Ortskurve

Gegeben ist die Funktionenschar:

$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3, \quad k > 0.$

Für sie gilt: $\quad Max(\underbrace{\tfrac{2}{3}k}_{x} \mid \underbrace{\tfrac{4}{9}k^2}_{y})$

Um die Funktion zu ermitteln, auf derem Graph (Ortskurve) die Maxima liegen, eliminieren wir k.

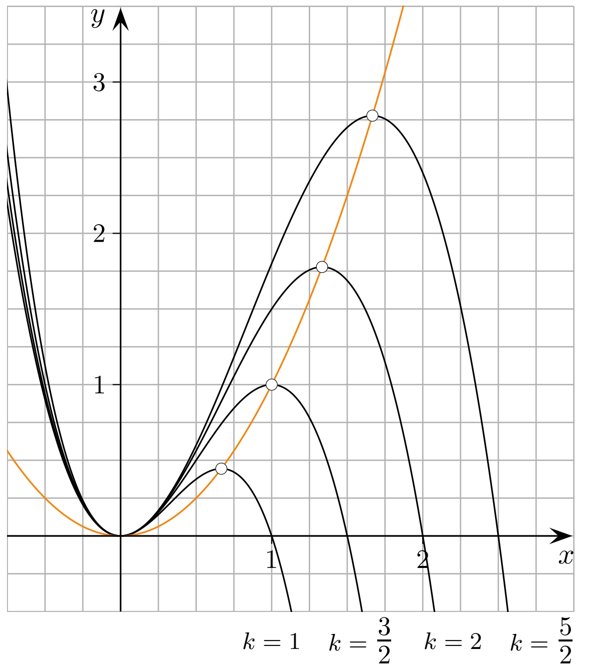
$$x = \frac{2}{3}k$$ indem wir die 1. Gleichung nach k

$$y = \frac{4}{9}k^2$$

auflösen und anschließend den Term für k in die 2. Gleichung einsetzen. Wir erhalten:

$$y = x^2$$

Durch den x-Wert ist der k-Wert eindeutig festgelegt (1. Gleichung), und durch den k-Wert der y-Wert (2. Gleichung). Es gibt daher eine direkte Beziehung zwischen dem x- und y-Wert.



Auf gleiche Weise ergibt sich als Ortskurve der Wendepunkte

$$W(\tfrac{k}{3} \mid \tfrac{2}{9}k^2) \qquad y = 2x^2$$

2. Beispiel:

Gegeben sei die Funktionenschar

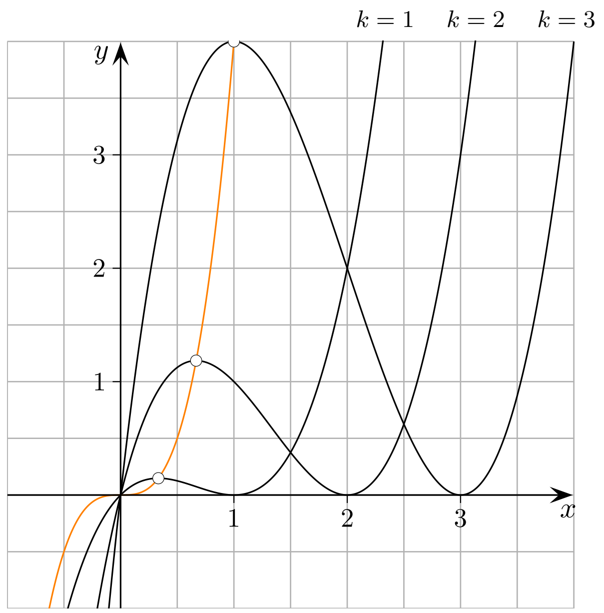
$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$

Für sie gilt:

$Max(\frac{a}{3} \mid \frac{4}{27}a^3), \qquad W(\frac{2}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3)$

Ortskurve der Maxima: $\quad y = 4x^3$

Ortskurve der Wendepunkte: $\quad y = \frac{1}{4}x^3$



Ortskurve $\quad e$-Funktionen

1. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion gegeben durch
$$f_t(x) = e^x\,(t - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass
   a) das Maximum $Max\big(t-1 \mid e^{t-1}\big)$ ist (Begründung ohne die 2. Ableitung),
   b) die Ortskurve der Maxima lautet: $g(x) = e^x$

   Zur Kontrolle: $\quad f_t'(x) = e^x\,(t - x - 1)$

2. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch
$$f_t(x) = e^{tx}\,(x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass
   a) alle Funktionen f_t zwei gemeinsame Punkte haben,
   b) die 1. Ableitung lautet: $f_t'(x) = (x-1)(tx - t + 2)\,e^{tx}$,
   c) ein Minimum und ein Maximum existieren (Begründungen ohne die 2. Ableitung),
   d) die Ortskurve der Maxima lautet: $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x}}\,(x-1)^2$

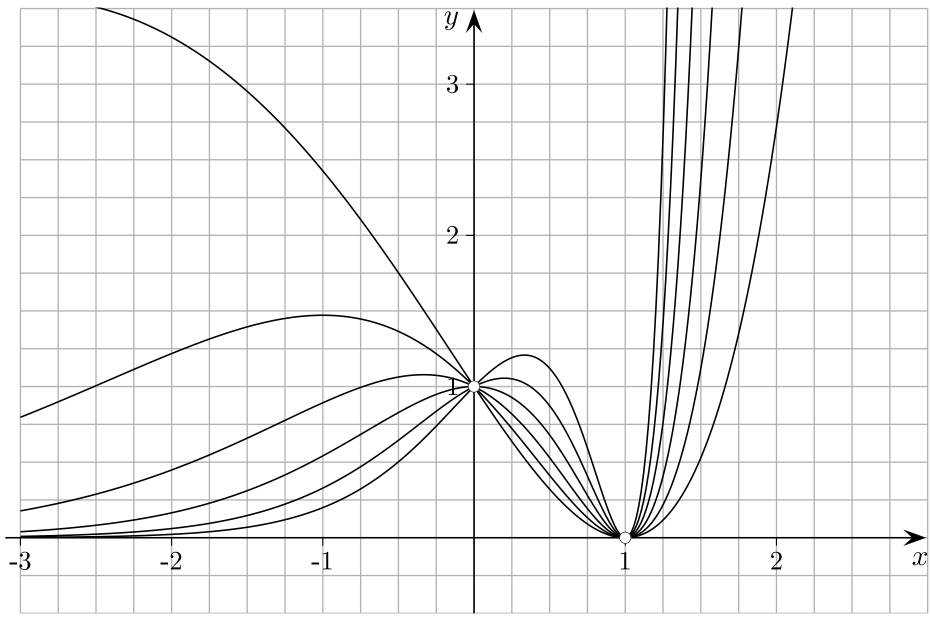
3. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion gegeben durch
$$f_t(x) = -\frac{2x}{t}\,e^{tx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass
   a) der Wendepunkt $W\big(-\frac{2}{t} \mid \frac{4}{e^2 \cdot t^2}\big)$ ist (nur notw. Begründung),
   b) die Ortskurve der Wendepunkte lautet: $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$

   Zur Kontrolle: $\quad f_t'(x) = -2e^{tx}\,(x + \frac{1}{t})$

   $f_t''(x) = -2e^{tx}\,(2 + tx)$

Funktionenschar

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion gegeben durch $f_t(x) = e^{tx}\,(x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_t zwei gemeinsame Punkte haben.



Die offensichtlich gemeinsamen Punkte der Graphen könnten mit der Funktion verifiziert werden.
Die gemeinsamen Punkte könnte man sich auch anhand des Funktionsterms überlegen, Frage:
Für welche x fällt t heraus? Für diese x wäre also $f_t(x)$ unabhängig von t.
Ein umständlicherer Ansatz wäre $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$ oder etwas einfacher
z. B. $f_1(x) = f_t(x)$.