Logistische Funktion

Verhulst (1804-1849), belgischer Mathematiker

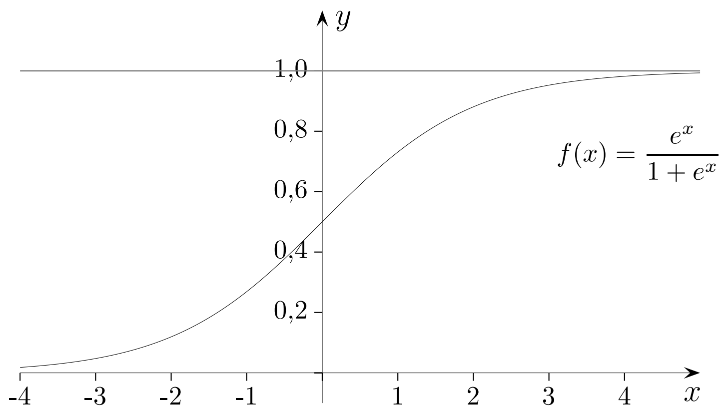
Wachstumsvorgänge sind letztendlich immer begrenzt. Beim begrenzten Wachstum wird die Sättigungsgrenze von Anfang an berücksichtigt. Bei vielen Wachstumsprozessen ist die Grenze aufgrund ihrer Größe für die anfängliche Entwicklung ohne Belang. Im Folgenden versuchen wir ein anfänglich exponentielles, schließlich jedoch begrenztes Wachstums zu modellieren.

Wegen des exponentiellen Wachstums zu Beginn sei der Ausgangspunkt die Funktion $f(x) = e^x$. Da eine Begrenzung vorliegen soll, muss das Ansteigen von e^x ausgeglichen werden. Dies kann durch eine Division durch $1 + e^x$ erfolgen. Die Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{e^x}{1+e^x} \qquad \left(= \frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

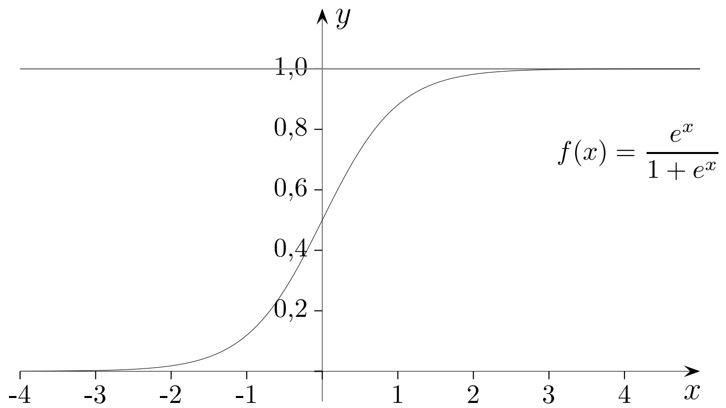
besitzt die Grenze $G = 1$, einen Wendepunkt an der Stelle $x = 0$ (wird noch bewiesen) mit der Steigung $f'(0) = \frac{1}{4}$. Die Grenze kann durch eine Multiplikation mit G verändert werden.

$$f(x) \;=\; \frac{G \cdot e^x}{1+e^x}$$



Die Steilheit des Anstiegs im Wendepunkt kann durch den Parameter k variiert werden.

$$f(x) \;=\; \frac{G \cdot e^{kx}}{1+e^{kx}}, \qquad f'(0) \;=\; \frac{G \cdot k}{4}$$



franz. logis Unterkunft, Wohnraum

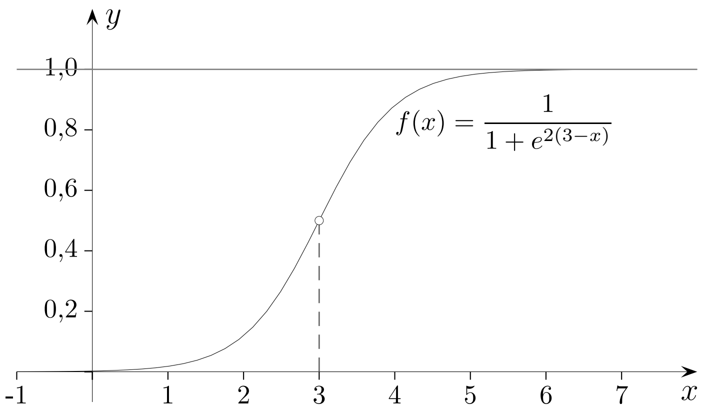
Logistische Funktion, Fortsetzung

Schließlich kann der Graph geeignet verschoben werden, a ist die Stelle des Wendepunkts.

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{k(x-a)}}{1 + e^{k(x-a)}}, \qquad (= \frac{G}{1 + e^{k(a-x)}})$$

$$f(0) = \frac{G}{1 + e^{ka}}$$

$$f'(a) = \frac{G \cdot k}{4}$$



Wir untersuchen die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1 + e^x) - (e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{(e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot (1 - \frac{e^x}{1 + e^x})$$

$$= f(x) \cdot (1 - f(x))$$

Für die obige Funktion gilt die Beziehung:

$$f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x)) \qquad \text{mit} \quad k^* = \frac{k}{G}$$

1. Erläutere diese Beziehung.
2. Begründe, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt hat.
3. Vier Schüler einer Schule mit 400 Schülern setzen ein Gerücht in die Welt. Das Gerücht breitet sich anfänglich annähernd exponentiell mit einem prozentualen Zuwachs von 20% pro Minute aus. Nach welcher Zeit kennen 380 Schüler das Gerücht?

Logistische Funktion

3. Vier Schüler einer Schule mit 400 Schülern setzen ein Gerücht in die Welt. Das Gerücht breitet sich anfänglich annähernd exponentiell mit einem prozentualen Zuwachs von 20% pro Minute aus. Nach welcher Zeit kennen 380 Schüler das Gerücht?

Lösung

Mit dem Funktionsansatz $f(x) = \dfrac{G}{1 + e^{k(a-x)}}$

können die beiden Gleichungen

$$\frac{400}{1 + e^{ka}} = 4$$

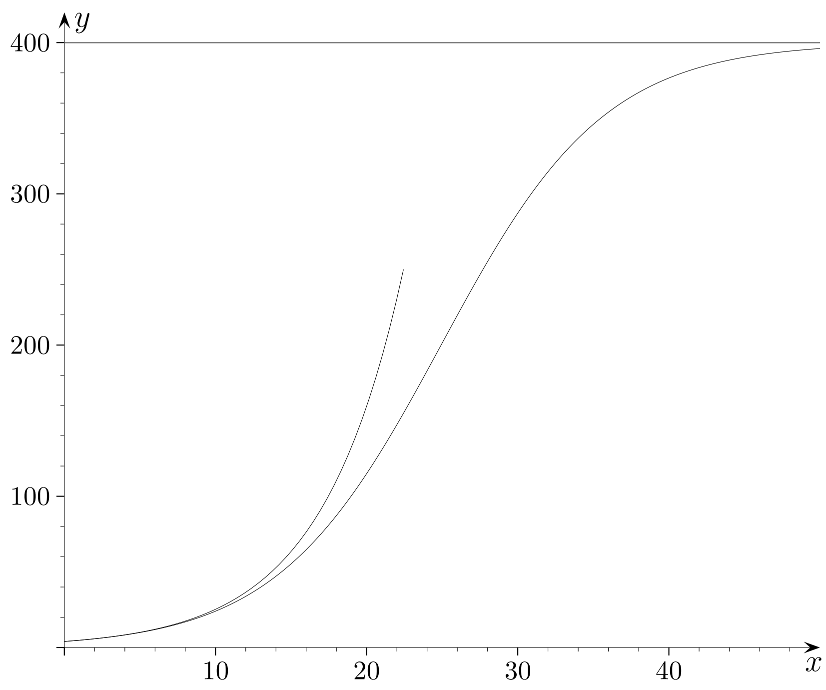
$$\frac{400}{1 + e^{k(a-1)}} = 4{,}8 \qquad \text{aufgestellt werden.}$$

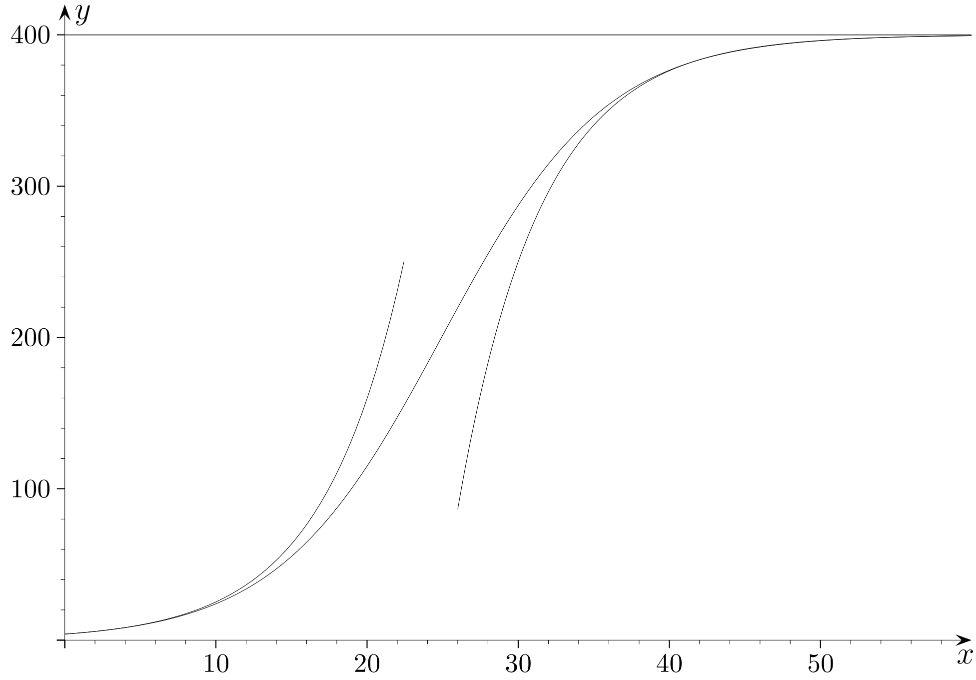
Aus ihnen ergeben sich $k = 0{,}1843$ und $a = 24{,}927$.
Mit $f(x) = 380$ ermitteln wir $x = 41$ (Minuten).

alternativer Lösungsweg

$$\begin{aligned} f'(x) &= k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x)) \qquad \text{mit} \quad k^* = \frac{k}{G} \\ &\dots \\ f'(x) &= k \cdot f(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right) \end{aligned}$$

k ist also die Wachstumskonstante des (anfänglichen) exponentiellen Wachstums, hier $k = \ln(1{,}2)$.
a ergibt sich aus $f(0) = 4$.




y
400
300
200
100
10
20
30
40
50
x

Logistische Funktionen   Übung

Logistische Funktionen können auf vielfältige Weise angegeben werden.
Einige Funktionsterme lassen sich durch Umformung ineinander überführen, welche?

Geübt werden kann das Ermitteln:

a) der Sättigungsgrenze,
b) des Anfangswerts,
c) der 1. Ableitung,
d) der Stelle des stärksten Anstiegs,
e) einer Stammfunktion,
f) des Einflusses eines Parameters auf den Verlauf des Graphen.

1. $f(x) = \dfrac{a}{1 + \frac{a-b}{b}\, e^{-kax}}$ $\qquad f'(x) = k \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$

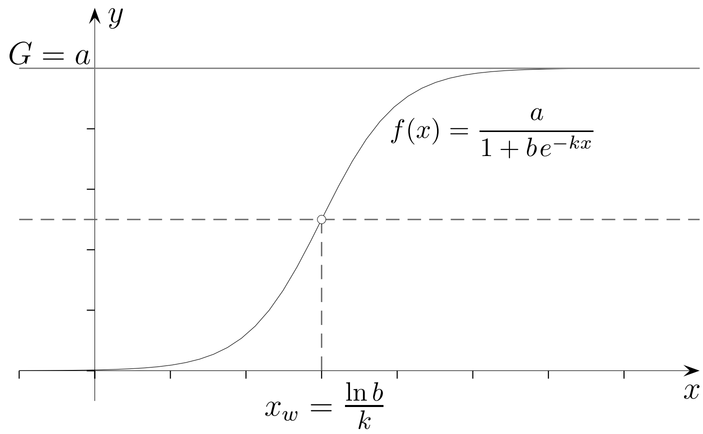
2. $f(x) = \dfrac{a}{b + e^{-kx}}$ $\qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \dfrac{kb}{a} \cdot f^2(x)$

3. $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{-k(x-b)}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{k}{a} \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$

4. $f(x) = \dfrac{a \cdot e^{kx}}{b + e^{kx}}$ $\qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \dfrac{k}{a} \cdot f^2(x)$

5. $f(x) = \dfrac{a}{1 + be^{-kx}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{k}{a} \cdot (a - f(x)) \cdot f(x)$

6. $f(x) = a - \dfrac{ab}{b + e^{kx}}$ $\qquad f'(x) = k \cdot f(x) - \dfrac{k}{a} \cdot f^2(x)$



$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{-kx}}$$

$$f'(x) = \frac{abke^{-kx}}{\left(1 + be^{-kx}\right)^2}$$

1. Wendepunkt

   $$f(x_w) = \frac{G}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_w = \frac{\ln b}{k}$$

2. Symmetrie

   Der Graph ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.
   Die Bedingung lautet:

   $$f(x_w + x) - \frac{G}{2} = \frac{G}{2} - f(x_w - x)$$

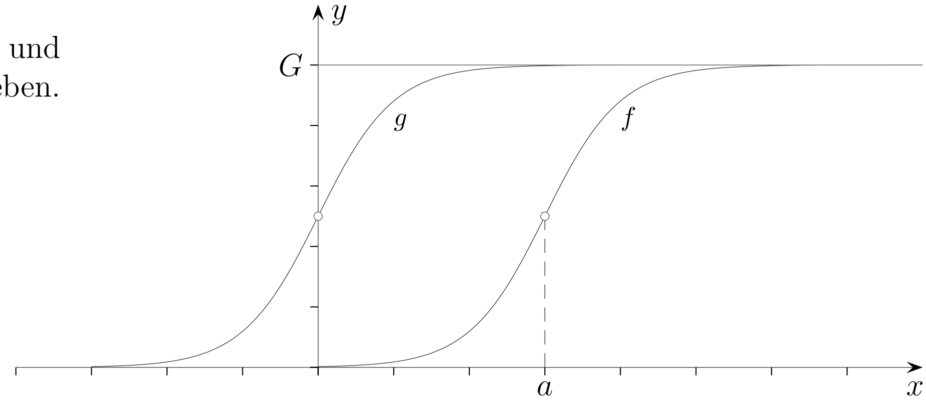
   $$\Longleftrightarrow \quad f(x_w + x) + f(x_w - x) = G$$

Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum wird am sinnträchtigsten durch die Funktion

$$f(x) = \frac{G}{1 + e^{-k(x-a)}}$$

mit der Wendestelle a und der Grenze G beschrieben.



f kann aus $g(x) = \dfrac{G}{1 + e^{-kx}}$ durch Verschiebung gewonnen werden.

Es ist zu vermuten, dass k die Wachstumskonstante der exponentiellen Approximation ist. Hierzu ist aus f die Näherung $h(x) = f(0) \cdot e^{kx}$ für das anfängliche Wachstum zu ermitteln.

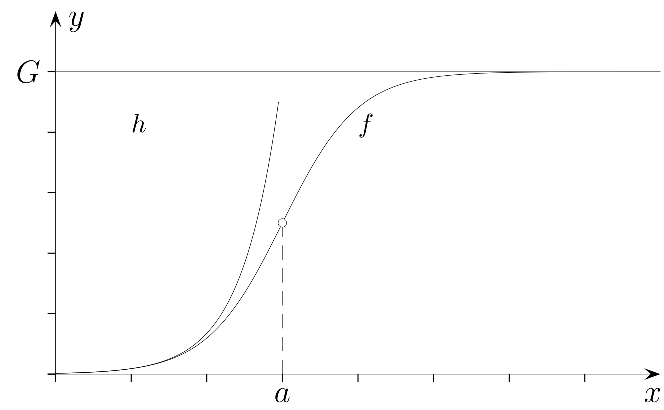
Wir formen um.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{G}{1 + e^{-k(x-a)}} \\ &= \frac{G}{1 + be^{-kx}} && e^{-k(x-a)} = e^{-kx+ka} = e^{-kx} \cdot e^{ka}, \quad e^{ka} = b \\ &= \frac{Ge^{kx}}{e^{kx} + b} && \text{mit } e^{-ka} \text{ erweitert} \\ &= e^{kx} \cdot \frac{G}{e^{kx} + b} \;\leq\; e^{kx} \cdot \frac{G}{1 + b} \;=\; e^{kx} \cdot f(0) \end{aligned}$$

Die zugehörige DGL beschreibt das Änderungsverhalten:

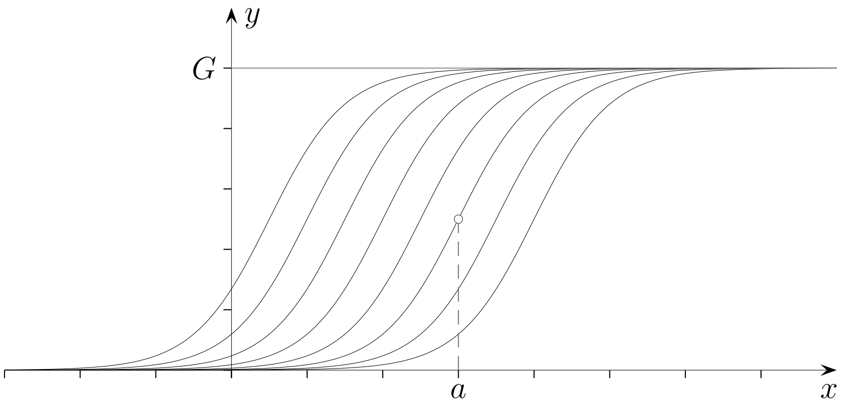
$$f'(x) = k^* \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$$

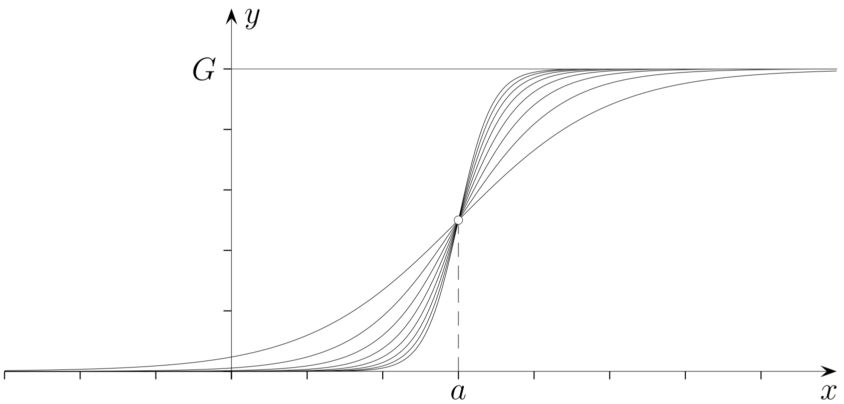
mit $k^* = \frac{k}{G}$

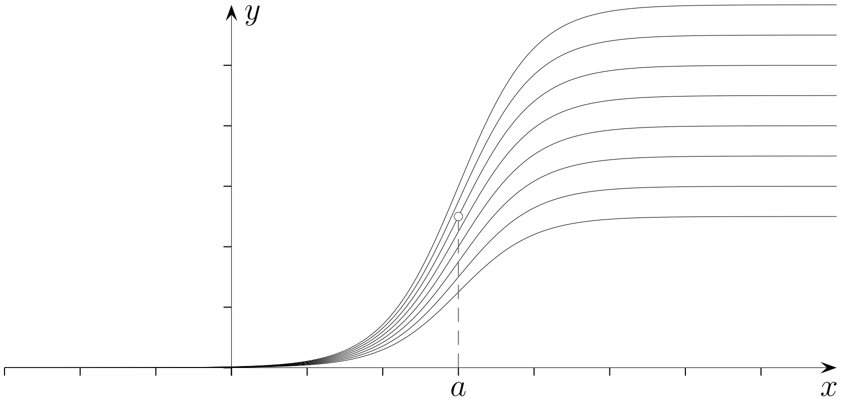


Variation der Parameter

$$f(x) = \frac{G}{1 + e^{-k(x-a)}}$$

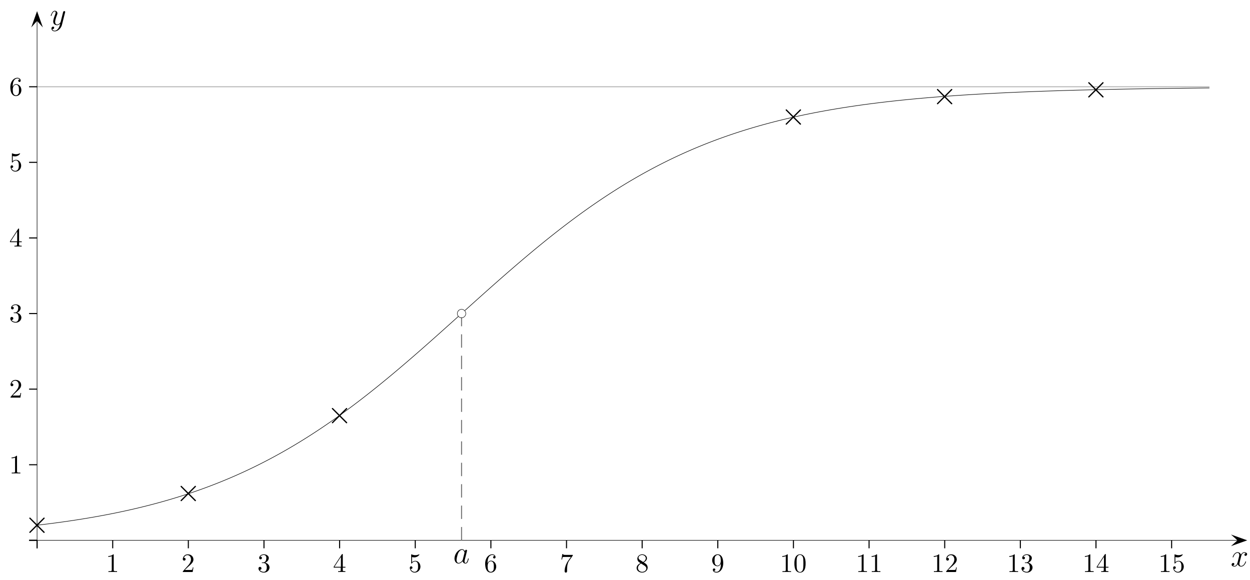






Logistisches Wachstum

Zeit (in Wochen)	0	2	4	10	12	14
Höhe (in m)	0,2	0,62	1,65	5,60	5,87	5,96



Um die Parameter der (naheliegenden) logistischen Funktion $f(x) = \dfrac{G}{1 + b e^{-kx}}$ zu ermitteln, wird zunächst $G = 6$ geschätzt.

$b = 29$ wird mit dem Anfangsbestand $f(0) = \dfrac{G}{1+b}$ ermittelt,
$k = 0{,}6$ durch Einsetzten eines Wertepaares,
z.B. $f(10) = 5{,}6$.

Wir erhalten:

$$f(x) = \frac{6}{1 + 29 e^{-0{,}6x}}$$

Um die Koordinaten des Wendepunkts zu errechnen, formen wir den Funktionsterm um:

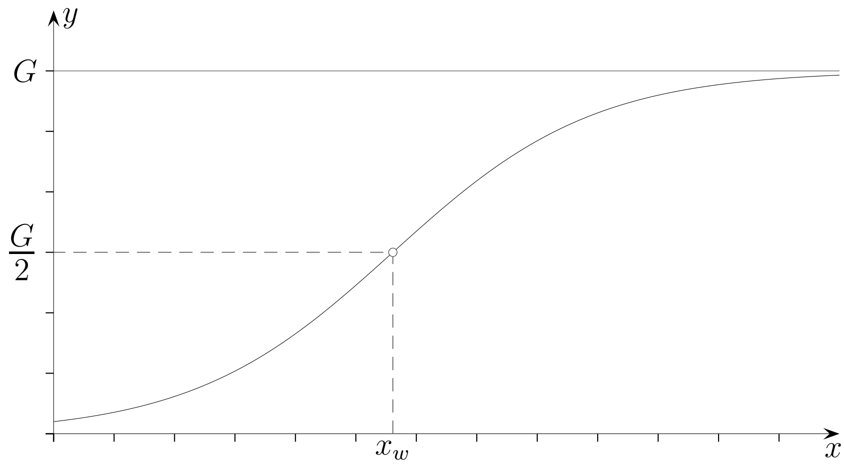
$$f(x) = \frac{G}{1 + e^{-k(x-a)}}$$

$29 = e^{\ln(29)}$

$29 \cdot e^{-0{,}6x} = e^{\ln(29)} \cdot e^{-0{,}6x} = e^{-k(x - \frac{\ln(29)}{k})}, \qquad a = \frac{\ln(29)}{k}$

$W(5{,}61 \mid 3)$

Logistische Funktion



Die Zunahme der Individuenanzahl $f(x)$ ist proportional zu $f(x)$ und zur Differenz von oberer Grenze G und $f(x)$.

$$f'(x) = r \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$$

$$f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{G - f(0)}{f(0)} \qquad \text{und} \qquad k = r \cdot G$$

Folgern Sie aus der DGL, dass $f(x_w) = \frac{G}{2}$ gilt.

Logistische Funktion

$$f(x) = \frac{G}{1 + e^{-k(x-a)}}$$

Ermittle die Parameter. Gegeben:

a) $$\begin{aligned} G &= 20 \\ f(0) &= 0{,}09 \\ f(8) &= 5{,}07 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} G &= 30 \\ f(0) &= 1{,}175 \\ f(6) &= 2{,}886 \end{aligned}$$

Logistische Funktion

$$f(x) = \frac{G}{1+e^{-k(x-a)}}$$

Ermittle die Parameter. Gegeben:

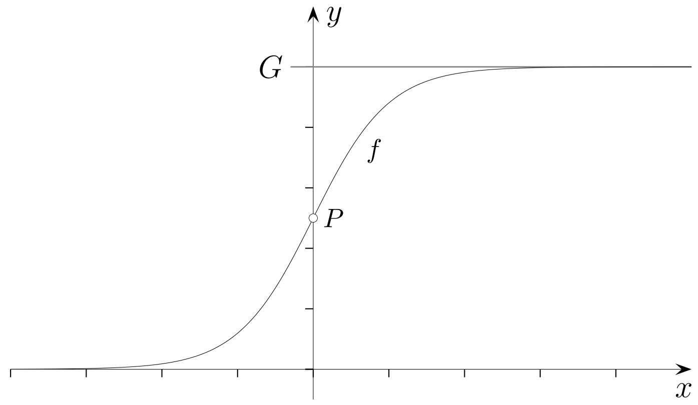
a) $$\begin{aligned} G &= 20 \\ f(0) &= 0{,}09 \\ f(8) &= 5{,}07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 10 \\ k &= 0{,}54 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} G &= 30 \\ f(0) &= 1{,}175 \\ f(6) &= 2{,}886 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 20 \\ k &= 0{,}16 \end{aligned}$$

Der kurze Weg



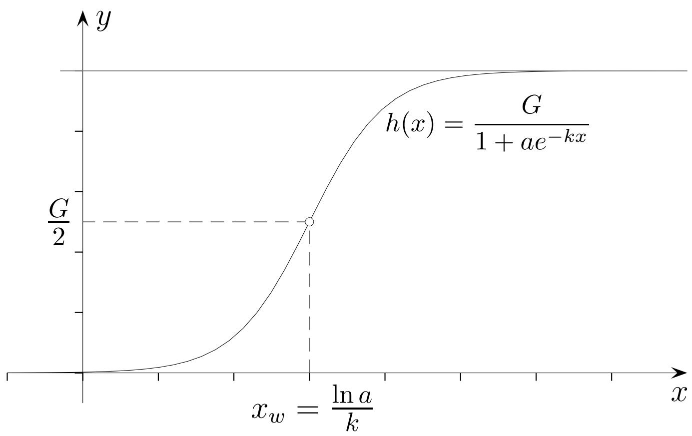
Vermutung:
Die logistische Funktion $f(x) = \dfrac{G}{1+e^{-kx}}$ ist punktsymmetrisch zum Punkt $P\big(0 \mid \frac{G}{2}\big)$.

Um das Kriterium $g(x) = -g(-x)$ anwenden zu können, muss der Graph so verschoben werden, dass P in den Ursprung gelangt.

$$g(x) = \frac{G}{1+e^{-kx}} - \frac{G}{2} = \ldots = \frac{G\,(1-e^{-kx})}{2\,(1+e^{-kx})}$$

$$g(-x) = \frac{G\,(1-e^{kx})}{2\,(1+e^{kx})} = \frac{G\,(e^{-kx}-1)}{2\,(e^{-kx}+1)}$$ Zähler und Nenner werden durch e^{kx} dividiert.

Wir erkennen: g ist punktsymmetrisch zum Ursprung und damit f zu P (genauer die Graphen).



Der Graph von h geht vermutlich aus dem Graphen von f durch Verschiebung hervor.
Der Ansatz $h(x) = \frac{G}{2}$ führt zu $x_w = \frac{\ln a}{k}$.

Nachweis der Verschiebung:

$$g(x-x_w) = \frac{G}{1+e^{-k(x-x_w)}} = \frac{G}{1+e^{-kx+kx_w}} = \frac{G}{1+e^{-kx+\ln a}} = \frac{G}{1+e^{\ln a}e^{-kx}} = h(x)$$