

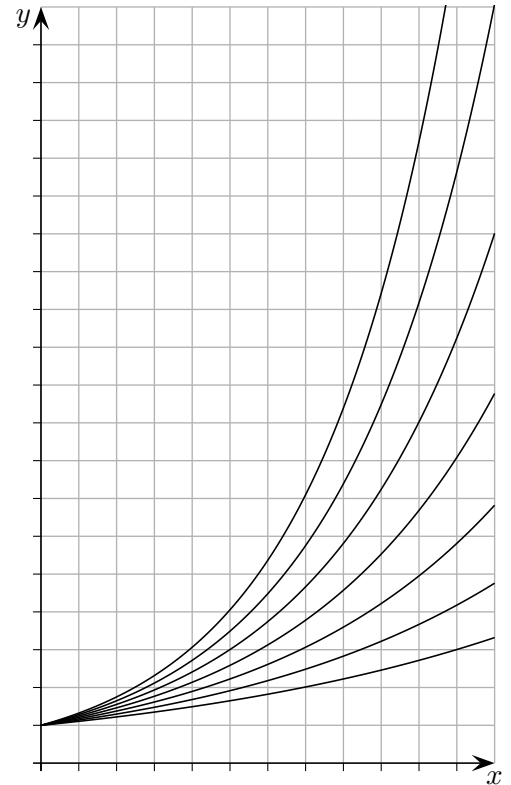
Wachstumsprozesse

1. Exponentielles Wachstum

$$f'(x) = k \cdot f(x) \qquad f(x) = a e^{kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = a$$

$$\Delta y \approx k \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$$

Der Zuwachs ist proportional zum Bestand.



2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

$$f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \qquad f(x) = G - a e^{-kx} \quad \text{mit} \quad f(0) = G - a$$

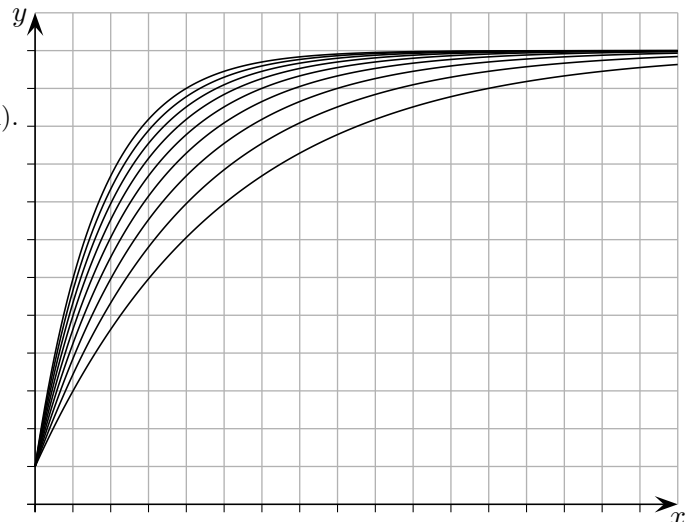
$$\Delta y \approx k \cdot (G - f(x)) \quad \text{mit} \quad \Delta x = 1$$

Der Zuwachs ist proportional zum Sättigungsmanko (Differenz Grenze G minus Bestand).

2. Sichtweise (Klammern wurden aufgelöst):

$$f'(x) = \underbrace{k \cdot G}_m - k \cdot f(x)$$

Ein konstanter Zuwachs wird um einen zum Bestand proportionalen Betrag verringert (siehe Tropfinfusion).



Wachstumsprozesse

3. Logistisches Wachstum

$$\begin{aligned} f'(x) &= k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x) \\ &= \underbrace{k \cdot G}_{\text{konstant}} \cdot f(x) - k \cdot f(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Begründe:

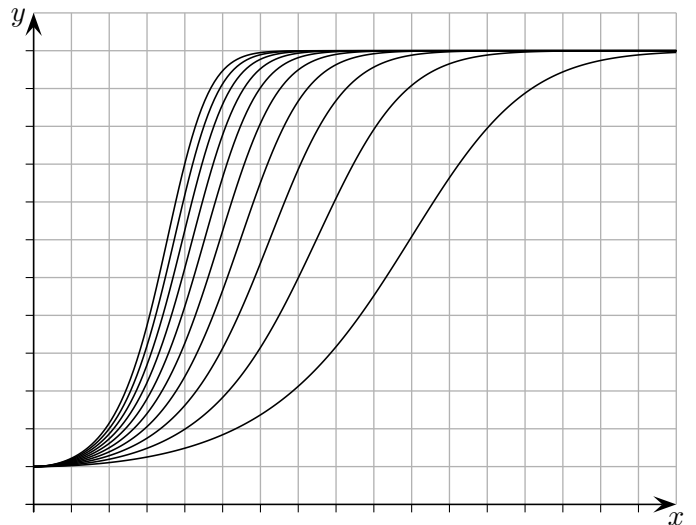
Anfänglich liegt ein nahezu exponentielles Wachstum vor.

$f(x)$ strebt gegen G für $x \rightarrow \infty$.

$$f(x) = \frac{G}{1 + a e^{-kGx}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{G - f(0)}{f(0)}$$

oder umgeformt

$$f(x) = \frac{G \cdot e^{bx}}{a + e^{bx}} \quad \text{mit} \quad b = kG$$



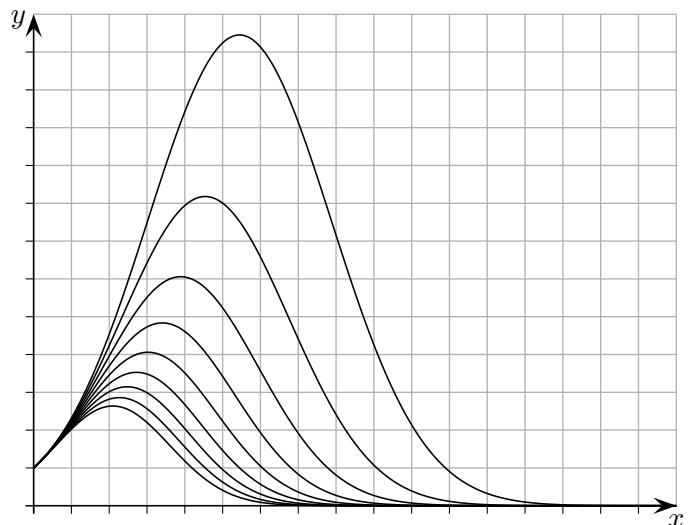
4. Vergiftetes Wachstum

$$f'(x) = (g - sx) \cdot f(x)$$

Im Gegensatz zum exponentiellen Wachstum

nimmt hier der Wachstumsfaktor mit der Zeit ab.

$$f(x) = a e^{gx - \frac{1}{2}sx^2}$$

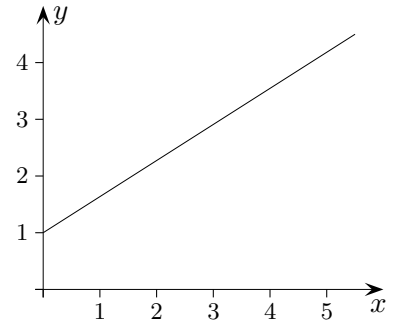


Wachstumsprozesse

1. lineares Wachstum

Die Änderungsrate ist konstant.

$$f'(x) = k \quad f(x) = kx + c$$



2. begrenztes Wachstum

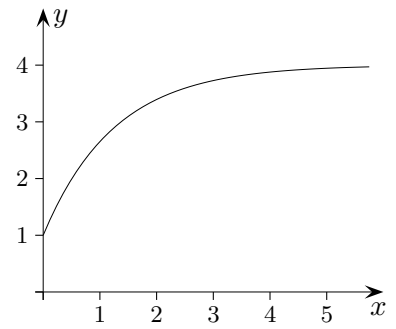
Die Änderungsrate ist anfänglich konstant, strebt dann gegen null (warum?).

$$f'(x) = k \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right) \quad f(x) = G - ae^{-k^*x}$$

$$f'(x) = k \frac{G - f(x)}{G}$$

$$f'(x) = k^* (G - f(x)) \quad k^* = \frac{k}{G}$$

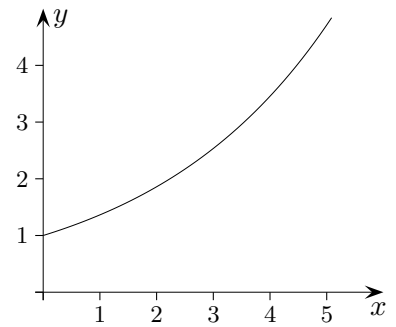
Die Änderungsrate ist proportional zum Sättigungsmanko.
Verifiziere die Lösung der DGL.



3. exponentielles Wachstum

Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand.

$$f'(x) = k f(x) \quad f(x) = ae^{kx}$$



4. logistisches Wachstum

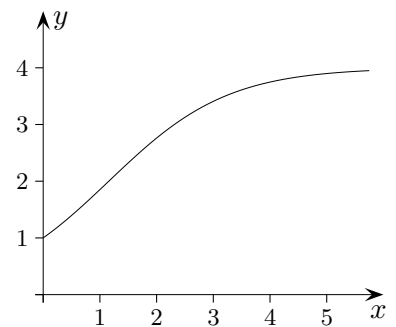
Die Änderungsrate ist anfänglich exponentiell, strebt dann gegen null.

$$f'(x) = k f(x) \left(1 - \frac{f(x)}{G}\right) \quad f(x) = \frac{G}{1 + ae^{-kx}}$$

$$f'(x) = k f(x) \frac{G - f(x)}{G}$$

$$f'(x) = k^* f(x) (G - f(x)) \quad k^* = \frac{k}{G}$$

Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand
und zum Sättigungsmanko.



a) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + a$$

Die Änderung (Wachstumsgeschwindigkeit) setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer konstanten Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \left(b + \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kx} - \frac{a}{k}$
die DGL löst, $b = f(0)$ (Anfangsbestand)

b) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot f(x) + ax$$

Die Änderung setzt sich aus einem zum Bestand proportionalen Anteil und einer zur Zeit x proportionalen Zunahme/Abnahme zusammen.

Zeige, dass $f(x) = \frac{k^2 + a}{k^2} \cdot e^{kx} - \frac{a}{k}x - \frac{a}{k^2}$
die DGL löst.

Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?

c) Gegeben ist die DGL:

$$f'(x) = k \cdot (f(x))^2$$

Die Änderung ist proportional zum Quadrat des Bestandes.

Zeige, dass $f(x) = \frac{a}{1 - akx}$

die DGL löst.

Wie groß ist hier der Anfangsbestand $f(0)$?