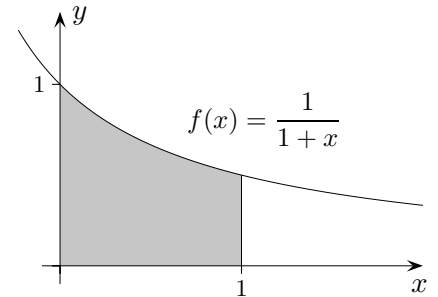


Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x = 0$

Wenn die Funktion f z.B. die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit erfasst, so entspricht dem Flächeninhalt der zurückgelegte Weg.

Da wir den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f nicht berechnen können, nähern (approximieren) wir die Funktion durch Polynome an. Später werden wir sehen, dass die Aufgabe hierdurch vereinfacht wird.

An der Stelle $x = 0$ bedeutet, dass für die Berechnung der Näherungspolynome lediglich der Funktionswert von f und die Ableitungen f' , f'' , ... an der Stelle $x = 0$ herangezogen werden.



1. Nähere die Funktion an der Stelle $x = 0$ an, durch

- a) $g(x) = ax + b$
- b) $g(x) = ax^2 + bx + c$
- c) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

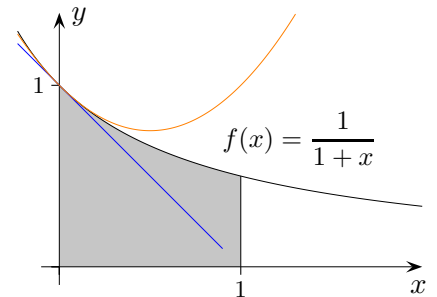
2. Schätze den Fehler für das quadratische Polynom ab.

Es werden die Ableitungen der Funktion f benötigt. $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ Lösung



1. Zunächst soll die Funktion $f(x)$ durch eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ an der Stelle $x = 0$ approximiert werden.

a) $g(0) = 1$

b) $g'(0) = -1$

Dies ergibt:

$$b = 1$$

$$a = -1$$

Die Funktion lautet daher: $g(x) = -x + 1$

2. Die Funktion $f(x)$ wird nun durch ein Polynom 2. Grades $g(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = 0$ approximiert.

a) $g(0) = 1$

b) $g'(0) = -1$

c) $g''(0) = 2$

Dies ergibt:

$$c = 1$$

$$b = -1$$

$$2a = 2 \implies a = 1$$

Die Funktion lautet daher: $g(x) = x^2 - x + 1$

3. Die Funktion $f(x)$ wird nun durch ein Polynom 3. Grades $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an der Stelle $x = 0$ approximiert.

a) $g(0) = 1$

b) $g'(0) = -1$

c) $g''(0) = 2$

d) $g'''(0) = -6$

Dies ergibt:

$$d = 1$$

$$c = -1$$

$$2b = 2 \implies b = 1$$

$$6a = -6 \implies a = -1$$

Die Funktion lautet daher: $g(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

4. Fehlerabschätzung für das Polynom 2. Grades auf dem Intervall $[0, 1]$

$$\frac{1}{1+x} = x^2 - x + 1 + R(x) \quad -6 \leq R'''(x) \leq -\frac{3}{8} \implies (\text{mit } R''(0) = 0)$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = 2x - 1 + R'(x) \quad -6x \leq R''(x) \leq -\frac{3}{8}x \implies (\text{mit } R'(0) = 0)$$

$$\frac{2}{(1+x)^3} = 2 + R''(x) \quad -3x^2 \leq R'(x) \leq -\frac{3}{16}x^2 \implies (\text{mit } R(0) = 0)$$

$$-\frac{6}{(1+x)^4} = R'''(x) \quad -x^3 \leq R(x) \leq -\frac{1}{16}x^3$$

Roofls

Taylorpolynome

Die Näherungspolynome ergeben sich auch unmittelbar aus dem n -ten Taylorpolynom:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

in das lediglich die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ einzusetzen sind.

Mit der Abschätzung

$$c_1 \leq f^{(n+1)}(x) \leq c_2, \quad \text{d. h.}$$

$$c_1 \leq R^{(n+1)}(x) \leq c_2, \quad \text{folgt} \quad \frac{c_1}{(n+1)!}x^{n+1} \leq R(x) \leq \frac{c_2}{(n+1)!}x^{n+1}.$$