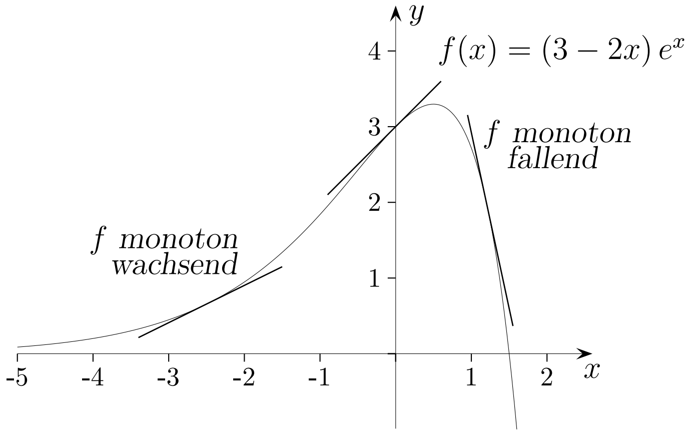
Monotonie



Es ist anschaulich klar, dass eine Funktion, die auf einem Intervall
eine positive Steigung besitzt, auf diesem Intervall auch monoton wächst.

$f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ wächst monoton.

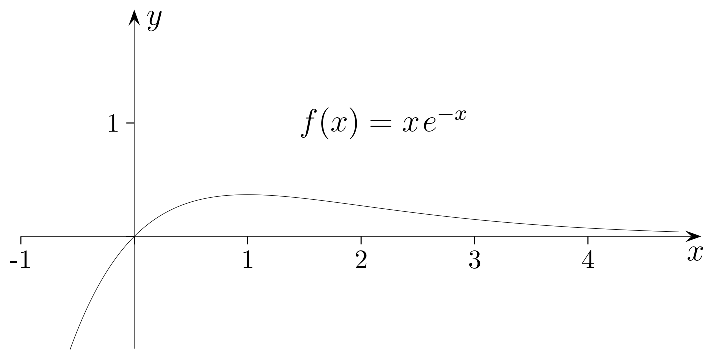
Entsprechend gilt:

$f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ fällt monoton.

1. Untersuche die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$
   auf Monotonie und Extrema.

   (Die Existenz der Extrema folgt direkt aus der Monotonieuntersuchung.)

Monotonie



1. Untersuche die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$
   auf Monotonie und Extrema.

   (Die Existenz der Extrema folgt direkt aus der Monotonieuntersuchung.)

Wegen $f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}\,(1-x)$
folgt, da e^{-x} stets positiv ist:

a) $f'(x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1$

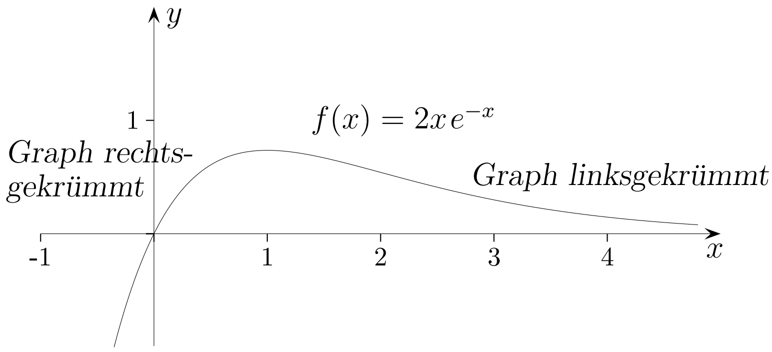
   f ist für $x < 1$ monoton wachsend.

b) $f'(x) < 0 \iff 1 - x < 0 \iff x > 1$

   f ist für $x > 1$ monoton fallend.

Daher liegt ein Maximum an der Stelle $x = 1$ vor.

Krümmung



Differenzierbare Funktionen (genauer deren Graphen) können auf zweierlei Weise gekrümmt sein (bei der Betrachtung von links nach rechts).

Eine Rechtskrümmung (im Uhrzeigersinn) liegt vor, falls die 1. Ableitung f' monoton fällt, falls also f'' kleiner null ist.

$f''(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ fällt monoton $\quad \Longleftrightarrow \quad f$ rechtsgekrümmt

Der Graph verläuft unterhalb der Tangente.

Entsprechend gilt:

$f''(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ wächst monoton $\quad \Longleftrightarrow \quad f$ linksgekrümmt

Der Graph verläuft oberhalb der Tangente.

2. Untersuche die Funktion auf Monotonie, Krümmung, Extrema und Wendepunkte.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{20}(x-4)^3 + 5$

   b) $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}$

   $$f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

3. Untersuche die Funktion $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ auf Monotonie und Extrema.

   $$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$$

Monotonie und Krümmung

2. Untersuche die Funktion auf Monotonie, Krümmung, Extrema und Wendepunkte.

   a) $f(x) = \frac{1}{20}(x-4)^3 + 5$

   Monotonie: $f'(x) = \frac{3}{20}(x-4)^2$

   $f'(x) > 0 \implies f$ ist monoton wachsend.

   Krümmung: $f''(x) = \frac{3}{10}x - \frac{6}{5}$

   $f''(x) < 0 \iff x - 4 < 0 \iff x < 4$

   f ist für $x < 4$ rechtsgekrümmt.

   $f''(x) > 0 \iff x - 4 > 0 \iff x > 4$

   f ist für $x > 4$ linksgekrümmt, $W(4\,|\,5)$

   b) $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$

   $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$

   f monoton wachsend

   f für $x > 0$ rechtsgekrümmt

   f für $x < 0$ linksgekrümmt, $W(0\,|\,1)$

3. Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ auf Monotonie und Extrema.

   $f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$

   f für $x < 0$ monoton wachsend

   f für $x > 0$ monoton fallend,

   $Max(0\,|\,4)$