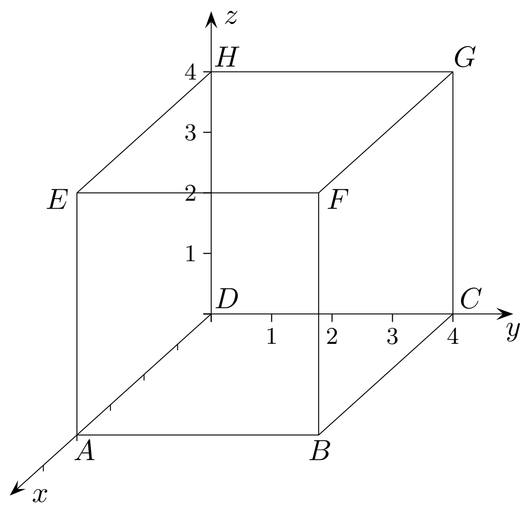
Begleitender Text ist erforderlich.



1. Gegeben ist ein Würfel, siehe Abbildung.

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene W durch die Punkte A, C und H in Koordinatenform.

   Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P(-2 \mid a \mid a)$ so, dass er in der Ebene W liegt.

   Das Dreieck ACH bildet mit den Koordinatenachsen eine Pyramide.
   Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ACDH$.

   b) Die Gerade g durch die Punkte D und F schneidet die Ebene W in einem Punkt Q.
   Berechnen Sie, in welchem Verhältnis Q die Strecke $\overline{DF}$ teilt.

   c) Eine Strecke der Länge d beginnt im Punkt B und hat ihren Endpunkt auf der Geraden g.
   Begründen Sie zunächst ohne größere Rechnung, dass es für $d = 4$ zwei mögliche Endpunkte gibt.
   Ermitteln Sie nun <u>ohne GTR</u> deren Koordinaten.

   Untersuchen Sie, für welche Längen d es genau einen Endpunkt auf der Strecke $\overline{DF}$ gibt.
   Diese Fragestellung ist anspruchsvoller, als es den Anschein hat.

2. a) Eine Firma stellt Kugelschreiber her.
   Der Defekt eines Kugelschreibers kann zwei Gründe haben: defekte Mechanik (l. Mangel) bzw. defekte Mine (2. Mangel). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber defekt ist, beträgt 0,088. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des l. Mangels ist 0,05 und die für das Auftreten beider Mängel gleichzeitig ist 0,002. Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten.

   b) Bei der Endkontrolle wird ein Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 als Ausschuss ausgesondert. Bei dieser Kontrolle wird erfahrungsgemäß ein einwandfreier Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 als Ausschuss deklariert. 8,8 % aller produzierten Kugelschreiber seien defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Kugelschreiber aussortiert wird.

3. Großbäcker Müller stellt Weizenbrötchen her. Eine Maschine knetet den Brötchenteig und schneidet ihn in Portionen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Masse der Teigstücke in Gramm (g) und wird als normalverteilt angenommen.

   a) Der Erwartungswert der Masse der Teigstücke beträgt 52 g.
   Die Standardabweichung hat den Wert 1,5 g.

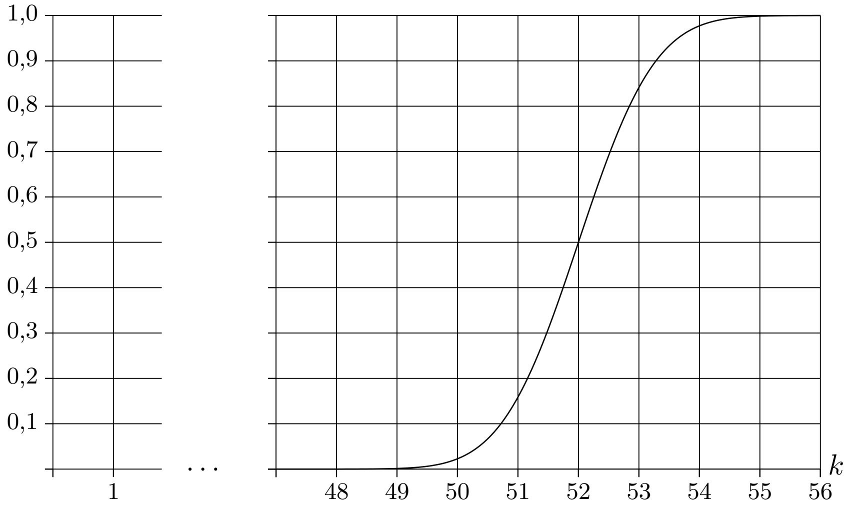
   Für die Herstellung gibt es folgende Bedingungen:

   - Mindestens 90 % der Teigstücke haben eine Masse von mindestens 50 g.
   - Maximal 2,5 % der Teigstücke haben eine Masse, die kleiner als 49 g ist.

   Überprüfen Sie, ob die von der Maschine produzierten Teigstücke diese Bedingungen erfüllen.

   b) Herrn Müller ist die Standardabweichung der Masse der Teigstücke zu groß. Er kauft deshalb eine neue Maschine, bei der die Standardabweichung nur noch 0,75 g beträgt und sich der Erwartungswert einstellen lässt.
   Bestimmen Sie den kleinsten Erwartungswert auf 0,1 g genau, sodass die erste Bedingung aus a) erfüllt wird.

   c) Die normalverteilte Zufallsgröße X beschreibt für eine weitere Maschine die Masse der Teigstücke in g. In der Abbildung ist der Graph der Funktion $\Phi_{\mu,\sigma}(k) = P(X \leq k)$ dargestellt.
   Bestimmen Sie mithilfe des Graphen ohne GTR einen Näherungswert für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.



4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-x+k}$, $k > 0$.

   a) Bestimmen Sie ohne GTR den Wert für k so, dass ein Graph von f_k durch den Punkt $P(2 \mid 2)$ verläuft.

   b) Untersuchen Sie ohne GTR, ob jede Funktion der Schar einen Hochpunkt hat.
   Argumentation bitte <u>ohne</u> die 2. Ableitung.

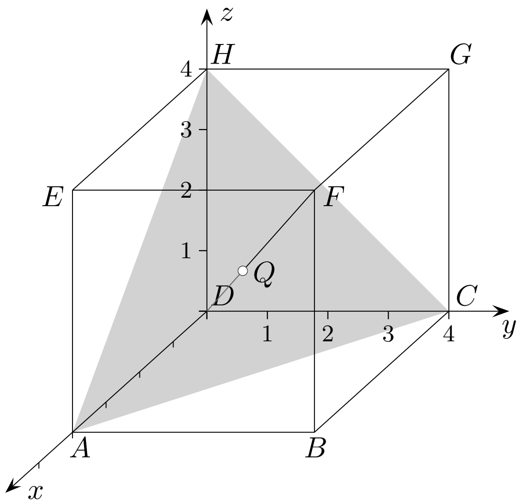
5. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0 \mid 0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. In $W(1 \mid -1)$ liegt ein weiterer Wendepunkt vor.
Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

6. Der Zulieferer einer Autofirma garantiert, dass mindestens 95 % seiner gelieferten Zündkerzen einwandfrei sind. Die Autofirma entnimmt einer ankommenden Lieferung stets 500 Zündkerzen und prüft sie. Sind darunter mehr als 30 defekte, wird die Sendung reklamiert (Entscheidungsregel).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) wird zu Unrecht reklamiert?

   b) Wie müsste die Entscheidungsregel sinnvoll geändert werden, damit höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % zu Unrecht reklamiert wird?

   c) Berechnen Sie, wie viele Zündkerzen die Autofirma einer ankommenden Lieferung mindestens entnehmen muss, damit unter diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens zwei defekte Zündkerzen sind.
   Stellen Sie zunächst eine Gleichung für die gesuchte Anzahl auf.



1. Gegeben ist ein Würfel.

   a) Koordinatenform $x + y + z = 4$
   $P(-2\,|\,3\,|\,3)$
   Pyramidenvolumen $V = \frac{32}{3}\,VE$

   b) Teilverhältnis $F(4\,|\,4\,|\,4)$, $Q\left(\frac{4}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,\frac{4}{3}\right)$, 1:2

   c) Zwei mögliche Endpunkte für $d = 4$, beachte: $|\overrightarrow{BF}| = 4$ und $\overrightarrow{BD}| = \sqrt{32}$
   F hat von B den Abstand 4.
   $2(\lambda - 4)^2 + \lambda^2 = 16$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \frac{4}{3}$, $F(4\,|\,4\,|\,4)$, $Q\left(\frac{4}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,\frac{4}{3}\right)$
   B hat von der Strecke $\overline{DF}$ den Abstand $d = \frac{4}{3}\sqrt{6}$. Für d gibt es genau einen Endpunkt. Außerdem gibt es für $4 < d \leq \sqrt{32}$ auch nur genau einen Endpunkt. In diesem Fall liegt ein Endpunkt auf $\overline{DF}$ und der zweite Endpunkt liegt auf g, aber nicht auf $\overline{DF}$.

2. Eine Firma stellt Kugelschreiber her, siehe Abituraufgaben, Stochastik 2.
   $P(M_2\,|\,M_1) = P(M_2\,|\,\overline{M_1}) = 0{,}04$, alternativ: $P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2)$, $0{,}002 = 0{,}05 \cdot 0{,}04$
   $P(M_1) = 0{,}05$, $P(M_1 \cap M_2) = 0{,}002$, $P(M_2) = P(M_1 \cup M_2) - P(M_1) + P(M_1 \cap M_2)$
   Mängel sind unabhängig voneinander.
   Wahrscheinlichkeit, dass ein defekter Kugelschreiber aussortiert wird
   $0{,}088 \cdot P(A\,|\,D) + 0{,}912 \cdot 0{,}04 = 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad P(A\,|\,D) = 72{,}2\,\%$

3. a) $P(X \geq 50) = 0{,}909 > 90\,\%$
   $P(X < 49) = 0{,}023 > 2{,}5\,\%$ Beide Bedingungen sind also erfüllt.

   b) $P(X \leq 50) = \Phi\left(\frac{50 - \mu}{0{,}75}\right) \leq 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 51{,}0$

   c) $\Phi_{\mu,\sigma}(52) = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \mu \approx 52$
   $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$
   $\Phi_{\mu,\sigma}(53) - \Phi_{\mu,\sigma}(51) = 0{,}84 - 0{,}16 = 0{,}68 \quad \Longrightarrow \quad \sigma \approx 1$

4. $f_k(x) = x \cdot e^{-x+k},\ \ k > 0.$
   a) $1 = e^{-2+k},\ \ k = 2$
   b) $f_k'(x) = (1-x)e^{-x+k},\ f_k'(1) = 0,\ \ +/-$ VZW, Gerade $y = 1 - x$ fällt

5. $f(1) = -1,\ a + b = -1,\ \ f''(0) = 0,\ 2a + b = 0,\ \ \ a = 1,\ \ b = -2$

6. a) $P_{0{,}95}^{500}(X \leq 469) = 13{,}1\,\%$ $= P_{0{,}05}^{500}(Y > 30)$
   b) k maximal $P_{0{,}95}^{500}(X \leq k) = 5\,\%$
      $P_{0{,}95}^{500}(X \leq 466) = 0{,}0454,\ \ P_{0{,}95}^{500}(X \leq 467) = 0{,}0664$
      mehr als 33
   c) $P_{0{,}05}^{n}(X \geq 2) \geq 90\,\% \iff 1 - P_{0{,}05}^{n}(X = 0) - P_{0{,}05}^{n}(X = 1) \geq 90\,\%$
      $\iff 1 - 0{,}95^n - n \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{n-1} \geq 0{,}9$ $n \geq 77$