Exponentielles Wachstum

Wir betrachten das Wachstum einer Bakterienkultur.

x Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y Anzahl	126	159	200	252	318	400	504	635	800	1009	1271

Bei doppelter Bakterienanzahl verdoppelt sich der Zuwachs.
Allgemein gilt, der Zuwachs Δy ist proportional zum Bestand.

$$\star \quad \Delta y \sim f(x)$$

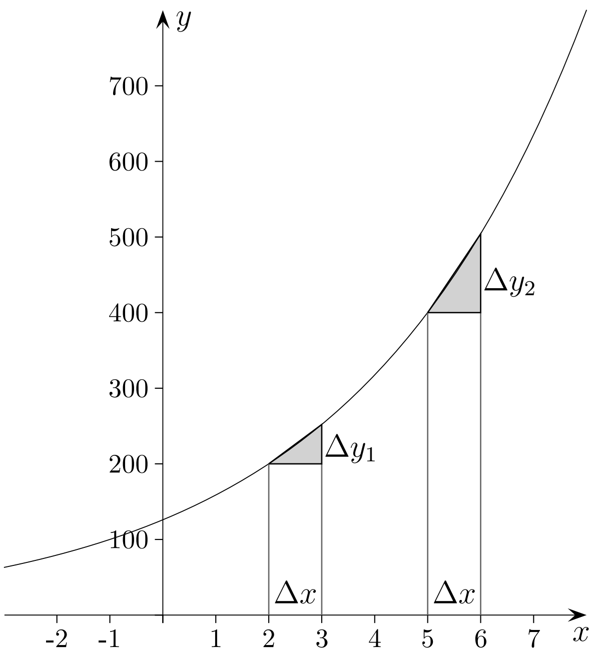
Für einen festen Zeitpunkt x gilt:
Verdoppelt sich Δx, so verdoppelt sich auch der Zuwachs Δy,
der Zuwachs Δy ist proportional zu Δx.

$$\star\star \quad \Delta y \sim \Delta x$$

Diese Überlegung gilt nur für kleines Δx, da die Wachstumskurve
in einem kleinen Bereich durch ihre Tangente angenähert werden kann.

Aus $\star$ und $\star\star$ folgt:

$$\Delta y \quad \sim \quad f(x) \cdot \Delta x$$



Beachte:
Wenn eine Größe proportional zu zwei anderen ist,
so ist sie auch zu deren Produkt proportional.

$$\begin{aligned} \Delta y &= k \cdot f(x) \cdot \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= k \cdot f(x) \\ f'(x) &= k \cdot f(x) \end{aligned}$$

Setzen wir zunächst $k = 1$, so ergibt sich:

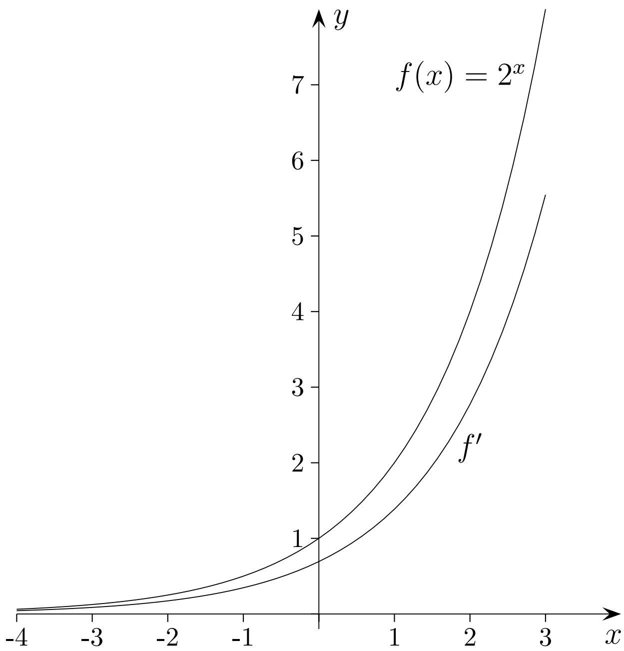
$$f'(x) = f(x)$$

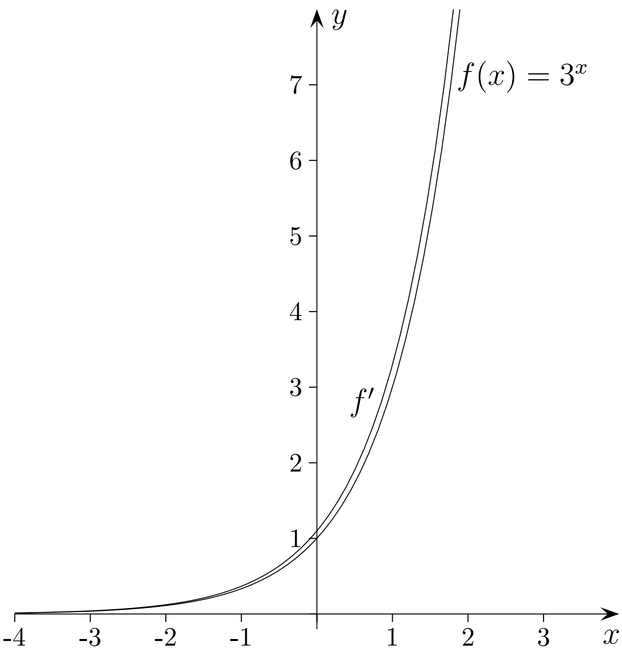
Wir suchen für die mathematische Beschreibung des Wachstums also eine
Funktion, die mit ihrer ersten Ableitung übereinstimmt.

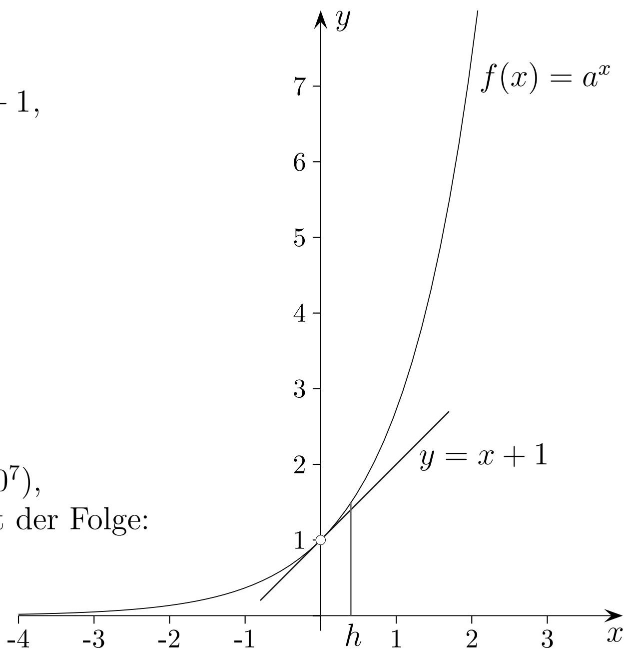
Exponentielles Wachstum

Polynome können die *Differentialgleichung* $f'(x) = f(x)$ nicht erfüllen, da ihr Grad (die höchste auftretende Potenz) beim Ableiten um Eins verringert wird: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
Graphische Differentiation (Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen) der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$ - die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zum vielversprechenden Ansatz $f(x) = a^x$ und die Frage:

Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?







Die Tangentengleichung im Ursprung wäre $y = x + 1$,
beachte $f'(0) = 1$.

Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \dfrac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \ (\ )^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq (1 + \frac{1}{n})^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein ($10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7$),
so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Exponentielles Wachstum

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird nach Euler (1707 - 1783) mit e bezeichnet (e von exponential),

$e = 2,718\,281\,828\,459\ \ldots$ Siehe auch die Kettenbruchentwicklungen von e unter Verschiedenes.

Für die e-Funktion $f(x) = e^x$ gilt: $(e^x)' = e^x$.

1. Eine Stadt zählte im Jahr 2000 350000 Einwohner. 1990 hatte sie 300000 Einwohner. Welche Einwohnerzahl ist für 2015 unter gleichen Wachstumsbedingungen zu erwarten?

2. Radioaktive Stoffe sind instabil. Sie zerfallen unter fortgesetzter Energieabgabe in eine Kette von selbst wieder instabilen Stoffen, an deren Ende Blei oder Wismut stehen. Nach Rutherford ist die in der Zeiteinheit zerfallende Zahl von Atomen der zur Zeit x vorhandenen Zahl von Atomen proportional.

   a) Zeige, dass für die Halbwertszeit T, das ist die Zeit, in der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist, gilt:
   $$T = \frac{\ln 2}{k}$$

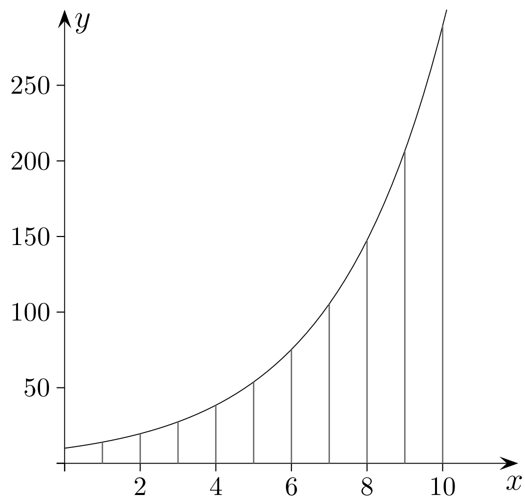
   b) Für Radium C ist $T = 19{,}7\,Min$. Nach welcher Zeit ist die Strahlungsenergie auf 10 % des Anfangswertes abgesunken?

Prozentuales Wachstum

1. In einem Gefäß befinden sich 10 Bakterien, die sich täglich um 40 % vermehren.
   Wie viele Bakterien sind nach 10 Tagen zu erwarten?

Mit den Funktionen $f(x) = a\,e^{kx}$ erfassen wir exponentielle Wachstumsvorgänge. Hierbei ist a der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.
Um den Zusammenhang zwischen der Wachstumskonstanten k und dem Prozentsatz $p = 40\,\%$ zu erkennen, geben wir den Bestand zur Zeit $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ an.

$$\begin{aligned} f(0) &= a & &| \cdot e^k \\ f(1) &= a\,e^k & &| \cdot e^k \\ f(2) &= a\,e^{k\cdot 2} & &| \cdot e^k \\ f(3) &= a\,e^{k\cdot 3} & &| \cdot e^k \\ &\vdots \end{aligned}$$



Andererseits ergibt sich mit der Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

für den Bestand K_n Folgendes:

$$\begin{aligned} &K_0 & &| \cdot\ (1 + \tfrac{p}{100}) \\ K_1 &= K_0 \cdot (1 + \tfrac{p}{100}) & &| \cdot\ (1 + \tfrac{p}{100}) \\ K_2 &= K_1 \cdot (1 + \tfrac{p}{100}) & &| \cdot\ (1 + \tfrac{p}{100}) \\ K_3 &= K_2 \cdot (1 + \tfrac{p}{100}) & &| \cdot\ (1 + \tfrac{p}{100}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es ist daher $e^k = 1 + \frac{p}{100}$. Hieraus kann k ermittelt werden.

Lösung: Nach 10 Tagen sind 289 Bakterien vorhanden.

2. Begründe: Für Zerfalls- oder Abnahmeprozesse, die durch $f(x) = a\,e^{-kx}$, $k > 0$, erfasst werden, gilt entsprechend: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

3. Zeige: Für $p \leq 10$ ist $k \approx \frac{p}{100}$. *Tipp:* $e^x \approx 1 + x$ *für kleine* x

4. Zeige: Für die Verdopplungszeit x_{V} (bzw. Halbwertszeit x_{H}) gilt: $x_{\text{V}} = \frac{\ln 2}{k}$ $(= x_{\text{H}})$.

5. Das radioaktive Wasserstoff-Isotop Tritium hat eine Halbwertszeit von 12,3 Jahren. Sein Gehalt ist im natürlichen Wasserkreislauf trotz Zerfall durch Neubildung in der Atmosphäre konstant. In abgetrennten Flüssigkeiten kommt kein neues Tritium hinzu. Wie alt ist ein Wein, der nur noch 40 % seines ursprünglichen Tritiumgehaltes aufweist?

Ergebnis: 16,3 Jahre

Kaninchen-Aufgabe Jutta Gut (Österreich)

1. Auf einer Insel lebten vor 10 Jahren 200 Kaninchen. Inzwischen haben sie sich auf 1200 vermehrt.

   a) Man kann annehmen, dass sich die Kaninchen exponentiell gemäß $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ vermehren. Berechne die Konstante λ (4 Dezimalen).

   b) Wieviel Prozent beträgt das jährliche Wachstum?

   c) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl der Kaninchen?

   d) Es wird beschlossen, sofort 400 Kaninchen abzuschießen und dann in einem Jahr und in zwei Jahren nochmals jeweils 200. Wieviele Tiere werden danach noch übrig sein?

Medikament-Aufgabe

2. Bei einer Operation wird für die Narkose ein Medikament verwendet, das mit einer Halbwertszeit von 40 Minuten abgebaut wird.

   a) Die Restmenge, die nach t Minuten noch vorhanden ist, kann durch die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$ dargestellt werden. Berechne die Konstante k auf 4 Dezimalen genau.

   b) Wieviel Prozent des Medikaments zerfällt pro Minute?
   Wieviel Prozent der ursprünglichen Menge sind nach 10 Minuten noch übrig?

   c) Eine Patientin erhält zuerst $2\,mg$ des Medikaments, danach zweimal in Abständen von einer Stunde je $1\,mg$. Welche Menge ist nach der letzten Infusion insgesamt vorhanden?

   d) Die Patientin wacht auf, wenn weniger als $0{,}5\,mg$ des Medikaments übrig sind. Wie lange nach der letzten Infusion ist das der Fall?

Nikotin-Aufgabe

3. Nikotin wird im menschlichen Körper mit einer Halbwertszeit von 60 Minuten abgebaut.

   a) Die Restmenge, die nach t Minuten noch vorhanden ist, kann durch die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$ dargestellt werden. Berechne die Konstante k auf 4 Dezimalen genau.

   b) Wieviel Prozent des vorhandenen Nikotins werden pro Minute abgebaut?

   c) Wie lange dauert es, bis noch $1\,\%$ der ursprünglichen Menge übrig ist?

   d) Beim Rauchen einer Zigarette gelangen $1{,}5\,mg$ Nikotin ins Blut. Herr N. raucht drei Zigaretten im Abstand von je einer halben Stunde. Wieviel Nikotin befindet sich nach der dritten Zigarette in seinem Körper?

Ergebnisse:

1. a) $\lambda = 0{,}1792$
   b) 19,6 %
   c) 3,9 Jahre
   d) 706 Kaninchen

2. a) $k = 0{,}0173$
   b) 1,72 % zerfallen pro Minute, 84,1 % sind nach 10 min übrig.
   c) 1,605 mg
   d) Nach 67 Minuten (67,4) wacht sie auf.

3. a) $k = 0{,}0116$
   b) 1,15 % werden abgebaut.
   c) 397 min
   d) 3,31 mg

Algenblüte-Aufgabe

4. Zur Zeit der Algenblüte kann man das Wachstum der Algen in einem See näherungsweise durch die Funktion W beschreiben:

$$W(t) = e^{0,5 \cdot t}, \quad t \text{ ist die Zeit in Tagen,}$$

$W(t)$ ist die Anzahl der Algen in 1000 pro Milliliter.

a) Zeichnen Sie den Graphen von W im Bereich $-3 \leq t \leq 3$ sowie dessen Tangente und Normale im Schnittpunkt S mit der vertikalen Achse.
Kommentieren Sie den Graphen von W und erklären Sie den Begriff Wachstumsgeschwindigkeit mithilfe Ihrer Zeichnung.

Die Funktionenschar $f_k(x) = e^{k \cdot x}$, $k > 0$ ist eine Schar von Wachstumsfunktionen.

b) Beschreiben Sie kurz die Graphen der Schar und ihre Gemeinsamkeiten.
Fertigen Sie zur Erläuterung eine Skizze an.
Welchen Einfluss hat der Parameter k auf den Verlauf des Graphen?

c) Bestimmen Sie für alle Graphen von f_k die Gleichungen der Tangente t und der Normalen n in ihrem Schnittpunkt S mit der y-Achse. Die Tangente t, die Normale n und die x-Achse begrenzen ein Dreieck. Ermitteln Sie, für welchen Wert k der Flächeninhalt dieses Dreiecks extremal wird, und bestimmen Sie die Art des Extremums.

d) Die x-Achse, der Graph von f_k, seine Tangente in S und die Gerade mit $x = u$, $u < -\frac{1}{k}$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche und seinen Grenzwert für $u \to -\infty$.

Lösungshinweise:

c) $t\colon y = kx + 1$

$n\colon y = -\dfrac{1}{k}x + 1$

$A(x) = \dfrac{1}{2}\left(k + \dfrac{1}{k}\right)$

Für $k = 1$ ist $A_{\min} = 1$.

d) $A(u) = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k}e^{ku}$

$\lim\limits_{u \to -\infty} A(u) = \dfrac{1}{2k}$

Fäulnisbakterien-Aufgabe

5. a) Fäulnisbakterien produzieren stinkenden Schwefelwasserstoff, wenn sie z. B. Eier zersetzen. Im Laborversuch wurde herausgefunden, dass die Gasentwicklung (in Litern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in h) durch die folgende Funktion erfasst wird:

$$g(t) = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t}, \;\; t \geq 0$$

Beschreiben Sie mit Hilfe des GTR den Verlauf der Gasentwicklung.
Was sagt $g'(t)$ über die Gasentwicklung aus?

b) Zeigen Sie, dass

$$G(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(-2t - 4), \;\; t \geq 0$$

eine Stammfunktion von g ist.

c) Berechnen Sie, welche Gasmenge in den ersten drei Stunden entsteht und untersuchen Sie, wie viel Liter Gas insgesamt entstehen.

d) Untersuchen Sie ausführlich die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx}$, $k > 0, \; x \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie auch die Ortskurve der Maxima.

Lösungshinweise:

a) $Max(2 \mid 0{,}74),\ W(4 \mid 0{,}54)$

c) 1,77 (l)
4 (l)

d) $x \to \infty \implies f_k(x) \to 0$
$N(0 \mid 0),\ Max\left(\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k \cdot e}\right)$
$W\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k \cdot e^2}\right)$
$y = \frac{1}{e}x$

Lösung der DGL des exponentiellen Wachstums

$$\begin{aligned}
f'(x) &= k \cdot f(x) \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= k \\
\ln f(x) &= kx + C && \textit{beachte:} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln f(x) + C \\
f(x) &= e^{kx+C} \\
f(x) &= e^{kx} \cdot e^{C} \\
f(x) &= a\,e^{kx} && \textit{mit} \ \ a = e^{C}
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
e^{\ln x} &= x && |\ (\ )' \\
e^{\ln x}\,(\ln x)' &= 1 && \textit{(Kettenregel)} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Bevölkerungswachstum

Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von 2000 bis 2010
(jeweils Beginn des Jahres) von 6,1 auf 6,9 Milliarden.
Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch $N(x) = N_0 \cdot e^{k(x-2000)}$ beschreiben,
wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist.
Wie viele Menschen leben nach dieser Modellierung in den Jahren 2015 und 2020?

Bevölkerungswachstum

Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von 2000 bis 2010 (jeweils Beginn des Jahres) von 6,1 auf 6,9 Milliarden.
Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch $N(x) = N_0 \cdot e^{k(x-2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist.
Wie viele Menschen leben nach dieser Modellierung in den Jahren 2015 und 2020?

$$\begin{aligned}
N_0 &= 6{,}1 \text{ [Milliarden]} \\
6{,}9 &= 6{,}1 \cdot e^{k(2010-2000)} \\
&\cdots \\
k &= 0{,}0123 \\
N(2015) &= 7{,}3 \text{ [Milliarden]} \\
N(2020) &= 7{,}8 \text{ [Milliarden]}
\end{aligned}$$

Fischbestand

In einen Teich werden 100 Fische ausgesetzt, die sich dort exponentiell gemäß $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vermehren. Nach 5 Jahren zählt man in dem Teich 380 Fische. Allerdings breitet sich nach 5 Jahren in dem Teich sehr rasch eine Fischkrankheit aus, welche die Wachstumskonstante k sofort auf $-0{,}25$ absenkt.

a) Bestimmen Sie die Konstante k der ersten 5 Jahre (4 Dezimalen).
Wieviel Prozent beträgt in dieser Zeit das jährliche Wachstum?

b) Wie viele Fische sind nach 4 Jahren in dem Teich?

c) Wie lautet die Funktion, die den Fischbestand $f(x)$ zur Zeit x im Bereich $[0, 12]$ beschreibt?
Zeichnen Sie den Graph von f.

d) Wann beträgt der Fischbestand wieder 100 Fische?

In einen Teich werden 50 Fische ausgesetzt, die sich dort exponentiell gemäß $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vermehren. Nach 4 Jahren zählt man in dem Teich 480 Fische. Allerdings breitet sich nach 4 Jahren in dem Teich sehr rasch eine Fischkrankheit aus, welche die Wachstumskonstante k sofort auf $-0{,}3$ absenkt.

a) Bestimmen Sie die Konstante k der ersten 4 Jahre (4 Dezimalen).
Wieviel Prozent beträgt in dieser Zeit das jährliche Wachstum?

b) Wie viele Fische sind nach 3 Jahren in dem Teich?

c) Wie lautet die Funktion, die den Fischbestand $f(x)$ zur Zeit x im Bereich $[0, 12]$ beschreibt?
Zeichnen Sie den Graph von f.

d) Wann beträgt der Fischbestand wieder 50 Fische?

Fischbestand

In einen Teich werden 100 Fische ausgesetzt, die sich dort exponentiell gemäß $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vermehren. Nach 5 Jahren zählt man in dem Teich 380 Fische. Allerdings breitet sich nach 5 Jahren in dem Teich sehr rasch eine Fischkrankheit aus, welche die Wachstumskonstante k sofort auf $-0{,}25$ absenkt.

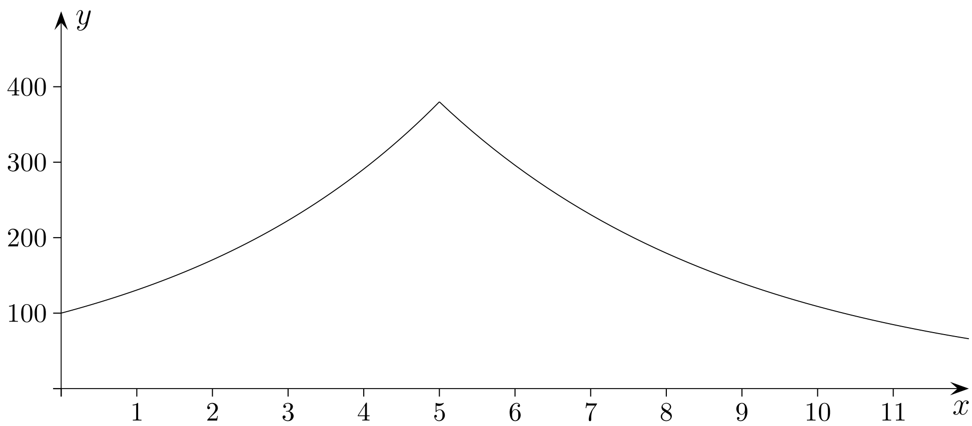
a) Bestimmen Sie die Konstante k der ersten 5 Jahre (4 Dezimalen). 0,2670
Wieviel Prozent beträgt in dieser Zeit das jährliche Wachstum? 30,6 %

b) Wie viele Fische sind nach 4 Jahren in dem Teich? 291

c) Wie lautet die Funktion, die den Fischbestand $f(x)$ zur Zeit x im Bereich $[0, 12]$ beschreibt?
Zeichnen Sie den Graph von f.

$$f(x) = \begin{cases} 100e^{0{,}2670x}, & x \leq 5 \\ 380e^{-0{,}25(x-5)}, & x > 5 \end{cases}$$

d) Wann beträgt der Fischbestand wieder 100 Fische? nach 10,3 Jahren



Fischbestand

In einen Teich werden 50 Fische ausgesetzt, die sich dort exponentiell gemäß $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vermehren. Nach 4 Jahren zählt man in dem Teich 480 Fische. Allerdings breitet sich nach 4 Jahren in dem Teich sehr rasch eine Fischkrankheit aus, welche die Wachstumskonstante k sofort auf $-0{,}3$ absenkt.

a) Bestimmen Sie die Konstante k der ersten 4 Jahre (4 Dezimalen). 0,5654
Wieviel Prozent beträgt in dieser Zeit das jährliche Wachstum? 76,0 %

b) Wie viele Fische sind nach 3 Jahren in dem Teich? 273

c) Wie lautet die Funktion, die den Fischbestand $f(x)$ zur Zeit x im Bereich $[0, 12]$ beschreibt?
Zeichnen Sie den Graph von f.

$$f(x) = \begin{cases} 50e^{0{,}5654x}, & x \leq 4 \\ 480e^{-0{,}3(x-4)}, & x > 4 \end{cases}$$

d) Wann beträgt der Fischbestand wieder 50 Fische? nach 11,5 Jahren