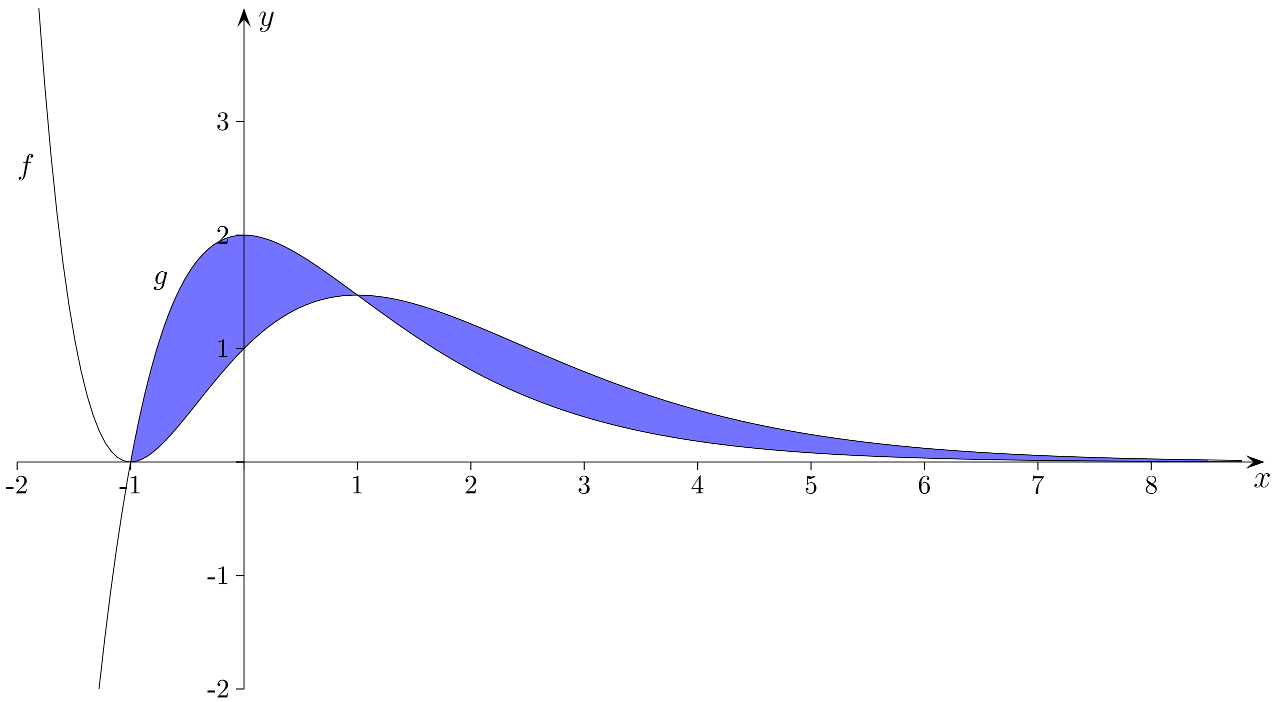
GTR, abs( )

oder abschnittsweise Berechnung



⟵

uneigentliches Integral $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$$



Gegeben sind die Funktionen:

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$$
$$g(x) = 2(x+1) \cdot e^{-x}$$

Deuten Sie $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-1}^{t}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,dx = 0$ geometrisch.

Zeigen Sie, dass $f'(x) = g(x) - f(x)$ gilt und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die im Bereich $-1 \le x \le 1$ von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

[zur Kontrolle: $A = \dfrac{4}{e}$]

⟵

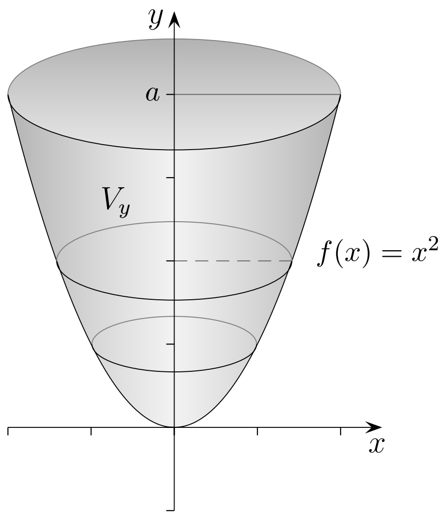
Volumen eines Hohlkörpers

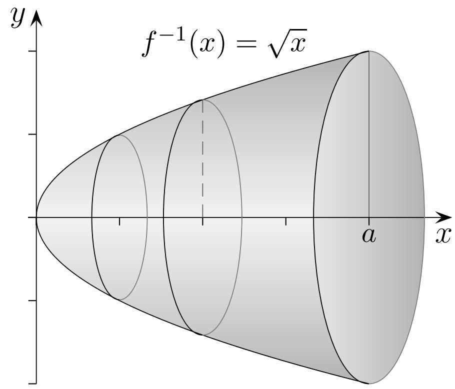
obere Funktion f, untere g, Grenzen a, b

$$V = \pi \int_a^b \big[f(x)\big]^2 \, dx - \pi \int_a^b \big[g(x)\big]^2 \, dx$$

$$\neq \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx$$

⟵





$$V_y = \pi \int_0^a \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy = \pi \int_0^a \left[f^{-1}(x) \right]^2 dx$$

$$V_y = \pi \int_0^4 \left[f^{-1}(x) \right]^2 dx = 8\pi$$

Das Volumen bei Rotation um die y-Achse ist gleich dem Volumen bei Rotation der Umkehrfunktion um die x-Achse. Die Grenzen sind anzupassen.

⟵

unbesimmtes Integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(f(x)) + C$

$\longleftarrow$

$$g(x) = \ln(f(x))$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{Kettenregel, beachte } \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$$

allgemein

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$