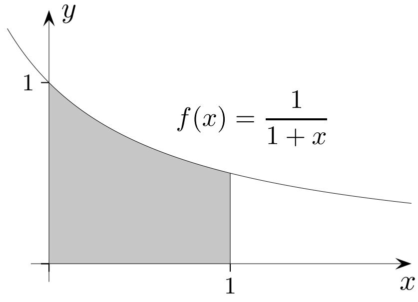
Taylorpolynome der Funktion $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad$ an der Stelle $x = 0$

Wenn die Funktion f z.B. die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit erfasst, so entspricht dem Flächeninhalt der zurückgelegte Weg.
Da wir den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f nicht berechnen können, nähern (approximieren) wir die Funktion durch Polynome an. Später werden wir sehen, dass die Aufgabe hierdurch vereinfacht wird.



An der Stelle $x = 0$ bedeutet, dass für die Berechnung der Näherungspolynome lediglich der Funktionswert von f und die Ableitungen f', f'', ... an der Stelle $x = 0$ herangezogen werden.

1. Nähere die Funktion an der Stelle $x = 0$ an, durch

   a) $g(x) = ax + b$

   b) $g(x) = ax^2 + bx + c$

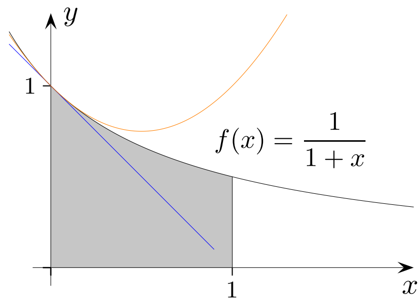
   c) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2. Schätze den Fehler für das quadratische Polynom ab.

Es werden die Ableitungen der Funktion f benötigt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f'''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Taylorpolynome der Funktion $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad$ Lösung



1. Zunächst soll die Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g'(0) = -1$

   Dies ergibt:

   $$\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = -x + 1$

2. Die Funktion $f(x)$ wird nun durch ein Polynom 2. Grades $g(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = 0$ approximiert.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g'(0) = -1$

   c) $g''(0) = 2$

   Dies ergibt:

   $$\begin{aligned} c &= 1 \\ b &= -1 \\ 2\,a &= 2 \qquad \Longrightarrow \quad a = 1 \end{aligned}$$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = x^2 - x + 1$

3. Die Funktion $f(x)$ wird nun durch ein Polynom 3. Grades $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an der Stelle $x = 0$ approximiert.

   a) $g(0) = 1$

   b) $g'(0) = -1$

   c) $g''(0) = 2$

   d) $g'''(0) = -6$

   Dies ergibt:

   $$\begin{aligned} d &= 1 \\ c &= -1 \\ 2\,b &= 2 \qquad \Longrightarrow \quad b = 1 \\ 6\,a &= -6 \qquad \Longrightarrow \quad a = -1 \end{aligned}$$

   Die Funktion lautet daher: $g(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

4. Fehlerabschätzung für das Polynom 2. Grades auf dem Intervall $[0,\ 1]$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{1+x} &=& x^2 - x + 1 \ + \ R(x) \\[2ex] -\dfrac{1}{(1+x)^2} &=& 2x - 1 \ + \ R'(x) \\[2ex] \dfrac{2}{(1+x)^3} &=& 2 \ + \ R''(x) \\[2ex] -\dfrac{6}{(1+x)^4} &=& R'''(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccll} -6 &\leq& R'''(x) &\leq& -\dfrac{3}{8} & \Longrightarrow \ (\text{mit} \quad R''(0) = 0\,) \\[2ex] -6\,x &\leq& R''(x) &\leq& -\dfrac{3}{8}\,x & \Longrightarrow \ (\text{mit} \quad R'(0) = 0\,) \\[2ex] -3\,x^2 &\leq& R'(x) &\leq& -\dfrac{3}{16}\,x^2 & \Longrightarrow \ (\text{mit} \quad R(0) = 0\,) \\[2ex] -x^3 &\leq& R(x) &\leq& -\dfrac{1}{16}\,x^3 & \end{array}$$

Taylorpolynome

Die Näherungspolynome ergeben sich auch unmittelbar aus dem
n-ten Taylorpolynom:

$$p_n(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \;\dots\; + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\,,$$

in das lediglich die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ einzusetzen sind.

Mit der Abschätzung

$$c_1 \;\le\; f^{(n+1)}(x) \;\le\; c_2\,, \qquad \text{d. h.}$$

$$c_1 \;\le\; R^{(n+1)}(x) \;\le\; c_2\,, \qquad \text{folgt} \qquad \frac{c_1}{(n+1)!}\,x^{n+1} \le\; R(x) \;\le\; \frac{c_2}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$