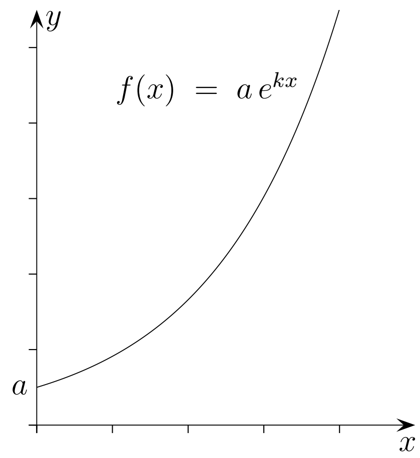
Wachstumsprozesse, iterativ

Exponentielles Wachstum



$$\text{DGL} \qquad f'(x) = k \cdot f(x)$$

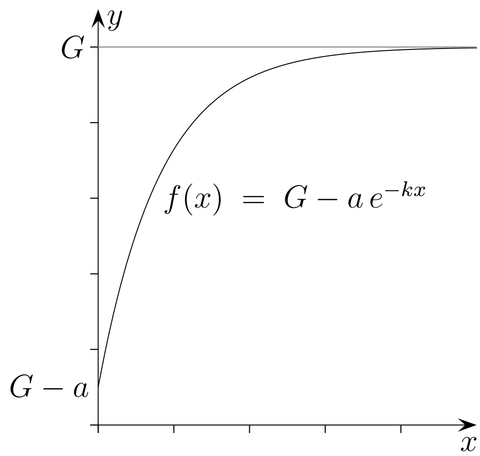
Differenzengleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot y_n$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \cdot \Delta x$$

Anfangswert: $y_0 = a$

Beschränktes Wachstum



$$f'(x) = k \cdot (G - f(x))$$

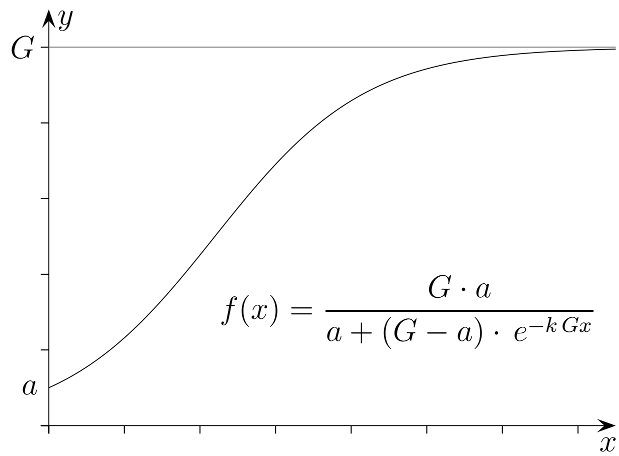
Differenzengleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = k \cdot (G - y_n)$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot \Delta x$$

Der Zuwachs ist stets ein Bruchteil der Differenz zur Grenze G.

Logistisches Wachstum



$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n \cdot \Delta x$$

$$\text{umgeformt:} \quad y_{n+1} = y_n \left(1 + k^* \cdot \frac{G - y_n}{G} \cdot \Delta x \right)$$

mit $k^* = k \cdot G$

Durch die Umformung ist das anfängliche (näherungsweise) exponentielle Wachstum mit der Wachstumsrate k^* zu erkennen. k^* wird mit einem Faktor multipliziert, der gegen null strebt.

Wachstumsprozesse, iterativ

Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) = (g - s\,x) \cdot f(x)$$

Geburtenrate g

Sterberate $s\,x$ (proportional zur Zeit)

iterativ:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = y_n\,(g - s\,x_n)$$

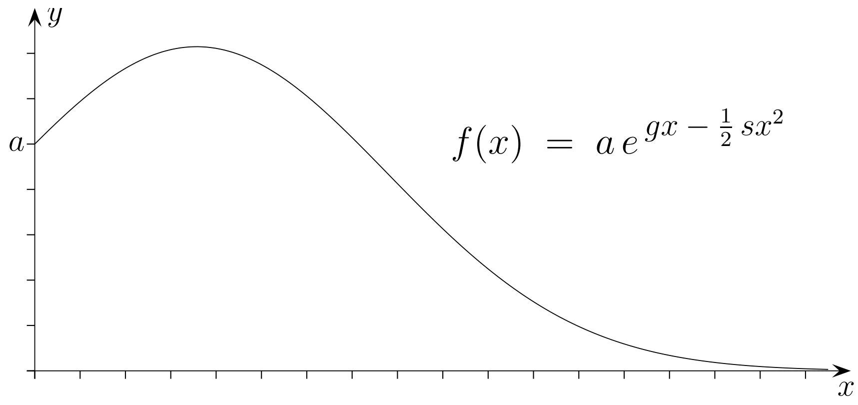
$$\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + y_n\,(g - s\,x_n) \cdot \Delta x$$

$$\text{mit} \quad x_n = n \cdot \Delta x$$

Anfangswert: $y_0 = a$

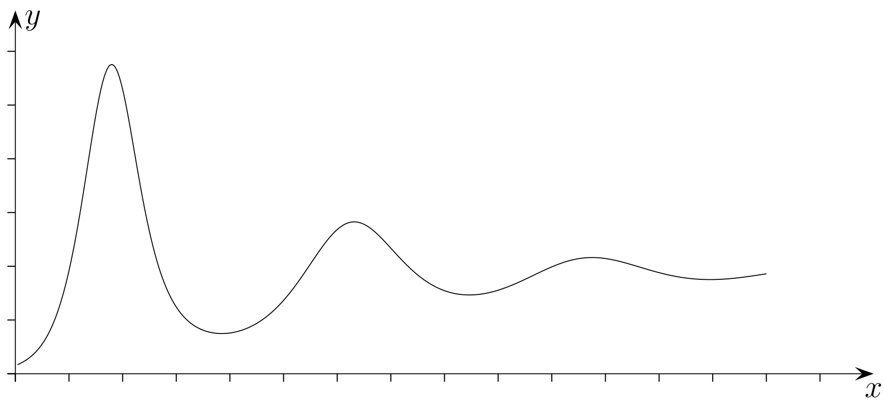
Beim exponentiellen Wachstum sind Geburten- und Sterberate konstant.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= g \cdot y_n - s \cdot y_n \qquad (\Delta x = 1) \\ &= (g - s) \cdot y_n = k \cdot y_n \end{aligned}$$



Wachstum mit Giftabbau

(siehe Excel-Blatt)



Wachstumsprozesse, iterativ

Die Iterationsgleichung für das logistische Wachstum

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n \cdot \Delta x$$

kann für $G = 1$ (y_n ist dann der Anteil) und $\Delta x = 1$ auf die Form

$$y_{n+1} = a y_n \cdot (1 - b y_n)$$

mit $a = k + 1$ und $b = \dfrac{k}{k+1}$ gebracht werden.

Es gibt eine Fülle von weiteren Wachstumsmodellen,
z. B. für die Erfassung von Fischpopulationen:

Ricker 1958

$$y_{n+1} = a y_n \cdot e^{-b y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n \cdot e^{r\,(1 - \frac{y_n}{G})}$$

Beverton-Holt 1957

$$y_{n+1} = \frac{a y_n}{1 + b y_n}$$

Aus dem exponentiellen Wachstum mit der DGL $f'(x) = k \cdot f(x)$
ergibt sich ein neues Wachstumsmodell, wenn die Wachstumskonstante k
von der Zeit abhängig angenommen wird, siehe z. B. vergiftetes Wachstum.

Die DGL lautet dann: $f'(x) = k(x) \cdot f(x)$

und die Lösungsfunktion: $f(x) = e^{\int_0^x k(y)\,dy}$ mit $f(0) = 1$

Ergänzung zum logistischen Wachstum, z. B. Ausbreitung eines Gerüchts, $\Delta x = 1$ (Zeiteinheit)

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot (G - y_n) \cdot y_n$$

umgeformt: $$y_{n+1} = y_n + k^* \cdot \frac{G - y_n}{G} \cdot y_n \qquad \text{mit} \quad k^* = k \cdot G$$

$\dfrac{G - y_n}{G}$ ist der Anteil der Unwissenden (nicht Infizierten, ...) bzw. die Wahrscheinlichkeit, auf einen Unwissenden zu stoßen. Dieser Versuch wird y_n-mal wiederholt.