Integration durch Substitution

Durch eine Probe mit der Kettenregel kann bestätigt werden:

$$\int 2x \cdot e^{x^2+1}\, dx = e^{x^2+1}$$

$$\int (3x+1)^4 \cdot 3\ dx = \frac{(3x+1)^5}{5}$$

Wie gehen wir vor, falls $F(x) = \int e^{3x}\, dx \quad (= \int f(x)\, dx\ )$ gesucht ist?

In $f(x) = e^{3x}$ setzen wir für x eine Funktion $g(x)$ ein, so dass $f(g(x))$ einfacher ist als $f(x)$.
Die Funktion g lautet $g(x) = \frac{x}{3}$.

Dann gilt: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int e^{x} \cdot \frac{1}{3}\ dx = \frac{1}{3} \cdot e^{x} = F(g(x))$

Begründung für das letzte Gleichheitszeichen:
F ist eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$ und damit ist
die Ableitung von $F(g(x))$ nach der Kettenregel $f(g(x)) \cdot g'(x)$, daher $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x))$.

Wie erhalten wir nun $F(x)$ aus $F(g(x)) = \frac{1}{3} \cdot e^{x}$?

Wir setzen in $F(g(x))$ die Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = 3x$ ein
und erhalten gemäß $g(g^{-1}(x)) = x$ das Ergebnis $F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$ (durch Probe bestätigen!).

Die einzelnen Rechenschritte lassen sich übersichtlich in einer symbolischen Rechnung zusammenfassen.

$\int e^{3x}\, dx = ?$

1. *$3x$ durch u ersetzen (substituieren)* $\int e^{u}\, dx$
2. *$3x = u$ nach x auflösen:* $x = \frac{1}{3}u$
3. *hierin x als Funktion von u auffassen und ableiten:* $\frac{dx}{du} = \frac{1}{3}$
4. *nach dx auflösen und oben (siehe 1.) einsetzen:* $\int e^{u}\, \frac{1}{3}\, du$
5. *integrieren, anschließend für u wieder $3x$ einsetzen:* $\frac{1}{3} \cdot e^{3x}$

Integriere:

1. $\int \frac{dx}{5x-4}$
2. $\int \frac{dx}{(ax+b)^3}$
3. $\int x \cdot \sin x^2\ dx$

Integration durch Substitution

Integriere:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x-4}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^3}$

3. $\displaystyle\int x \cdot \sin x^2 \; dx$

Lösungen:

1. $\displaystyle\frac{1}{5}\ln(5x-4)$, Tipp: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

2. $\displaystyle\frac{-1}{2a\,(ax+b)^2}$, $\displaystyle\int x^{-3}\;dx = -\frac{1}{2}x^{-2}$

3. $\displaystyle -\frac{1}{2}\cos x^2$, $\displaystyle(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Integration durch Substitution

Erläutere das Folgende:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a) \qquad\qquad \text{mit} \qquad F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
\big(F(g(x))\big)' &= f(g(x)) \cdot g'(x) \\
F(g(x)) &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \\
\underbrace{\Big[F(g(x))\Big]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}}_{F(b)-F(a)} &= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx
\end{aligned}$$

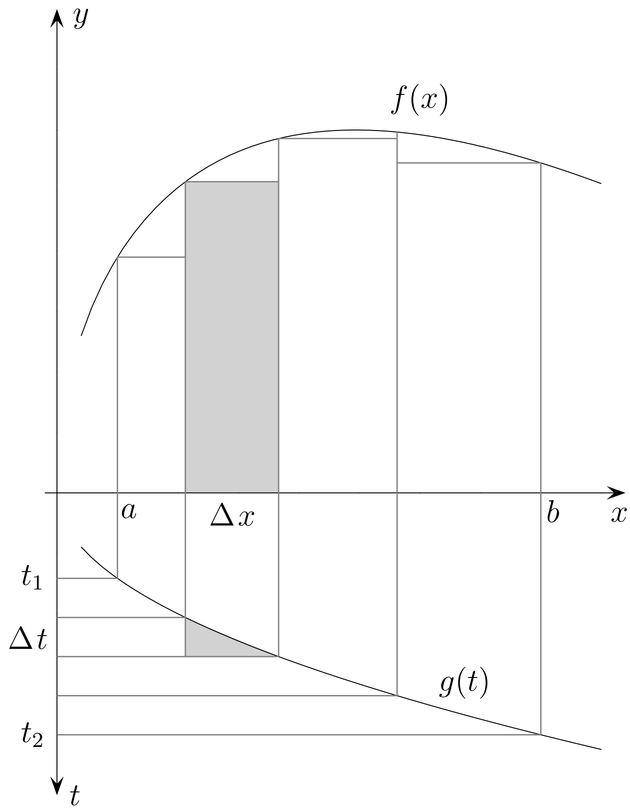
$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

Integration durch Substitution anschaulich

Der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \qquad \text{mit} \quad g(t_1)=a \quad \text{und} \quad g(t_2)=b$$

liegt ein Wechsel der Variablen von x nach t zugrunde.



Statt die Rechtecke $\Delta x\, f(x)$ zu addieren und zum Grenzwert überzugehen,
kann auch das t-Intervall unterteilt werden; wegen $\Delta x \approx g'(t)\cdot\Delta t$ ist Δt mit $f(g(t))\cdot g'(t)$ zu multiplizieren. Bei der Summenbildung sind die neuen Grenzen t_1 und t_2 zu beachten.

Integration durch lineare Substitution

$$\int e^{-2x}\,dx \;=?$$

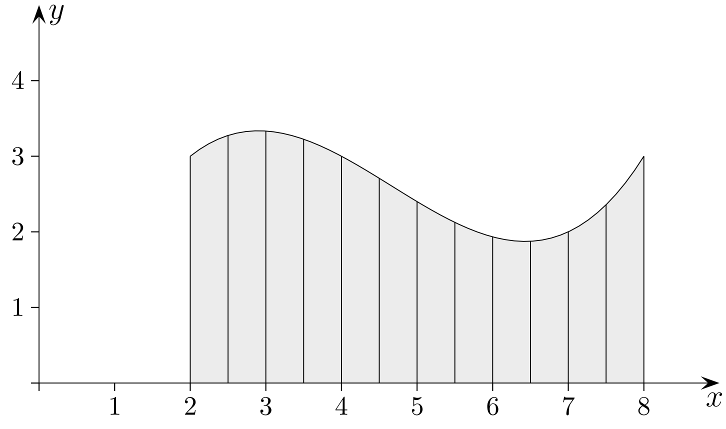
$$\begin{aligned} & \left(e^{-2x}\right)' \;=\; e^{-2x}\cdot(-2) \quad |:(-2) \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)' \;=\; e^{-2x} \\ \Longrightarrow\quad & \int e^{-2x}\,dx \;=\; -\tfrac{1}{2}e^{-2x}+C \end{aligned}$$

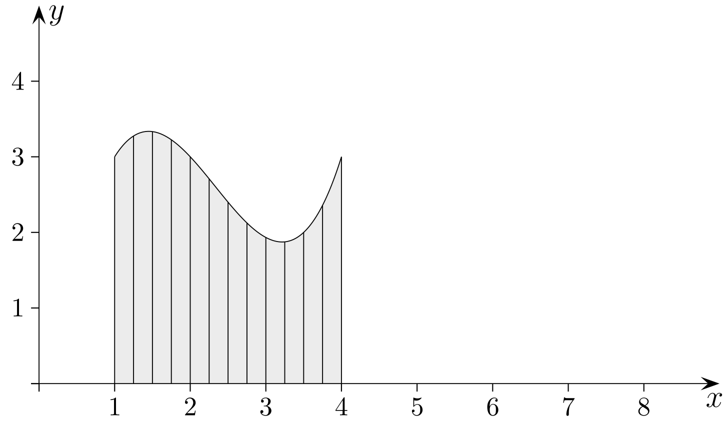
Probe ...

allgemein

$$\int f(ax+b)\,dx \;=\; \tfrac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad F'(x)=f(x)$$

Substitution auf einen Blick





$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

$$\int_2^8 f(x)\,dx = \int_1^4 f(2x) \cdot 2\,dx$$

$x \to f(2x)$ bewirkt eine Stauung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.