e-Funktionen $\quad f(x) = e^{-x^2}$

1. Symmetrie:
   Der Graph ist achsensymmetrisch, da $f(-x) = f(x)$.

2. Nullstellen:
   Bed.: $\quad f(x) = 0$
   Es sind keine Nullstellen vorhanden, da e^x stets positiv ist.

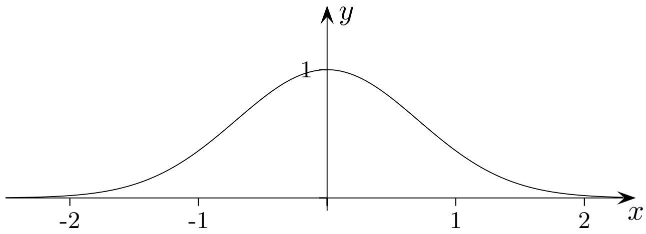
3. Extrema:
   notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} & \qquad f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2-1) \\ x &= 0 & \qquad f''(0) &= -2 \qquad Max(\,0 \mid 1\,) \end{aligned}$$

4. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

   Auch ohne die 2. Ableitung wäre nun zu erkennen, dass $E(\,0 \mid 1\,)$ ein Maximum sein muss.



5. Wendepunkte:
   notw. Bed.: $\quad f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2-1) \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \qquad W_{1/2}(\,\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\,) \end{aligned}$$

   Die Existenz der Wendepunkte folgt aus dem Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$.

Funktion $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Nullstellen:
   Bed.: $\quad f(x) = 0$

$$x = 0$$

2. Extrema:
   notw. Bed.: $\quad f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}\,(2x - x^2) & \qquad f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \\ x_1 &= 0 & \qquad f''(0) &= 2 \qquad Min(\,0 \mid 0\,) \\ x_2 &= 2 & \qquad f''(2) &< 0 \qquad Max(\,2 \mid \frac{4}{e^2}\,) \end{aligned}$$

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$

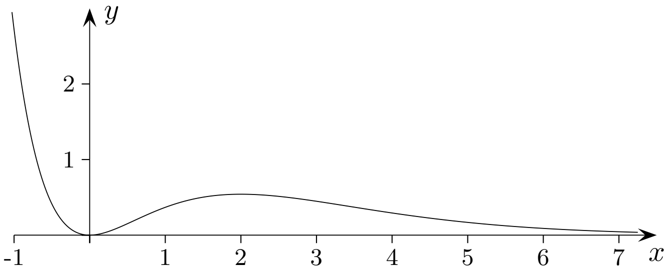
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

4. Wendepunkte:
   notw. Bed.: $\quad f''(x) = 0$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

   Begründung für die Existenz der Wendepunkte ...



Funktion $f(x) = 2e^x - k\,e^{2x}$, $k > 0$

1. Nullstellen

2. Extrema

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

4. Wendepunkte

5. Sei $k = 1$
   Parabel durch $Max(0 \mid 1)$
   mit bestmöglicher Approximation

Funktion $\quad f(x) = 2e^x - k\,e^{2x}\,, \quad k > 0$

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2\,e^x - k\,e^{2x} &= 0 \\ e^x(2 - k\,e^x) &= 0 \\ 2 - k\,e^x &= 0 \\ x &= \ln\frac{2}{k} \end{aligned}$$

2. Extrema:

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2\,e^x - 2\,k\,e^{2x} \qquad f''(x) = 2\,e^x - 4\,k\,e^{2x}$$

$$x = \ln\frac{1}{k} \qquad f''(\ln\frac{1}{k}) = -\frac{2}{k} < 0 \qquad Max(\ln\frac{1}{k} \mid \frac{1}{k})$$

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2e^x - ke^{2x}) = \lim_{x\to\infty} e^x(2 - k\,e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - ke^{2x}) = \lim_{x\to-\infty} e^x(2 - k\,e^x) = 0$$

4. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 2\,e^x - 4\,k\,e^{2x}$$

$$x = \ln\frac{1}{2\,k} \qquad W(\ln\frac{1}{2\,k} \mid \frac{3}{4\,k})$$

Die Existenz des Wendepunkts folgt aus dem Verhalten von f für $x \longrightarrow -\infty$.

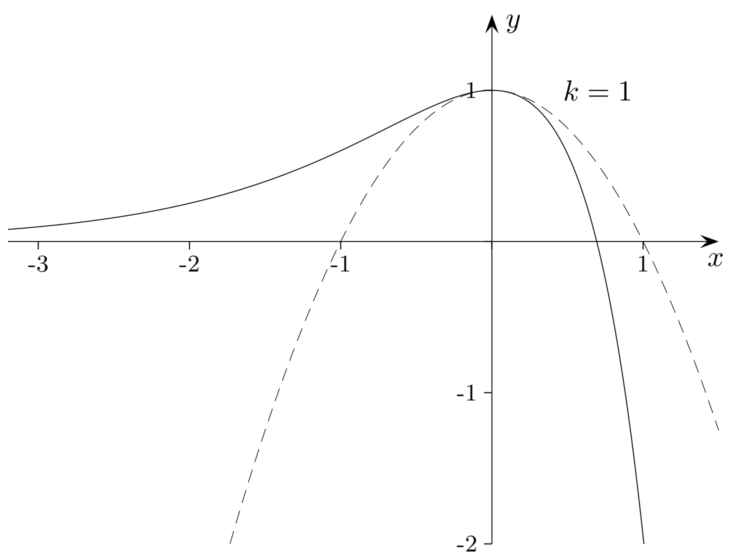
5. Sei $k = 1$
Parabel durch $Max(0 \mid 1)$
mit bestmöglicher Approximation:

$g(x) = -a\,x^2 + 1$

Bed.: $f''(0) = g''(0)$

$$-2 = -2\,a \implies a = 1$$

$g(x) = -x^2 + 1$



Funktion $\quad f(x) = x\,e^{-x^2}$

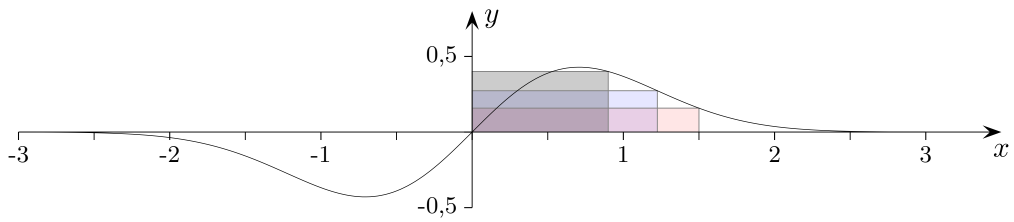
1. Wie lauten die Nullstellen, die Extrema und die x-Koordinaten der Wendepunkte?
2. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.
4. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an.

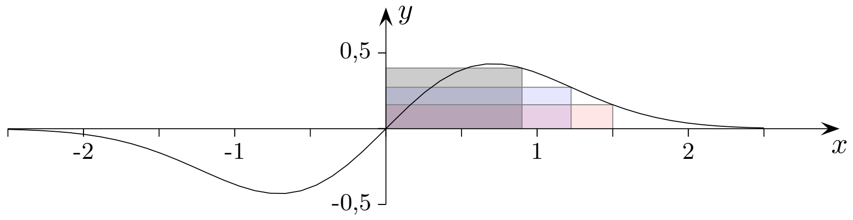
   zur Kontrolle: $f'(x) = (1-2x^2)\cdot e^{-x^2}$, $\; f''(x) = (4x^3-6x)\cdot e^{-x^2}$,

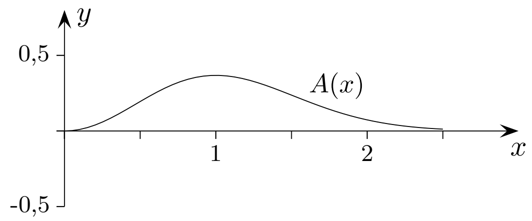
   $Max\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\mid\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$, $\; Min\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\mid-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$,

   $W_1(0\mid 0)$, $\; W_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\mid\ ...\right)$, $\; W_3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\mid\ ...\right)$,

5. Welches Rechteck (diagonale Eckpunkte im Ursprung und auf dem Graphen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?



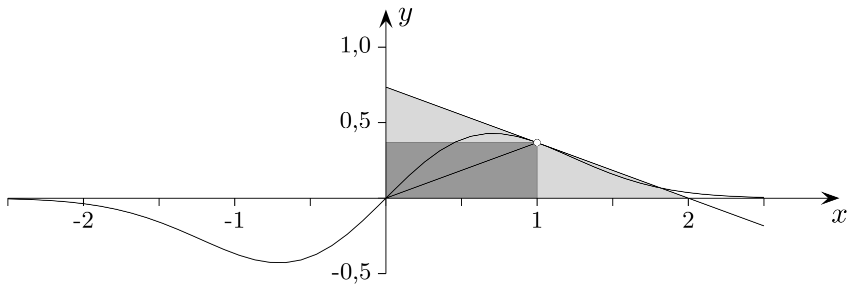




$A(x) = x \cdot f(x)$

$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$

Maximum an der Stelle $x = 1$
Begründung: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} A(x) = 0 \;\ldots$



allgemeiner Zusammenhang:

Tangente an der Stelle $x = 1$: $\quad t(x) = -e^{-1}(x-1) + e^{-1}$

$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) + x \cdot f'(x) = 0, \quad x_0 = 1$

$f'(x_0) = -\dfrac{f(x_0)}{x_0} \quad \Longrightarrow \quad t(0) = 2 \cdot f(x_0)$

An der Stelle des Maximums gilt:
Der y-Achsenabschnitt der Tangente ist doppelt so groß wie der Funktionswert.

Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ und $g(x) = \frac{1}{e} \cdot x + e^{1-x}$

schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche endlichen Inhalts A ein. Bestimmen Sie A (ohne GTR). Wie groß müsste eine rechte Grenze z für die Fläche gewählt werden, damit schon 99 % von A erreicht würden? (ohne GTR)

Ergebnisse:

$A = e$
$z = -\ln 0{,}01 = 4{,}605$

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = e^x(e^x - t), \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie ohne GTR die Nullstellen und Extrema (x- und y-Koordinate) (Begründung Min/Max <u>ohne</u> die 2. Ableitung).

Für jedes $t > 0$ ist ein Punkt $P_t\left(\ln\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$ gegeben.

b) Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_t?

c) Gibt es einen Punkt P_t, der dem Ursprung am nächsten liegt? (mit GTR-Einsatz, jedoch kein Probieren) Wenn ja, welcher? (x- und y-Koordinate)

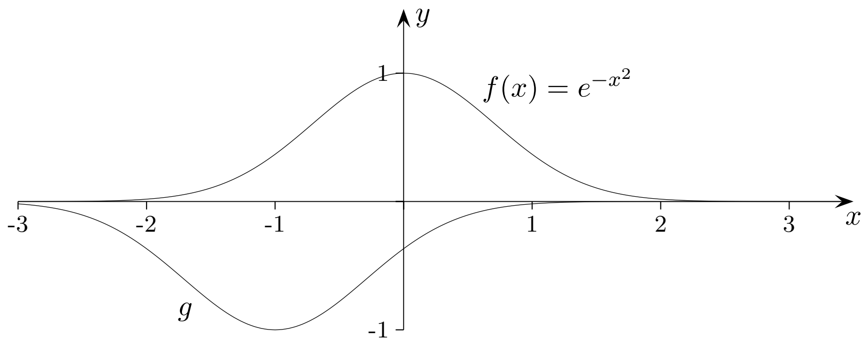
a) Nullstelle $x = \ln t$

$Min\left(\ln\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$

b) $y = -e^{2x}$

c) $P_{1{,}34}(-0{,}4 \mid -0{,}44)$

Wie lautet ein Funktionsterm für g?



Gegeben sei $f_t(x) = xe^{-tx^2} - tx,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$

a) Untersuchen Sie die Funktionen f_t auf Symmetrie, auf Asymptoten und Nullstellen. Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{3}}$.

b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung.

c) Die 2. Ableitung lautet: $f_t''(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$
An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)

d) Wie ist das a zu wählen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist?

e) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?

f) Ermitteln Sie die Ortskurve der Punkte $W_t\Big(-\sqrt{\frac{3}{2t}} \mid f\big(-\sqrt{\frac{3}{2t}}\,\big)\Big)$.

Gegeben sei $f_t(x) = xe^{-tx^2} - tx,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$

a) Untersuchen Sie die Funktionen f_t auf Symmetrie, auf Asymptoten und Nullstellen.
Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{3}}$.

$-f_t(-x) = f_t(x)$ Es liegt Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vor.
Asymptote: $y = -tx$
$x_1 = 0$ ist Nullstelle für alle $t > 0$.
Nur für $0 < t < 1$ existieren 2 weitere Nullstellen, beachte:
$e^{-tx^2} - t = 0,\quad x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{\ln t}{-t}}$, unter der Wurzel muss etwas Positives stehen.

b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung. $f_t'(x) = e^{-tx^2} - 2tx^2 \cdot e^{-tx^2} - t$

c) Die 2. Ableitung lautet: $f_t''(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$
An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)

$x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2t}}$

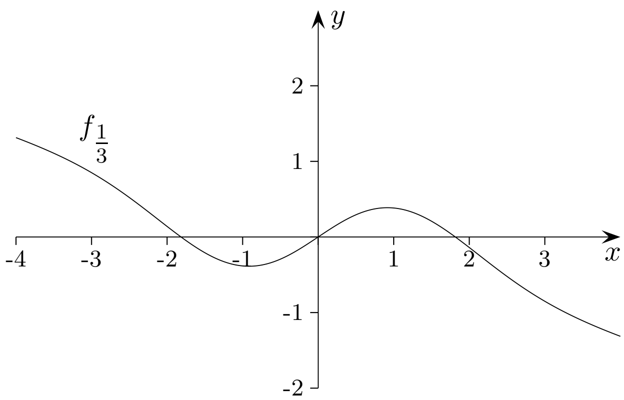
d) Wie ist das a zu wählen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist? $a = -\frac{1}{2t}$

e) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?

$y = (-e^{-1} - 1)(x + 1) - e^{-1} + 1$
$y = -xe^{-1} - 2e^{-1} - x$
$y = -(e^{-1} + 1)x - 2e^{-1}$

f) Ermitteln Sie die Ortskurve der Punkte $W_t\Big(\underbrace{-\sqrt{\tfrac{3}{2t}}}_{x} \mid f_t\big(-\sqrt{\tfrac{3}{2t}}\,\big)\Big)$.

$t = \frac{3}{2x^2},\quad h(x) = xe^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2x}$ Es reicht hier, $t = \frac{3}{2x^2}$ in $f_t(x)$ einzusetzen.



Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x},\ k > 0$.

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k.

c) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

d) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat, und geben Sie diesen an.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\big(2 - k \mid 2e^{k-2}\big)$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x},\ k > 0$.

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

$f'(x) = (1 - x - k)e^{-x},\ f''(x) = (-2 + x + k)e^{-x}$

Nullstelle $x = -k$, $Max\big(1 - k \mid e^{k-1}\big)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k. $g(x) = e^{-x}$

c) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

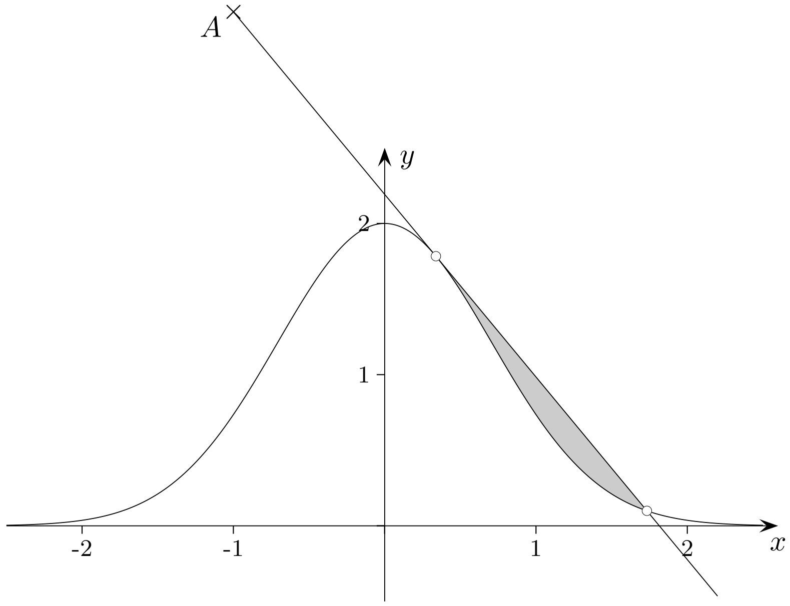
d) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an. $A = e^2$

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\big(2 - k \mid 2e^{k-2}\big)$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

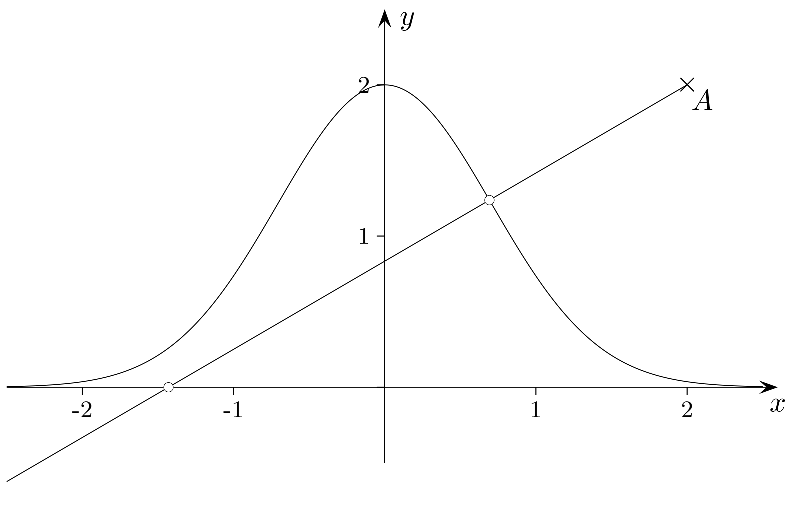
$A(k) = \frac{1}{2}(4 - k)^2 e^{k-2},\ \ k_{\max} = 2,\ \ A_{\max} = 2$

Tangente und Normalen

1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 \mid 3{,}4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?

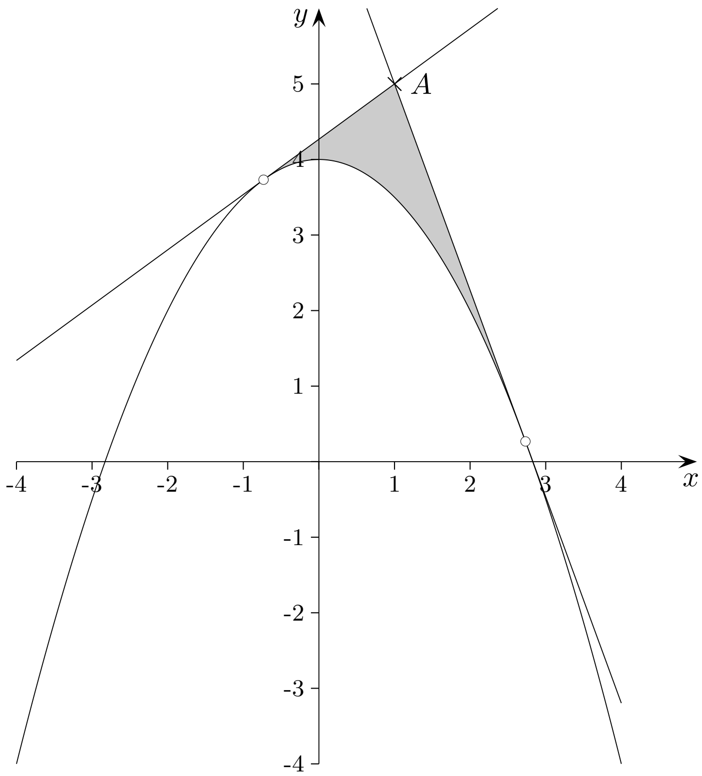


2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 \mid 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?



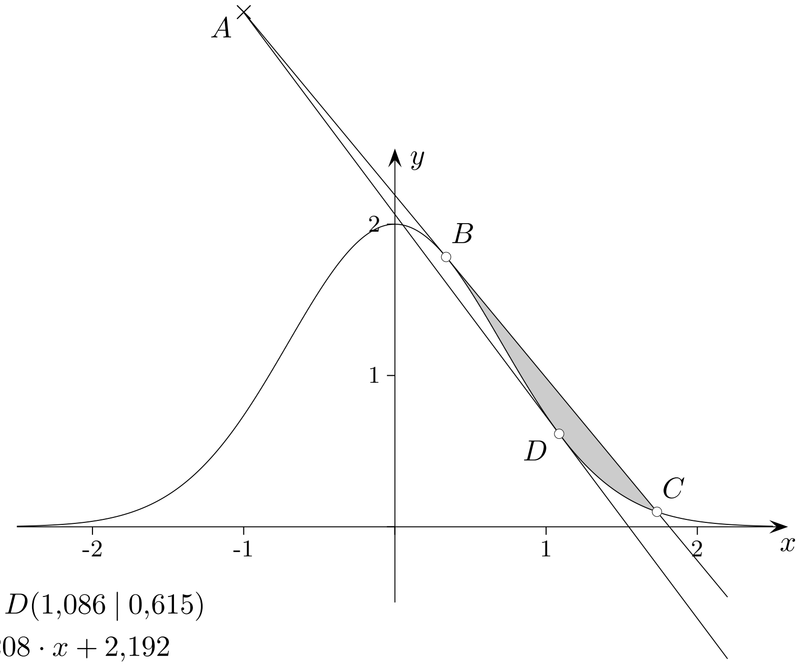
Tangenten

3. Durch den Punkt $A(1\,|\,5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
   Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



Tangente und Normalen

1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 \mid 3{,}4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?



$B(0{,}339 \mid 1{,}783)$, $C(1{,}733 \mid 0{,}099)$, $D(1{,}086 \mid 0{,}615)$

Tangente durch A und B: $y = -1{,}208 \cdot x + 2{,}192$

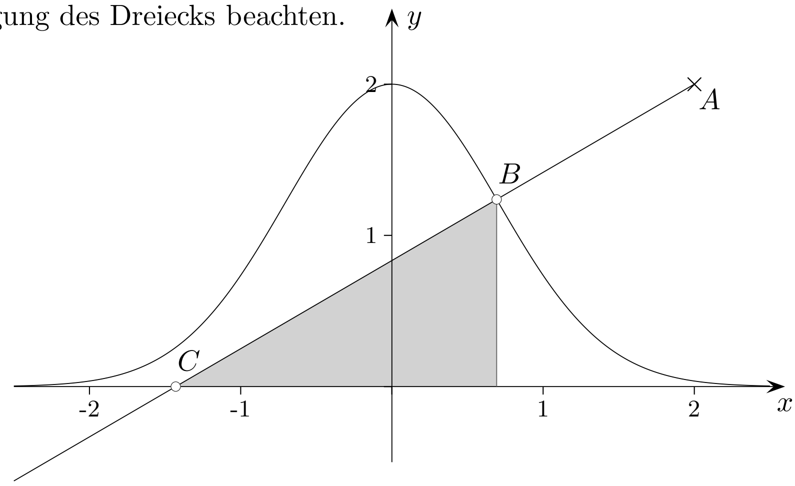
Tangente durch A und D: $y = -1{,}335 \cdot x + 2{,}065$

Flächeninhalt 0,218 (FE)

2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 \mid 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?

   Zeige, dass gilt: $|\overline{BC}| = f(x_B) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_B))^2}$

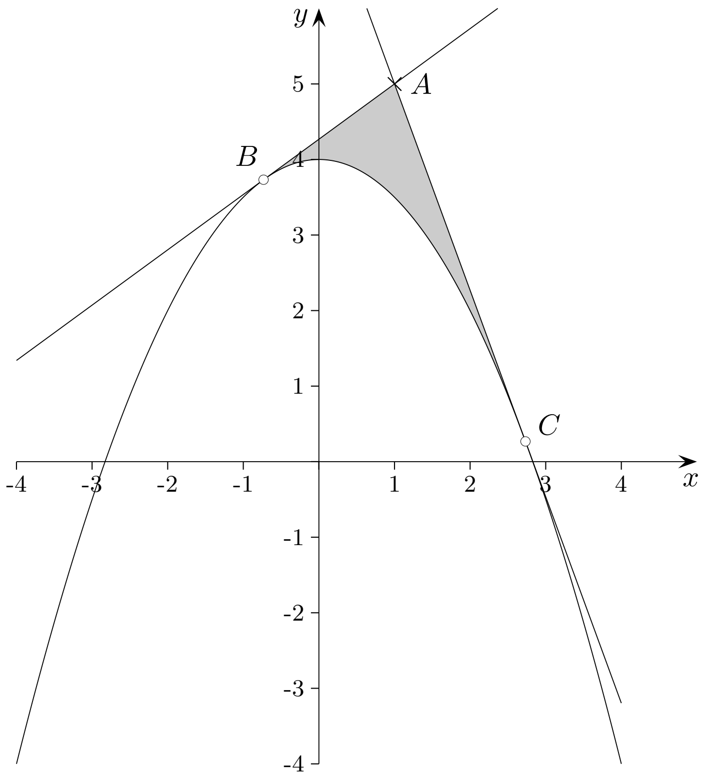
   Tipp: Satz des Pythagoras und Steigung des Dreiecks beachten.



$B(0{,}693 \mid 1{,}238)$, $C(-1{,}430 \mid 0)$

Normale durch A und B: $y = 0{,}583 \cdot x + 0{,}834$

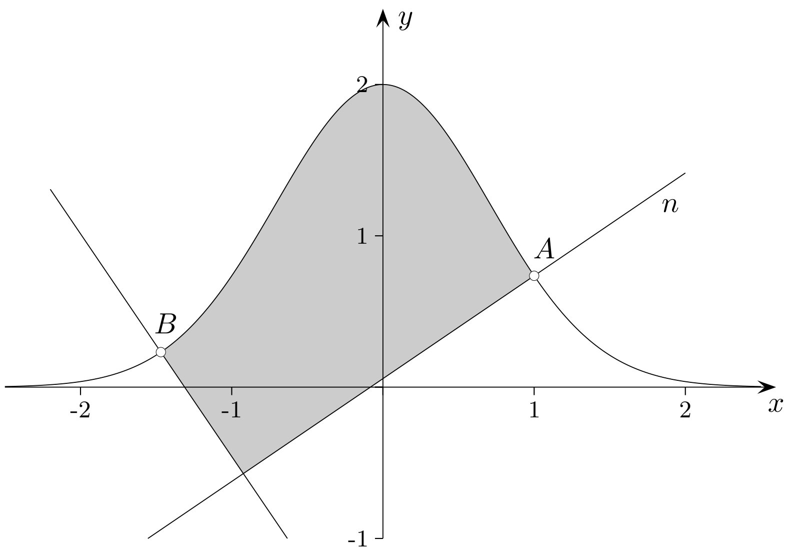
3. Durch den Punkt $A(1\mid 5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



$B(-0{,}732\mid 3{,}732)$, $C(2{,}732\mid 0{,}268)$
Tangente durch A und B: $y = 0{,}732 \cdot x + 4{,}268$
Tangente durch A und C: $y = -2{,}732 \cdot x + 7{,}732$
Flächeninhalt $2 \cdot 0{,}866 = 1{,}732$ (FE)

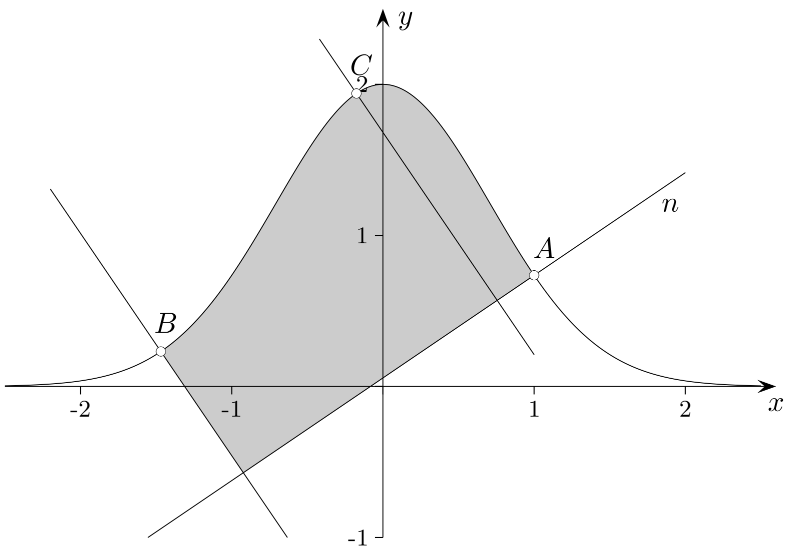
Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A\big(1 \mid 2e^{-1}\big)$.
Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B. Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche?
Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A\big(1 \mid 2e^{-1}\big)$.
   Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B. Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche?
   Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



$B(-1{,}469 \mid 0{,}231)$, $\quad C(-0{,}175 \mid 1{,}940)$

Normale durch A: $\quad y = 0{,}680 \cdot x + 0{,}056$

Normale durch B: $\quad y = -1{,}472 \cdot x - 1{,}930$

Schnittstelle $\quad x_s = -0{,}923$

Normale durch C: $\quad y = -1{,}472 \cdot x + 1{,}682$

Flächeninhalt 3,134 (FE)

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{a-x}$.
   Die erste Ableitung lautet: $f_a'(x) = (1-x) \cdot e^{a-x}$

   a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a auf Nullstellen, das Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte und bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. Skizzieren Sie die Graphen von f_3 und f_3'.

   b) Für welche x gilt: $f_a(x) > f_a'(x)$?

   c) Ermitteln Sie die Stelle $x > \frac{1}{2}$ des größtmöglichen Abstands der Punkte $A_a\big(x \mid f_a(x)\big)$ und $B_a\big(x \mid f_a'(x)\big)$ in Abhängigkeit von a.

2. Bei einer Kurvenschar haben die Hochpunkte die Koordinaten $H\big(\frac{2}{3}t \mid \frac{9}{2t}\big)$, $t \neq 0$.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.
   Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

3. Bei einer Kurvenschar haben die Wendepunkte die Koordinaten $W\big(\ln(\frac{t}{2}) \mid \frac{t^2}{4}\big)$, $t > 0$.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.
   Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

4. Dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist ein Rechteck größten Inhalts so einzubeschreiben, dass eine Seite auf der x-Achse liegt. Zeigen Sie, dass Eckpunkte in den Wendepunkten liegen.

Ergebnisse

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{a-x}$.
   Die erste Ableitung lautet: $f_a'(x) = (1-x) \cdot e^{a-x}$.

   a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a auf Nullstellen, das Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte und bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. Skizzieren Sie die Graphen von f_3 und f_3'.

   Nullstelle $x_N = 0$

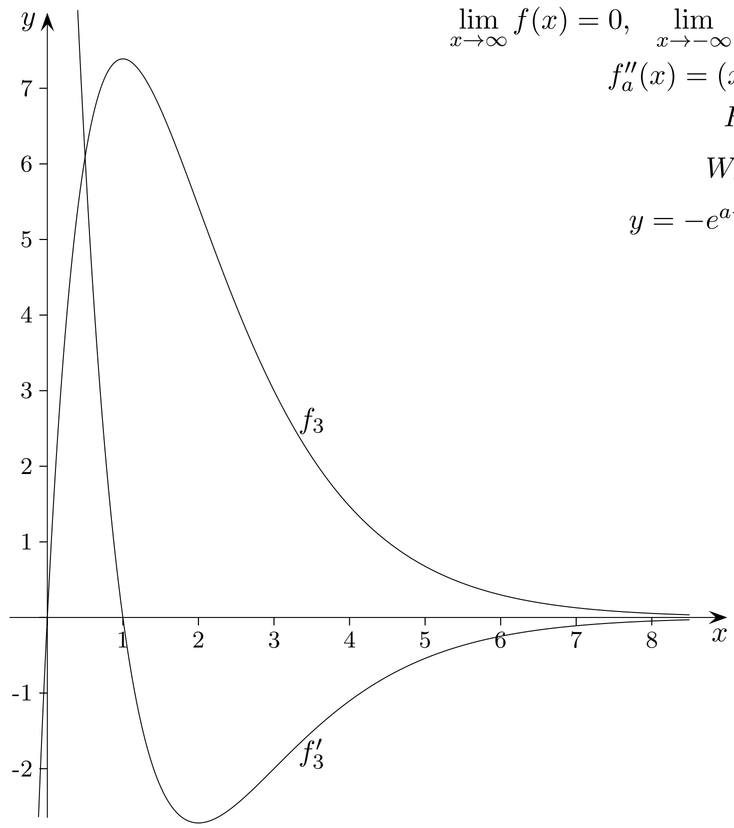
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

   $f_a''(x) = (x-2) \cdot e^{a-x}$

   $H_a\big(1 \mid e^{a-1}\big)$

   $W_a\big(2 \mid 2e^{a-2}\big)$

   $y = -e^{a-2}x + 4e^{a-2}$



   b) Für welche x gilt: $f_a(x) > f_a'(x)$? $\qquad x > \frac{1}{2}$

   c) Ermitteln Sie die Stelle $x > \frac{1}{2}$ des größtmöglichen Abstands der Punkte $A_a\big(x \mid f_a(x)\big)$ und $B_a\big(x \mid f_a'(x)\big)$ in Abhängigkeit von a.

   $d_a(x) = (2x-1) \cdot e^{a-x}$

   $d_a'(x) = (3-2x) \cdot e^{a-x}$

   $x_E = \frac{3}{2}$

2. Bei einer Kurvenschar haben die Hochpunkte die Koordinaten $H\big(\frac{2}{3}t \mid \frac{9}{2t}\big)$, $t \neq 0$.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.
   Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche). $\qquad y = \frac{3}{x}$

3. Bei einer Kurvenschar haben die Wendepunkte die Koordinaten $W\big(\ln(\frac{t}{2}) \mid \frac{t^2}{4}\big)$, $t > 0$.
   Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.
   Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche). $\qquad y = e^{2x}$

4. $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, siehe Seite 1

Gegeben seien die Funktionen $f_k(x) = (x+1) \cdot e^{-kx},\ x \in \mathbb{R},\ k > 0$.

a) In welchen Bereichen wachsen bzw. fallen deren Graphen?
Ermitteln Sie die Schnittstelle der Graphen von f_k und f_k'. Welche Stelle ergibt sich für $k \to 0$?
Untersuchen Sie, ob sich die Graphen für $k = 0{,}6226$ rechtwinklig schneiden.
Für welches k liegt an der Stelle $x = 0$ ein Extremum vor?

Für das Folgende sei $k = 1$.

b) Die Parallele zur y-Achse $x = u$, $u \geq 0$, schneidet die Graphen von f und f'.
Für welches u ist der Abstand der beiden Schnittpunkte maximal?

c) Der Graph von f' schließt mit der x-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein.
Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt?

Gegeben seien die Funktionen $f_k(x) = (x+1) \cdot e^{-kx},\ x \in \mathbb{R},\ k > 0.$

a) In welchen Bereichen wachsen bzw. fallen deren Graphen? $f'(x) = (-kx + 1 - k) \cdot e^{-kx}$

für $x \leq \frac{1-k}{k}$ monoton steigend, für $x \geq \frac{1-k}{k}$ monoton fallend

Ermitteln Sie die Schnittstelle der Graphen von f_k und f_k'. Welche Stelle ergibt sich für $k \to 0$?

$x_S = -\frac{k}{1+k},\quad x = 0$

Untersuchen Sie, ob sich die Graphen für $k = 0{,}6226$ rechtwinklig schneiden.
Für welches k liegt an der Stelle $x = 0$ ein Extremum vor? $k = 1$

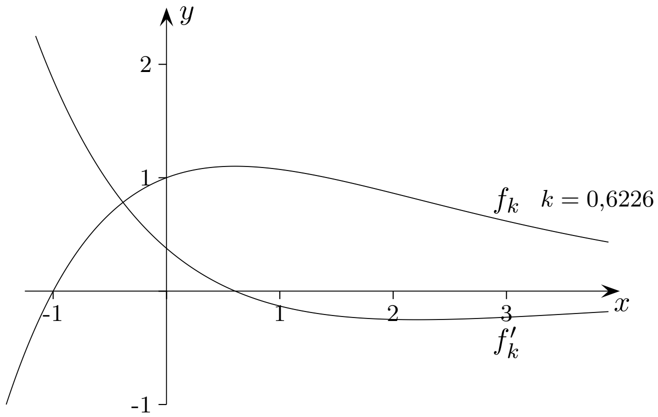
Für das Folgende sei $k = 1$.

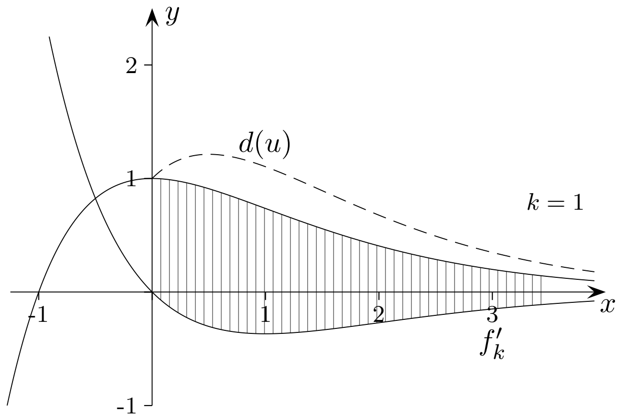
b) Die Parallele zur y-Achse $x = u$, $u \geq 0$, schneidet die Graphen von f und f'.
Für welches u ist der Abstand der beiden Schnittpunkte maximal? $d(u) = (2u+1) \cdot e^{-u}$

$u_{\max} = 0{,}5$

c) Der Graph von f' schließt mit der x-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein.
Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt? $A(u) = |\,(u+1) \cdot e^{-u} - 1\,|$

$\lim\limits_{u\to\infty} A(u) = 1$





Saarland 2005 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2\right),\ x \in \mathbb{R}$$

b) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar stets genau einen Punkt gemeinsam haben.

c) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse und auf Extrempunkte (zur Kontrolle: Maximumstelle bei $2a$).

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Maxima der Schar liegen.

e) Zeigen Sie, dass bei jeder Scharkurve die Maximumstelle in der Mitte zwischen den beiden Wendestellen liegt.

f) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f_a in Abhängigkeit von a.

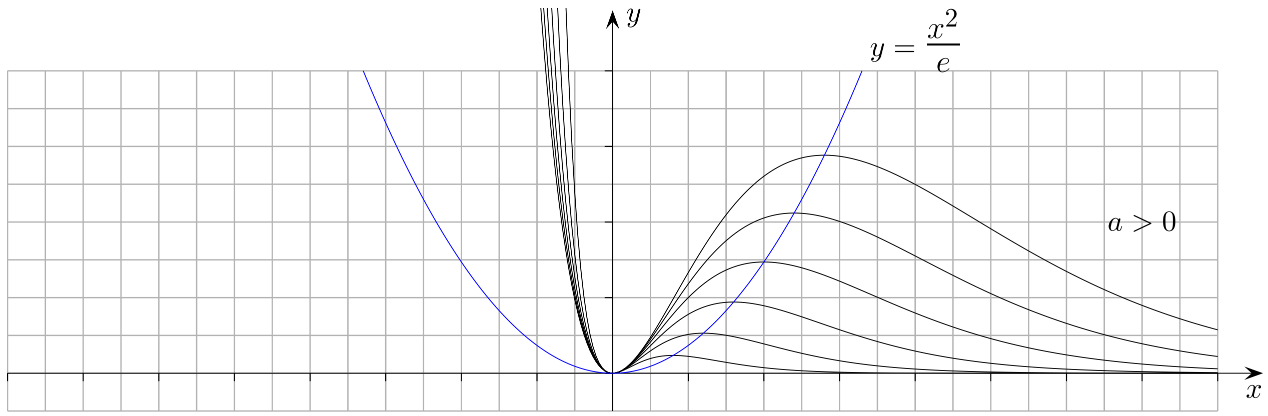
g) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente besitzt, die parallel zur x-Achse verläuft.

h) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

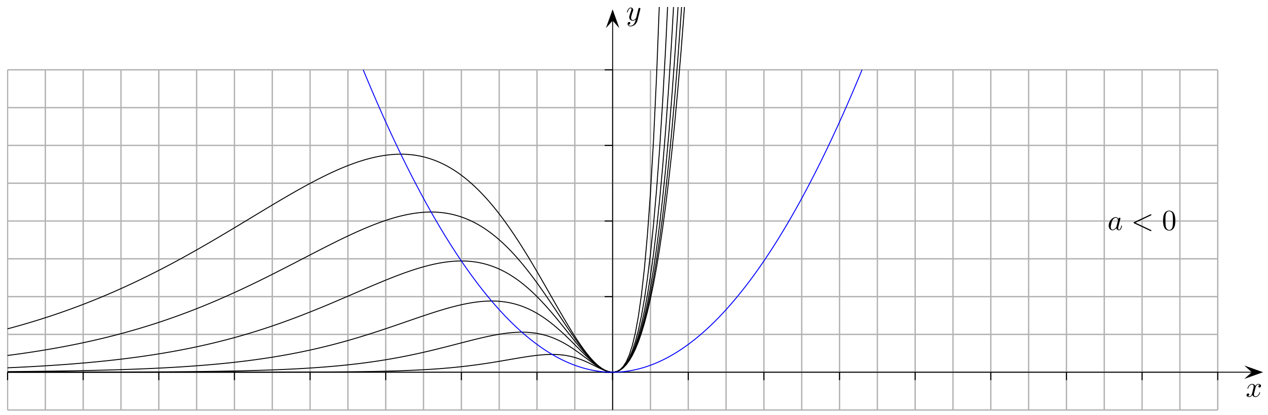
i) Zeigen Sie, dass

$F_1(x) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f_1 ist.

Berechnen Sie die Maßzahl der ins Unendliche reichenden Fläche, die vom Graph der Funktion f_1 und der positiven x-Achse begrenzt wird.



y
$y = \frac{x^2}{e}$
$a > 0$
x



y
$a < 0$
x

Saarland 2005 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}},\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2\right),\ x \in \mathbb{R} \qquad f_a'(x) = e^{1-\frac{x}{a}}\left(2x - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

b) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar stets genau einen Punkt gemeinsam haben. $O(0 \mid 0)$

c) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse und auf Extrempunkte (zur Kontrolle: Maximumstelle bei $2a$). $x = 0$; $Min(0 \mid 0)$; $Max\left(2a \mid 4a^2 e^{-1}\right)$

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Maxima der Schar liegen. $y = x^2 e^{-1}$

e) Zeigen Sie, dass bei jeder Scharkurve die Maximumstelle in der Mitte zwischen den beiden Wendestellen liegt. $x_{W_{1/2}} = 2a \pm \sqrt{2}a$

f) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f_a in Abhängigkeit von a. z. B. $a > 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = 0$

g) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente besitzt, die parallel zur x-Achse verläuft. $a = 1$

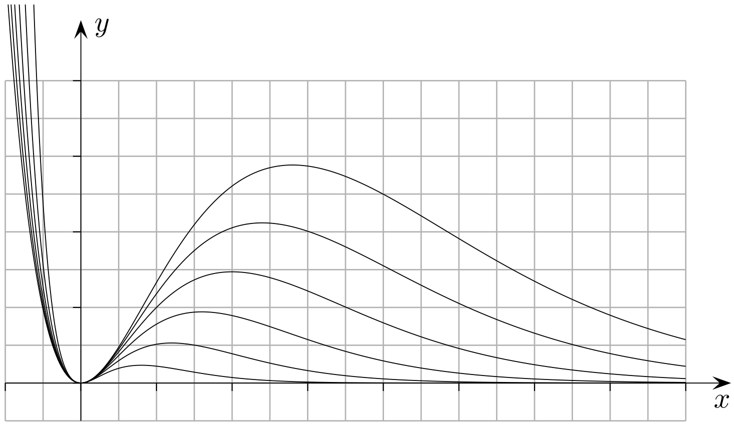
h) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

i) Zeigen Sie, dass

$F_1(x) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f_1 ist. $F_1'(x) = f_1(x)$

Berechnen Sie die Maßzahl der ins Unendliche reichenden Fläche, die vom Graph der Funktion f_1 und der positiven x-Achse begrenzt wird. $A = 2e$

Wendepunkte

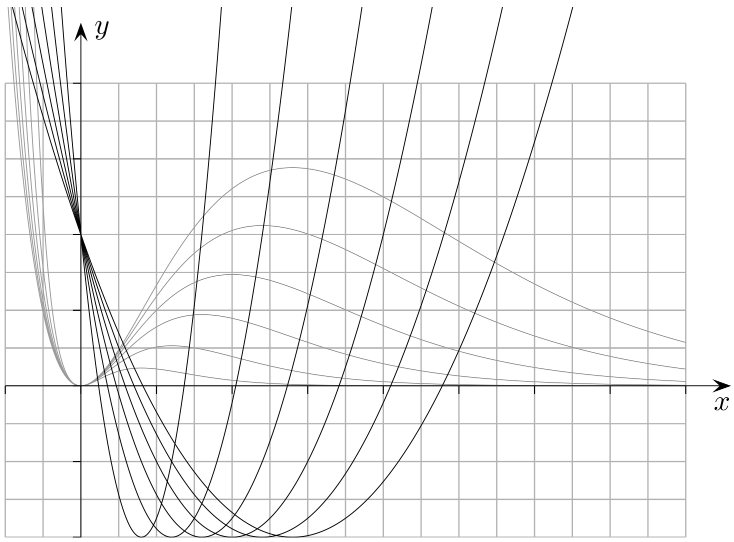


Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0.$

Die 2. Ableitung lautet:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}} \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2\right)}_{\text{Polynom 2. Grades}}$$

Um nachzuweisen, dass an den Stellen $x_{1/2} = (2 \pm \sqrt{2})a$ Wendepunkte vorliegen (notw. Bed. $f_a''(x) = 0$), ist davon abzuraten, die 3. Ableitung heranzuziehen.
Ein Wendepunkt ist ein Punkt des Funktionsgraphen, an dem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert. Zwischen Tief- (Linkskurve) und Hochpunkt (Rechtskurve) muss daher ein Wendepunkt vorliegen. Da die x-Achse hier Asymptote ist, muss sich die Krümmung nach dem Hochpunkt noch einmal ändern. Es können auch nicht mehr als 2 Wendepunkte vorliegen, da ein Polynom 2. Grades (Parabel) maximal 2 Nullstellen hat.
Alternativ kann auf den Vorzeichenwechsel jeweils an beiden Nullstellen der Parabeln hingewiesen werden, da stets gilt: $e^{1-\frac{x}{a}} > 0$



Saarland 2001 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = a(ax+1)e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = a^3(ax-1)e^{-ax}$$

b) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.

c) Diskutieren Sie die Funktion $f\colon\ x \longrightarrow (x+1)e^{-x}$.

d) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.

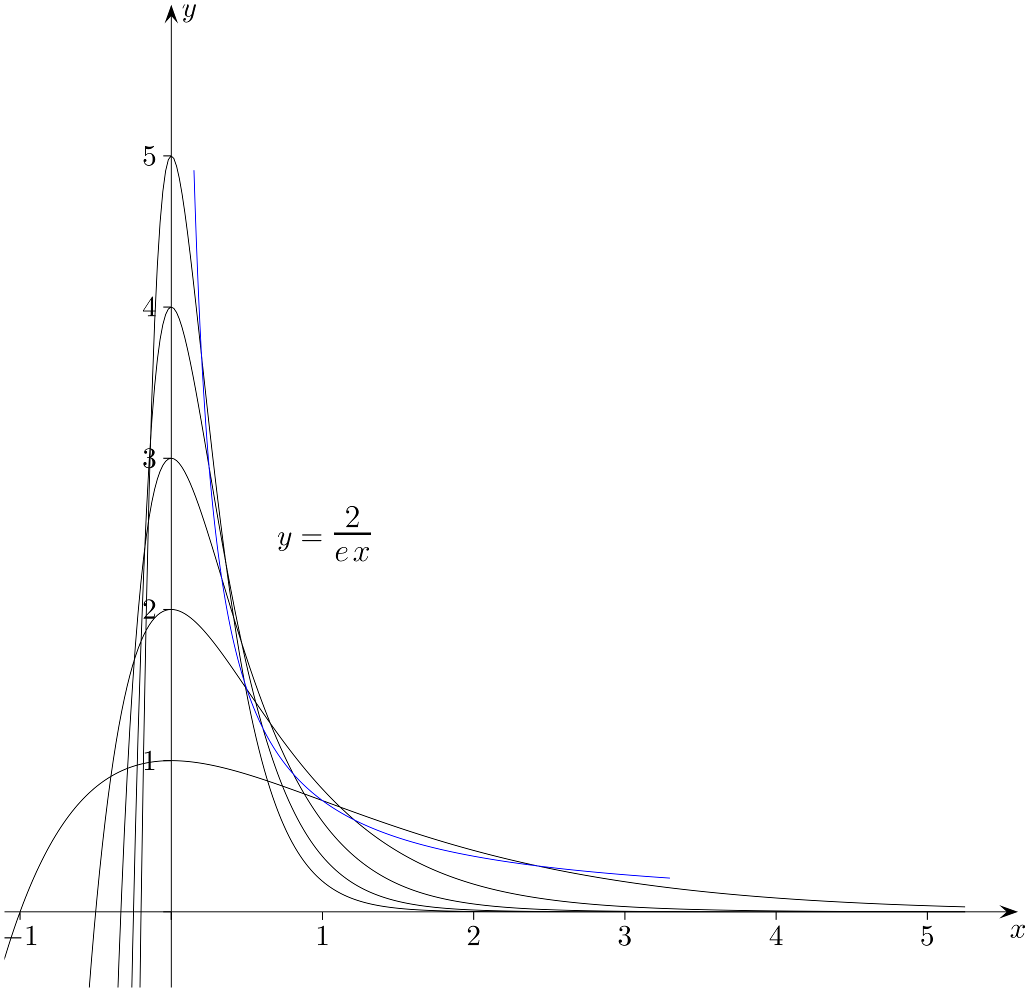
f) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a. Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

$\Big[$Zur Kontrolle: t: $\quad y = -\dfrac{a^2}{e}x + \dfrac{3a}{e}$ $\Big]$

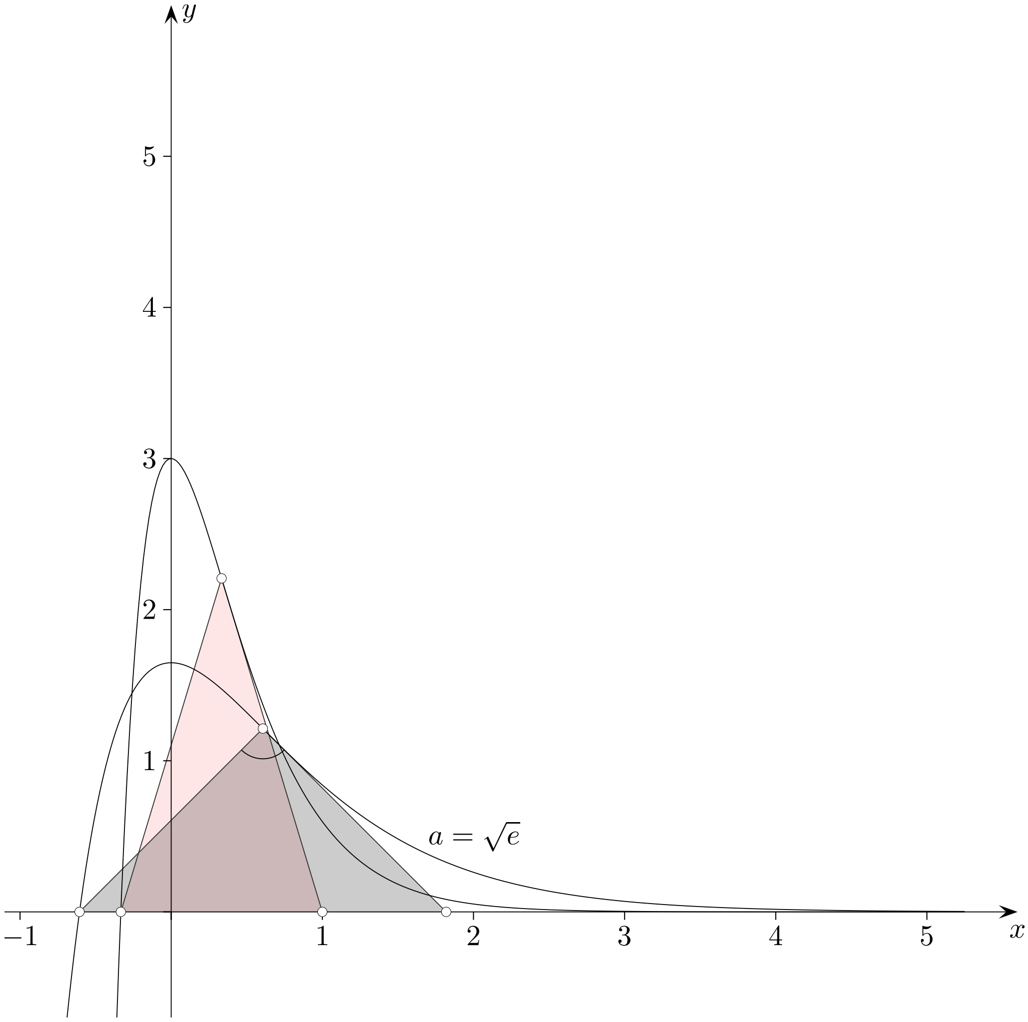
g) Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x-Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x-Achse bilden ein Dreieck.

Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist.



y
5
4
3
2
1
$y = \frac{2}{e\,x}$
−1
1
2
3
4
5
x



y
5
4
3
2
1
−1
1
2
3
4
5
x
$a = \sqrt{e}$

Saarland 2001 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = a\,(ax+1)\,e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$f''_a(x) = a^3\,(ax-1)\,e^{-ax}$ $\qquad$ $f'_a(x) = -a^3 x e^{-ax}$

b) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt. $\quad x_w = \frac{1}{a}, \quad a = 1$

c) Diskutieren Sie die Funktion $f\colon\ x \longrightarrow (x+1)\,e^{-x}$. $\quad x_N = -1;\ Max(0 \mid 1);\ W\big(1 \mid 2e^{-1}\big);\ \ldots$

d) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an. $\quad A = e$

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen. $\quad W\big(\frac{1}{a} \mid \frac{2a}{e}\big)$

$y = \frac{2}{ex}$

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a. Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

$\big[$Zur Kontrolle: t: $\quad y = -\frac{a^2}{e}x + \frac{3a}{e}\ \big]$ $\qquad A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{e}\cdot\frac{3}{a} = \frac{9}{2e}$

g) Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x-Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x-Achse bilden ein Dreieck.

Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. $\quad x_{N_a} = -\frac{1}{a};\ x_{W_a} = \frac{1}{a};\ x_{S_a} = \frac{3}{a}$

Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist. $\quad f'_a(\frac{1}{a}) = -1;\ a = \sqrt{e}$

Saarland 2004 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = -2(x-a)e^{-(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Extrempunkt auf der y-Achse liegt.

b) Diskutieren Sie die Funktion $f\colon\ x \longrightarrow -2(x+1)e^{-x-1}$.

c) Untersuchen Sie, ob b und c so bestimmt werden können, dass $F(x) = (bx+c)e^{-x-1}$ eine Stammfunktion von f ist.

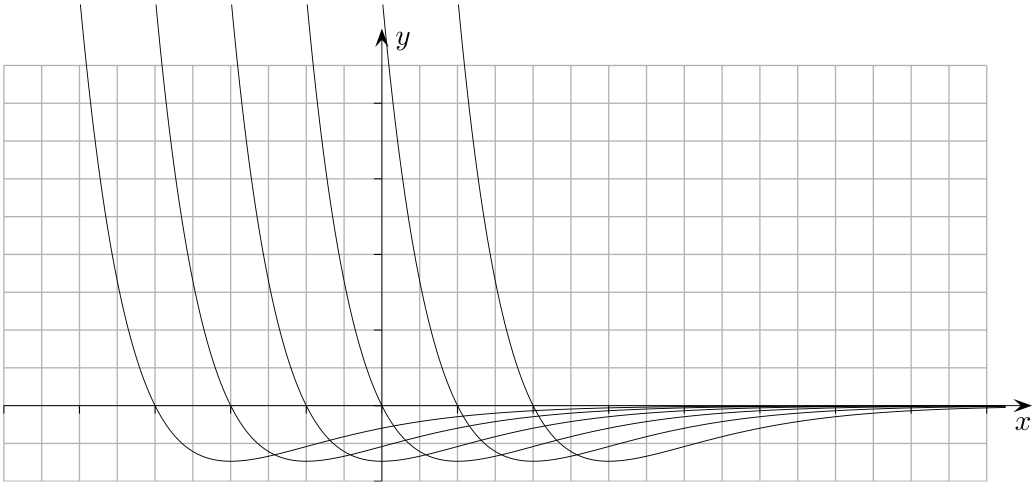
d) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt $P(3 \mid 0)$ an den Graphen von f.

Gegeben ist nun die Funktion $g(x) = 2e^{-x-1}$.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s \mid y_s)$ der Graphen von f und g und zeichnen Sie beide Graphen.

g) Die Punkte $A(x \mid g(x))$ und $B(x \mid f(x))$ sind Punkte auf dem Graphen von g bzw. von f, wobei $x \geq x_s$. Bestimmen Sie x so, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist.



Die Graphen gehen durch Verschiebung auseinander hervor.

Saarland 2004 *(abgeändert)*

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = -2(x-a)e^{-(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Extrempunkt auf der y-Achse liegt.

$$f_a'(x) = (2x - 2a - 2)e^{-(x-a)}, \quad E\big(1+a \mid -2e^{-1}\big), \quad a = -1$$

b) Diskutieren Sie die Funktion $f\colon\ x \longrightarrow -2(x+1)e^{-x-1}$. $x_N = -1$; $Min\big(0 \mid -2e^{-1}\big)$; $W\big(1 \mid -4e^{-2}\big)$; ...

c) Untersuchen Sie, ob b und c so bestimmt werden können, dass $F(x) = (bx+c)e^{-x-1}$ eine Stammfunktion von f ist. $\quad -2(x+1) = b - bx - c \quad \Longrightarrow \quad b = 2,\ c = 4$

d) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an. $\quad A = |-2|$

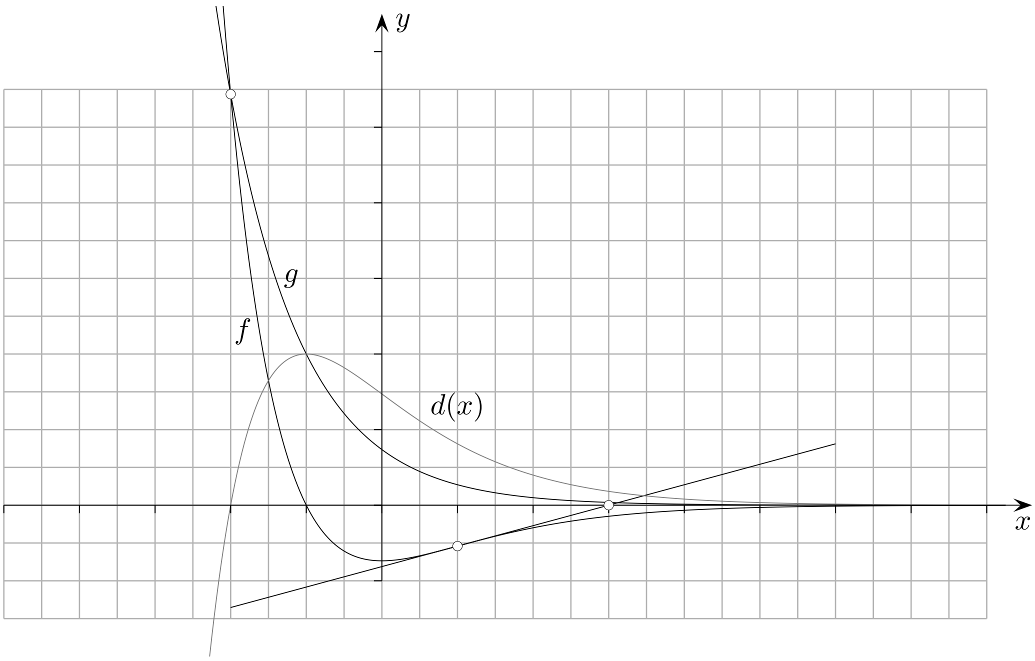
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt $P(3 \mid 0)$ an den Graphen von f.

$$y = 2e^{-2}x - 6e^{-2}$$

Gegeben ist nun die Funktion $g(x) = 2e^{-x-1}$.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s \mid y_s)$ der Graphen von f und g und zeichnen Sie beide Graphen. $\quad S(-2 \mid 2e)$

g) Die Punkte $A(x \mid g(x))$ und $B(x \mid f(x))$ sind Punkte auf dem Graphen von g bzw. von f, wobei $x \geq x_s$. Bestimmen Sie x so, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist. $\quad d_{\max} = 2$ an der Stelle $x = -1$



Ableitungen Übung

1. $f(x) = 2x \cdot e^{-kx}$ $\qquad f'(x) = ?$

2. $f(x) = 0{,}3 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$

3. $f(x) = 5(1-x) \cdot e^{2-x}$

4. $f(x) = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}})$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx+1}$

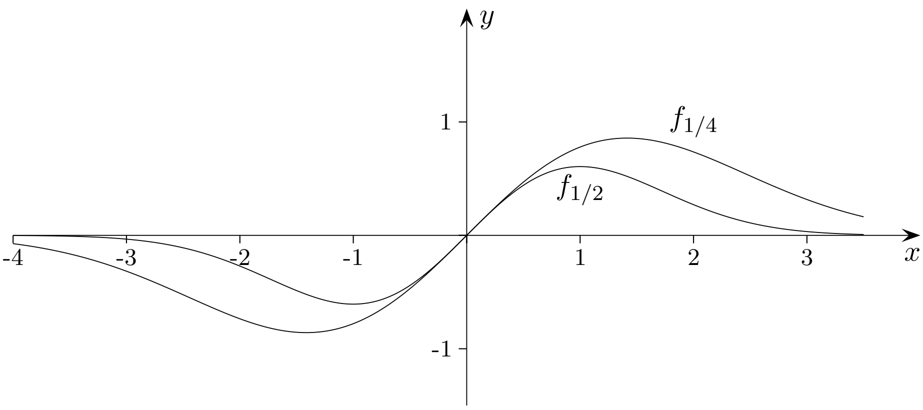
6. $f(x) = (x^2 - k) \cdot e^{-2x}$

7. $f(x) = 4e^{\frac{x}{k}+k}$

8. $f(x) = 40\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2$

Ableitungen Übung

1.	$f(x) = 2x \cdot e^{-kx}$	$f'(x) = 2(1 - kx) \cdot e^{-kx}$
2.	$f(x) = 0{,}3 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$	$f'(x) = (0{,}6x - 0{,}06x^2) \cdot e^{-0{,}2x}$
3.	$f(x) = 5(1 - x) \cdot e^{2-x}$	$f'(x) = 5(x - 2)e^{2-x}$
4.	$f(x) = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}})$	$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$
5.	$f(x) = x^2 \cdot e^{-kx+1}$	$f'(x) = x(2 - kx)e^{-kx+1}$
6.	$f(x) = (x^2 - k) \cdot e^{-2x}$	$f'(x) = 2(-x^2 + x + k)e^{-2x}$
7.	$f(x) = 4e^{\frac{x}{k}+k}$	$f'(x) = \frac{4}{k}e^{\frac{x}{k}+k}$
8.	$f(x) = 40\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2$	$f'(x) = \frac{16}{5}\left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)e^{-\frac{1}{25}x}$



1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx^2}, \;\; x \in \mathbb{R}, \; k > 0.$

   Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden:

   $$f_k''(x) = 2kx(2kx^2 - 3) \cdot e^{-kx^2}$$

   a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung gilt:

   $$f_k'(x) = (1 - 2kx^2) \cdot e^{-kx^2}$$

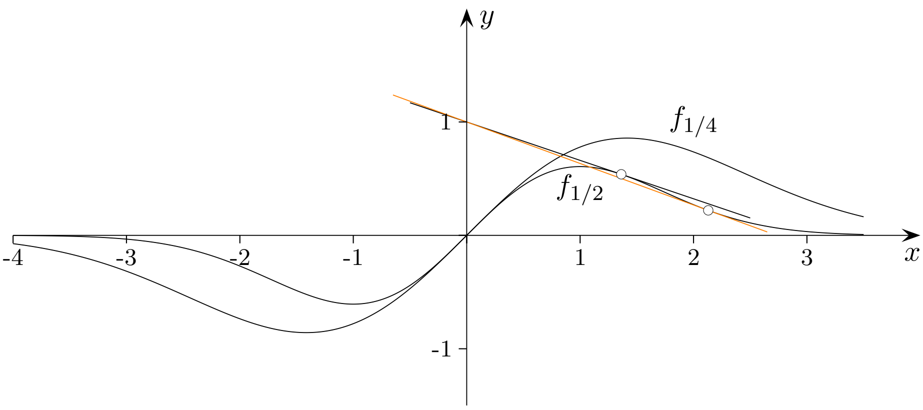
   Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von f_k.
   Ermitteln Sie die Extrema. Auf welcher Ortskurve liegen sie?
   Untersuchen Sie, ob es eine Gerade gibt, die Tangente an alle Graphen von f_k ist.
   Untersuchen Sie, ob es möglich ist, den Parameter k so zu wählen, dass der Graph von f_k den Punkt $H\big(2 \mid \frac{2}{\sqrt{3}}\big)$ als Hochpunkt hat.
   Begründen Sie, dass der Graph von f_k drei Wendepunkte hat.

   b) Ermitteln Sie a so, dass $F_k(x) = a \cdot e^{-kx^2}$ jeweils eine Stammfunktion von f_k ist.

   Ermitteln Sie auf 3 Nachkommastellen genau den Wert für dasjenige k,

   für das gilt: $\displaystyle\int_0^2 f_k(x)\,dx = 1$

   c) Sei für diese Teilaufgabe $k = \frac{1}{2}$. Ermitteln Sie eine Stelle (auf der x-Achse), für die die zugehörige Tangente die y-Achse bei $y = 1$ schneidet.
   Beantworten Sie begründet anhand des Funktionsgraphen von $f_{1/2}$ die Frage, ob es mehrere dieser Stellen gibt.



1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

   Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden:

   $$f_k''(x) = 2kx(2kx^2 - 3) \cdot e^{-kx^2}$$

   a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung gilt:

   $$f_k'(x) = (1 - 2kx^2) \cdot e^{-kx^2}$$

   Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von f_k. Graphen punktsymmetrisch
   Ermitteln Sie die Extrema. Auf welcher Ortskurve liegen sie? $E\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \mid \pm \frac{1}{\sqrt{2ke}}\right)$, $y = \frac{1}{\sqrt{e}}x$
   Untersuchen Sie, ob es eine Gerade gibt, die Tangente an alle Graphen von f_k ist. $y = x$
   Untersuchen Sie, ob es möglich ist, den Parameter k so zu wählen, dass der Graph von f_k den Punkt $H\left(2 \mid \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ als Hochpunkt hat. nicht möglich
   Begründen Sie, dass der Graph von f_k drei Wendepunkte hat. siehe S. 24

   b) Ermitteln Sie a so, dass $F_k(x) = a \cdot e^{-kx^2}$ jeweils eine Stammfunktion von f_k ist. $a = -\frac{1}{2k}$
   Ermitteln Sie auf 3 Nachkommastellen genau den Wert für dasjenige k,
   für das gilt: $\int_0^2 f_k(x)\, dx = 1$ …, $2k = 1 - e^{-4k}$, GTR, $k = 0{,}398$

   c) Sei für diese Teilaufgabe $k = \frac{1}{2}$. Ermitteln Sie eine Stelle (auf der x-Achse) … $e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^3 = 1$
   für die die zugehörige Tangente die y-Achse bei $y = 1$ schneidet. $x_1 = 1{,}363$, $x_2 = 2{,}130$
   Beantworten Sie begründet anhand des Funktionsgraphen von $f_{1/2}$ die Frage, ob es mehrere dieser Stellen gibt. vor und nach der Wendestelle …

Gegeben sei $f(x) = 4xe^{-2x+1}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x - 1) \cdot e^{-2x+1}$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Stammfunktion an, die durch den Ursprung verläuft und skizzieren Sie ihren Graphen.

c) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der positiven x-Achse und dem Graphen von f nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\big(1 \mid 4e^{-1}\big)$.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Tangente im Punkt W, und der x-Achse umschlossen wird und sich nicht ins Unendliche ausdehnt. (GTR)

Gegeben sei $f(x) = 4xe^{-2x+1}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und auf das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

$$f'(x) = (4 - 8x)e^{-2x+1},\ f''(x) = 16(x-1)e^{-2x+1}$$

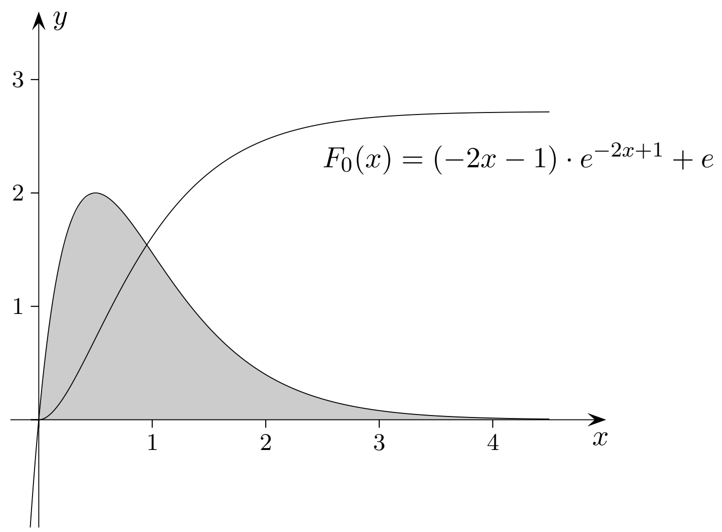
$$\text{Nullstelle } x = 0,\ Max(\tfrac{1}{2} \mid 2),\ W(1 \mid \tfrac{4}{e})$$

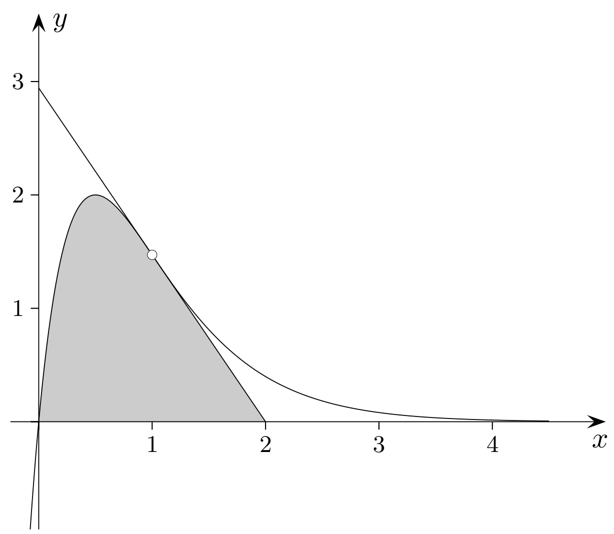
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x-1)\cdot e^{-2x+1}$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Stammfunktion an, die durch den Ursprung verläuft und skizzieren Sie ihren Graphen.

c) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der positiven x-Achse und dem Graphen von f nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an. $A = e$

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W\left(1 \mid 4e^{-1}\right)$. $y = -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e}$
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Tangente im Punkt W, und der x-Achse umschlossen wird und sich nicht ins Unendliche ausdehnt. (GTR) $B = e - \frac{1}{e} = 2{,}350$





Weiteres

e-Funktionen 2