

1. e-Funktionen $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
2. $f(x) = 2e^x - k e^{2x}$, $k > 0$
3. $f(x) = x e^{-x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{e} \cdot x$, $g(x) = \frac{1}{e} \cdot x + e^{1-x}$
5. $f_t(x) = e^x(e^x - t)$
6. Funktionsterm für g
7. $f_t(x) = x e^{-tx^2} - tx$
8. $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$
9. Tangente und Normale
10. Tangenten
11. Normalen
12. $f_a(x) = x \cdot e^{a-x}$ weitere Aufgaben
13. $f_k(x) = (x + 1) \cdot e^{-kx}$
14. $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$ Saarland 2005
15. $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$ Wendepunkte
16. $f_a(x) = a(ax + 1)e^{-ax}$ Saarland 2001
17. $f_a(x) = -2(x - a)e^{-(x-a)}$ Saarland 2004
18. Ableitungen Übung
19. Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx^2}$
20. $f(x) = 4x e^{-2x+1}$

↑ e-Funktionen $f(x) = e^{-x^2}$

1. Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch, da $f(-x) = f(x)$.

2. Nullstellen:

Bed.: $f(x) = 0$

Es sind keine Nullstellen vorhanden, da e^x stets positiv ist.

3. Extrema:

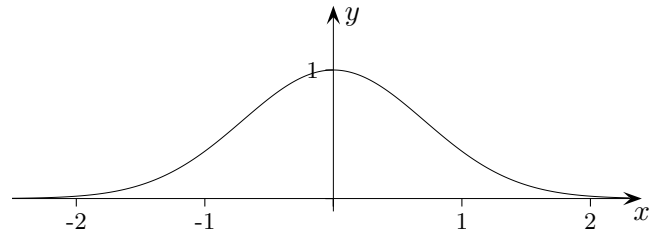
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} & f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \\ x &= 0 & f''(0) &= -2 \quad \text{Max}(0 \mid 1) \end{aligned}$$

4. Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Auch ohne die 2. Ableitung wäre nun zu erkennen, dass $E(0 \mid 1)$ ein Maximum sein muss.



5. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & W_{1/2} &= \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \end{aligned}$$

Die Existenz der Wendepunkte folgt aus dem Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$.

Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Nullstellen:

Bed.: $f(x) = 0$

$$x = 0$$

2. Extrema:

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(2x - x^2) & f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \\ x_1 &= 0 & f''(0) &= 2 \quad \text{Min}(0 \mid 0) \\ x_2 &= 2 & f''(2) &< 0 \quad \text{Max}(2 \mid \frac{4}{e^2}) \end{aligned}$$

3. Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

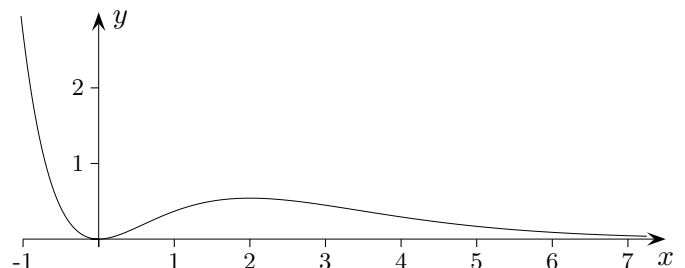
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

4. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Begründung für die Existenz der Wendepunkte ...



↑ Funktion $f(x) = 2e^x - k e^{2x}$, $k > 0$

1. Nullstellen

2. Extrema

3. Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$

4. Wendepunkte

5. Sei $k = 1$

Parabel durch $\text{Max}(0 | 1)$

mit bestmöglicher Approximation

↑ Funktion $f(x) = 2e^x - k e^{2x}$, $k > 0$

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2e^x - k e^{2x} &= 0 \\ e^x(2 - k e^x) &= 0 \\ 2 - k e^x &= 0 \\ x &= \ln \frac{2}{k} \end{aligned}$$

2. Extrema:

$$\begin{aligned} \text{notw. Bed.: } f'(x) &= 0 \\ f'(x) &= 2e^x - 2k e^{2x} & f''(x) &= 2e^x - 4k e^{2x} \\ x &= \ln \frac{1}{k} & f''(\ln \frac{1}{k}) &= -\frac{2}{k} < 0 \end{aligned} \quad \text{Max}(\ln \frac{1}{k} \mid \frac{1}{k})$$

3. Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^x - k e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x(2 - k e^x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - k e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(2 - k e^x) = 0 \end{aligned}$$

4. Wendepunkte:

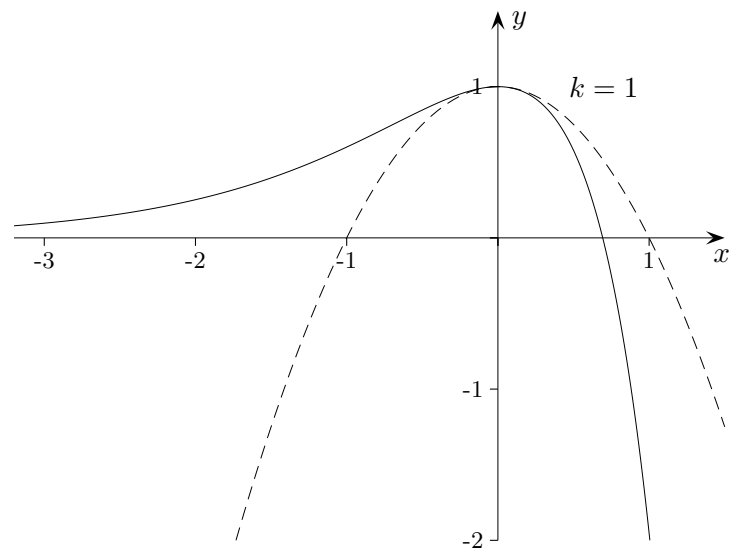
$$\begin{aligned} \text{notw. Bed.: } f''(x) &= 0 \\ f''(x) &= 2e^x - 4k e^{2x} \\ x &= \ln \frac{1}{2k} & W(\ln \frac{1}{2k} \mid \frac{3}{4k}) \end{aligned}$$

Die Existenz des Wendepunkts folgt aus dem Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.

5. Sei $k = 1$

Parabel durch $\text{Max}(0 \mid 1)$
mit bestmöglicher Approximation:

$$\begin{aligned} g(x) &= -a x^2 + 1 \\ \text{Bed.: } f''(0) &= g''(0) \\ -2 &= -2a \\ &\implies a = 1 \\ g(x) &= -x^2 + 1 \end{aligned}$$



↑

↑ Funktion $f(x) = x e^{-x^2}$

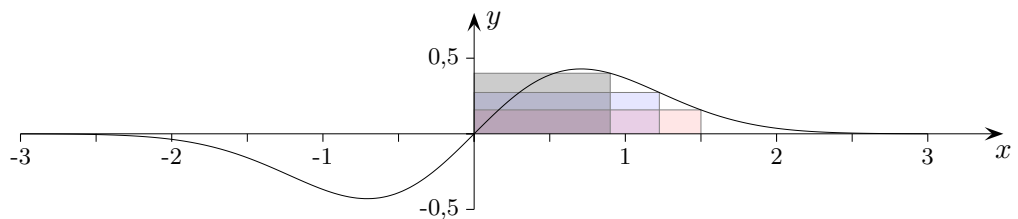
1. Wie lauten die Nullstellen, die Extrema und die x -Koordinaten der Wendepunkte?
2. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.
4. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an.

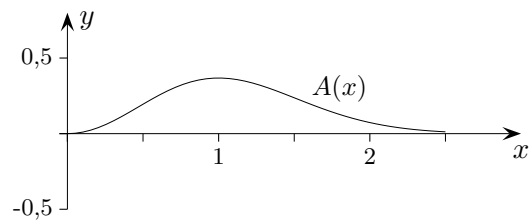
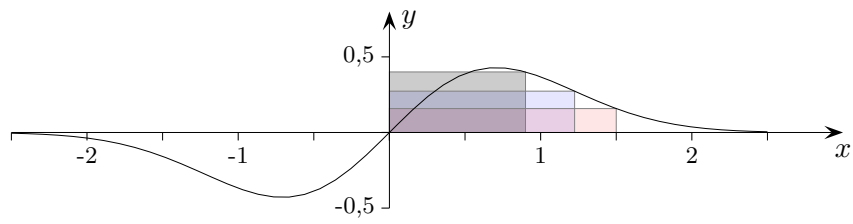
zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^3 - 6x) \cdot e^{-x^2}$,

$Max\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$, $Min\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$,

$W_1(0 \mid 0)$, $W_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid \dots\right)$, $W_3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid \dots\right)$,

5. Welches Rechteck (diagonale Eckpunkte im Ursprung und auf dem Graphen, siehe Grafik) hat maximalen Flächeninhalt?



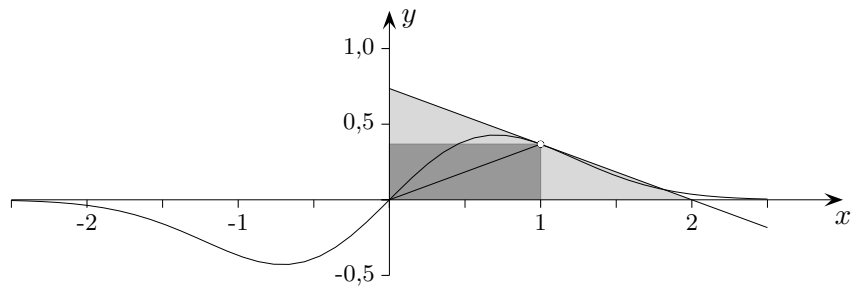


$$A(x) = x \cdot f(x)$$

$$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Maximum an der Stelle $x = 1$

Begründung: $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0 \dots$



allgemeiner Zusammenhang:

Tangente an der Stelle $x = 1$: $t(x) = -e^{-1}(x - 1) + e^{-1}$

$$A'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) + x \cdot f'(x) = 0, \quad x_0 = 1$$

$$f'(x_0) = -\frac{f(x_0)}{x_0} \quad \Longrightarrow \quad t(0) = 2 \cdot f(x_0)$$

An der Stelle des Maximums gilt:

Der y -Achsenabschnitt der Tangente ist doppelt so groß wie der Funktionswert.

Die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ und $g(x) = \frac{1}{e} \cdot x + e^{1-x}$

schließen mit der y -Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche endlichen Inhalts A ein. Bestimmen Sie A (ohne GTR). Wie groß müsste eine rechte Grenze z für die Fläche gewählt werden, damit schon 99% von A erreicht würden? (ohne GTR)

Ergebnisse:

$$A = e$$

$$z = -\ln 0,01 = 4,605$$

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = e^x(e^x - t)$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Ermitteln Sie ohne GTR die Nullstellen und Extrema (x - und y -Koordinate) (Begründung Min/Max ohne die 2. Ableitung).

Für jedes $t > 0$ ist ein Punkt $P_t\left(\ln \frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$ gegeben.

- b) Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_t ?
- c) Gibt es einen Punkt P_t , der dem Ursprung am nächsten liegt? (mit GTR-Einsatz, jedoch kein Probieren) Wenn ja, welcher? (x - und y -Koordinate)

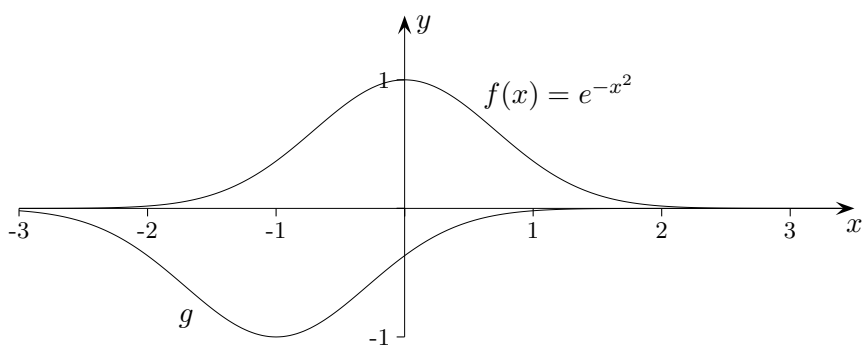
- a) Nullstelle $x = \ln t$

$$\text{Min}\left(\ln \frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right)$$

- b) $y = -e^{2x}$

- c) $P_{1,34}(-0,4 \mid -0,44)$

Wie lautet ein Funktionsterm für g ?



Gegeben sei $f_t(x) = xe^{-tx^2} - tx$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

- a) Untersuchen Sie die Funktionen f_t auf Symmetrie, auf Asymptoten und Nullstellen. Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{3}}$.
- b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung.
- c) Die 2. Ableitung lautet: $f_t''(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$
An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)
- d) Wie ist das a zu wählen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist?
- e) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?
- f) Ermitteln Sie die Ortskurve der Punkte $W_t\left(-\sqrt{\frac{3}{2t}} \mid f\left(-\sqrt{\frac{3}{2t}}\right)\right)$.

Gegeben sei $f_t(x) = xe^{-tx^2} - tx$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

- a) Untersuchen Sie die Funktionen f_t auf Symmetrie, auf Asymptoten und Nullstellen. Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{3}}$.

$$-f_t(-x) = f_t(x) \quad \text{Es liegt Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vor.}$$

$$\text{Asymptote: } y = -tx$$

$$x_1 = 0 \text{ ist Nullstelle f\u00fcr alle } t > 0.$$

Nur f\u00fcr $0 < t < 1$ existieren 2 weitere Nullstellen, beachte:

$$e^{-tx^2} - t = 0, \quad x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{\ln t}{-t}}, \quad \text{unter der Wurzel muss etwas Positives stehen.}$$

- b) Ermitteln Sie die 1. Ableitung.

$$f'_t(x) = e^{-tx^2} - 2tx^2 \cdot e^{-tx^2} - t$$

- c) Die 2. Ableitung lautet: $f''_t(x) = (4t^2 \cdot x^3 - 6tx) \cdot e^{-tx^2}$

An welchen Stellen liegen Wendepunkte vor? (Nur notwendige Bedingung betrachten.)

$$x_1 = 0, \quad x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2t}}$$

- d) Wie ist das a zu w\u00e4hlen, damit $F_t(x) = a(e^{-tx^2} + t^2x^2)$ eine Stammfunktion ist?

$$a = -\frac{1}{2t}$$

- e) Wie lautet die Gleichung der Tangente von f_1 an der Stelle $x = -1$?

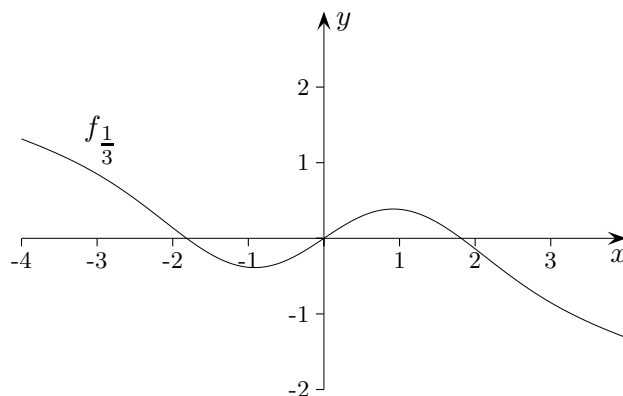
$$y = (-e^{-1} - 1)(x + 1) - e^{-1} + 1$$

$$y = -xe^{-1} - 2e^{-1} - x$$

$$y = -(e^{-1} + 1)x - 2e^{-1}$$

- f) Ermitteln Sie die Ortskurve der Punkte $W_t\left(\underbrace{-\sqrt{\frac{3}{2t}}}_x \mid f_t\left(-\sqrt{\frac{3}{2t}}\right)\right)$.

$$t = \frac{3}{2x^2}, \quad h(x) = xe^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2x} \quad \text{Es reicht hier, } t = \frac{3}{2x^2} \text{ in } f_t(x) \text{ einzusetzen.}$$



Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$, $k > 0$.

- Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k .
- Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
- Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x -Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat, und geben Sie diesen an.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W(2 - k \mid 2e^{k-2})$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

Gegeben sei $f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$, $k > 0$.

- Untersuchen Sie die Funktionenschar f_k auf Nullstellen, Extrema und auf das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

$$f'(x) = (1 - x - k)e^{-x}, \quad f''(x) = (-2 + x + k)e^{-x}$$

$$\text{Nullstelle } x = -k, \quad \text{Max}(1 - k \mid e^{k-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Schar f_k .

$$g(x) = e^{-x}$$
- Zeigen Sie, dass $F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
- Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der x -Achse und dem Graphen von f_2 nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an.

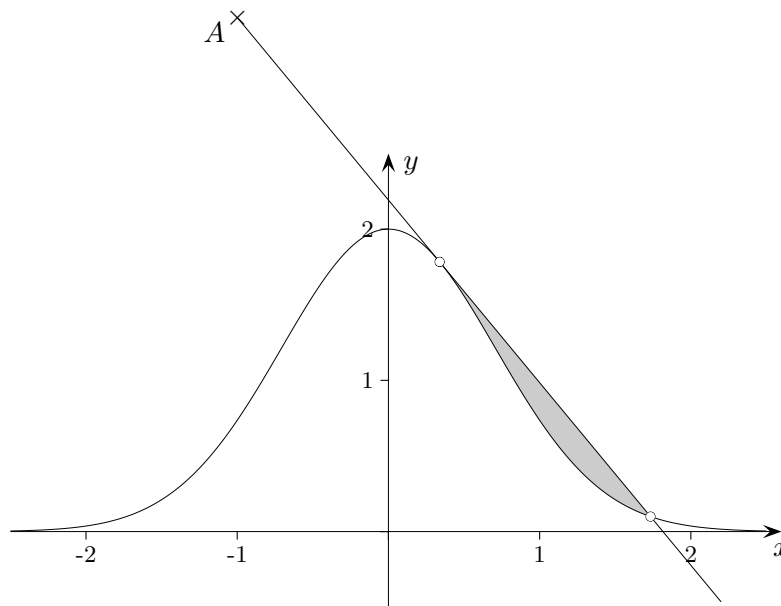
$$A = e^2$$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W(2 - k \mid 2e^{k-2})$. Diese begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche. Für welchen Wert von k ist der Inhalt der Dreiecksfläche maximal? (GTR)

$$A(k) = \frac{1}{2}(4 - k)^2 e^{k-2}, \quad k_{\max} = 2, \quad A_{\max} = 2$$

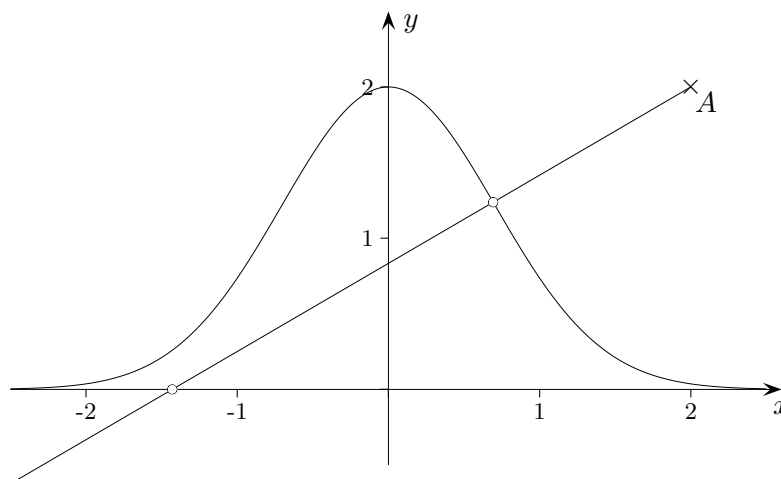
↑

↑ Tangente und Normale

1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 | 3,4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?

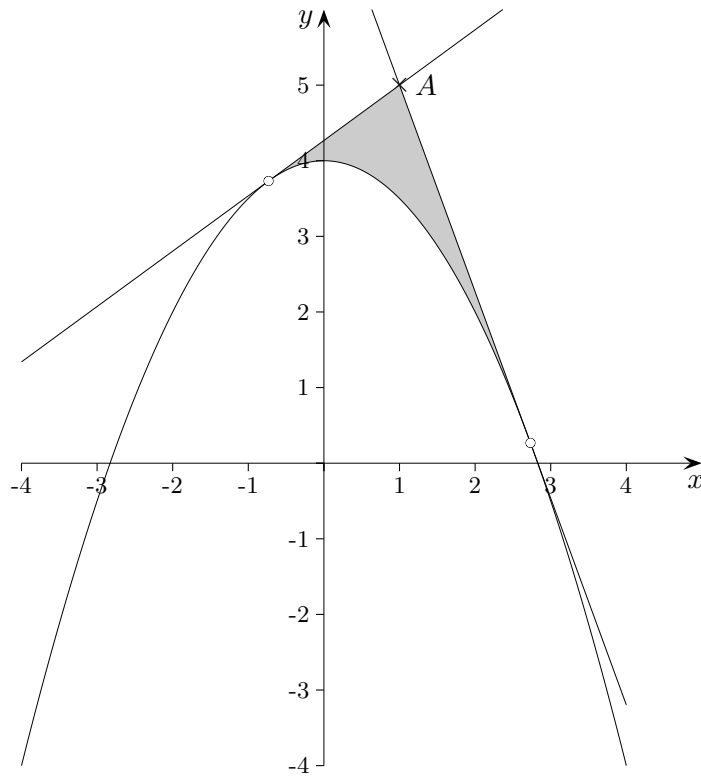


2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 | 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?



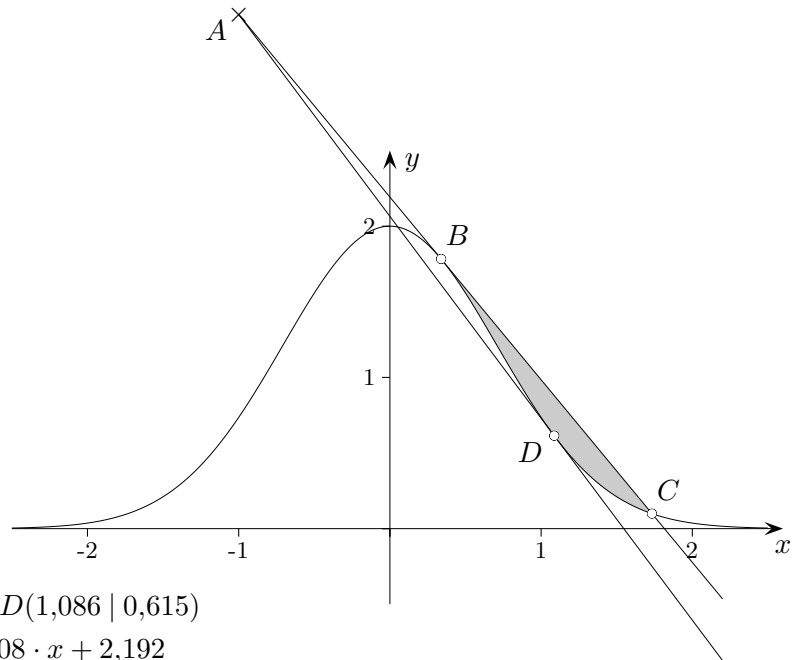
↑ Tangenten

3. Durch den Punkt $A(1 \mid 5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



↑ Tangente und Normale

1. In der Grafik ist eine Tangente der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ zu sehen, die durch den Punkt $A(-1 | 3,4)$ verläuft. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangente mit dem Graphen von f einschließt? Gibt es noch eine weitere Tangente, die durch A verläuft?



$$B(0,339 | 1,783), \quad C(1,733 | 0,099), \quad D(1,086 | 0,615)$$

$$\text{Tangente durch } A \text{ und } B: \quad y = -1,208 \cdot x + 2,192$$

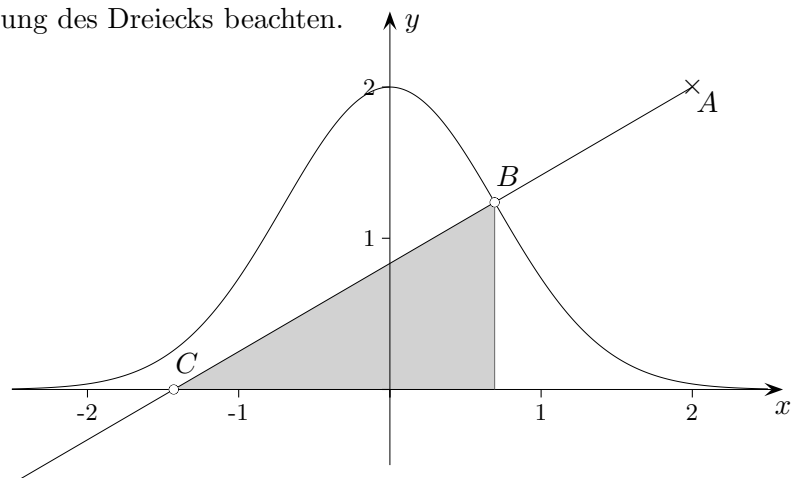
$$\text{Tangente durch } A \text{ und } D: \quad y = -1,335 \cdot x + 2,065$$

Flächeninhalt 0,218 (FE)

2. Eine Normale der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(2 | 2)$. Wie lautet die Nullstelle dieser Normalen?

$$\text{Zeige, dass gilt: } |\overline{BC}| = f(x_B) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_B))^2}$$

Tipp: Satz des Pythagoras und Steigung des Dreiecks beachten.



$$B(0,693 | 1,238), \quad C(-1,430 | 0)$$

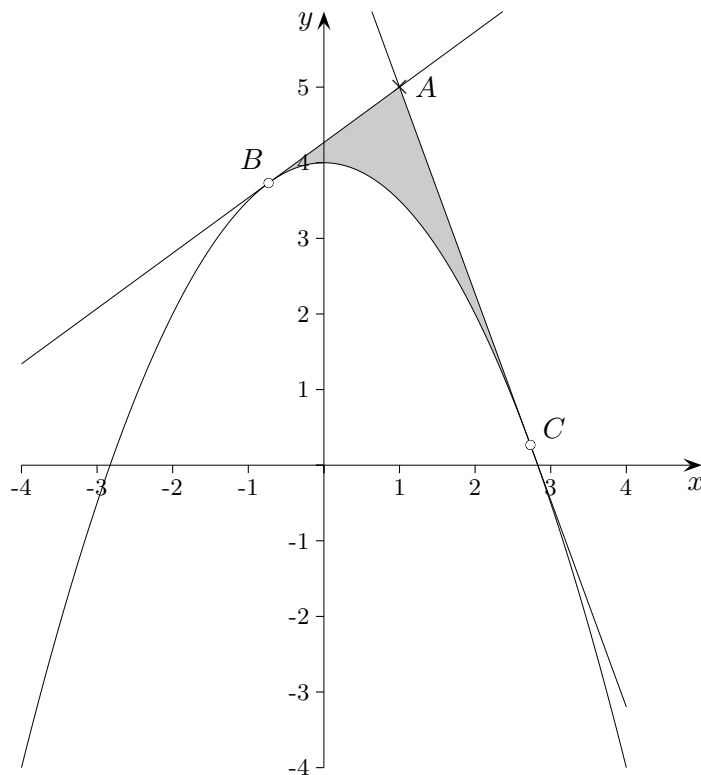
$$\text{Normale durch } A \text{ und } B: \quad y = 0,583 \cdot x + 0,834$$

↑

© Rooffs

↑ Tangenten

3. Durch den Punkt $A(1 \mid 5)$ verlaufen zwei Tangenten der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, den diese Tangenten mit dem Graphen von f einschließen?



$$B(-0,732 \mid 3,732), \quad C(2,732 \mid 0,268)$$

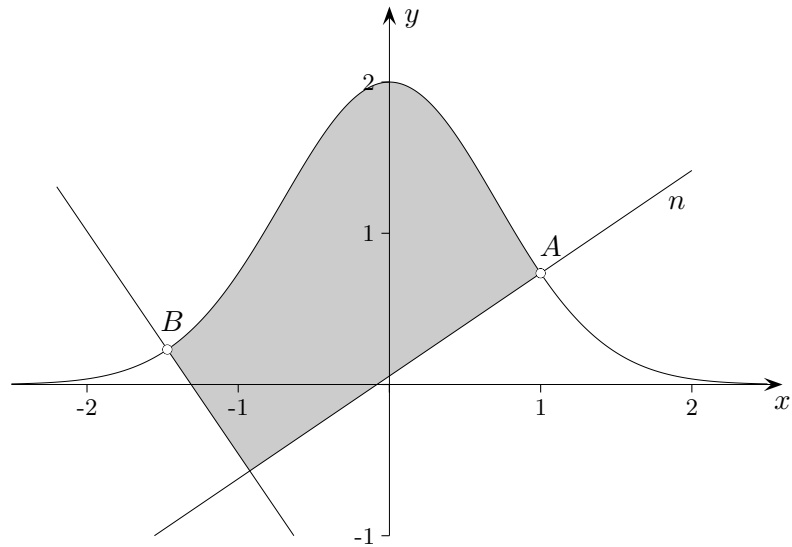
$$\text{Tangente durch } A \text{ und } B: \quad y = 0,732 \cdot x + 4,268$$

$$\text{Tangente durch } A \text{ und } C: \quad y = -2,732 \cdot x + 7,732$$

$$\text{Flächeninhalt } 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ (FE)}$$

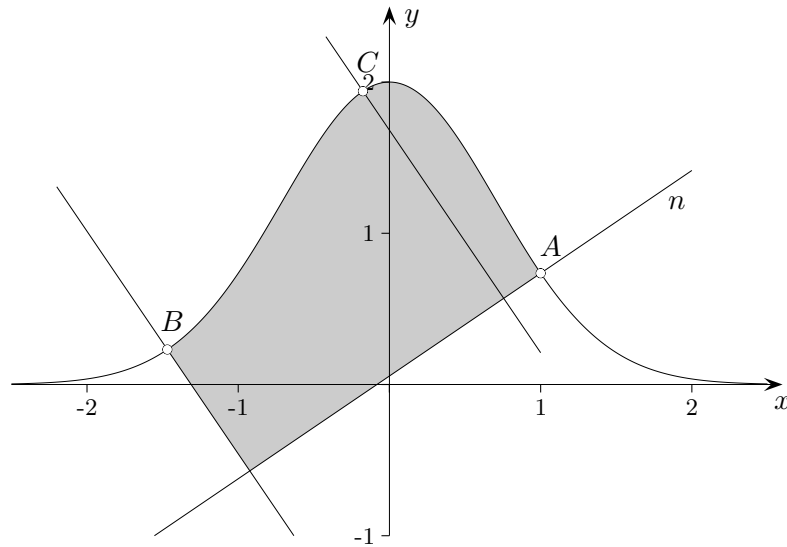
↑ Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(1 \mid 2e^{-1})$. Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B . Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche? Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



↑ Normalen

4. Die Normale n der Funktion $f(x) = 2e^{-x^2}$ verläuft durch den Punkt $A(1 \mid 2e^{-1})$.
Eine zweite Normale verläuft senkrecht zu n durch B . Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche?
Gibt es noch eine weitere Normale, die senkrecht zu n verläuft?



$$B(-1,469 \mid 0,231), \quad C(-0,175 \mid 1,940)$$

$$\text{Normale durch } A: \quad y = 0,680 \cdot x + 0,056$$

$$\text{Normale durch } B: \quad y = -1,472 \cdot x - 1,930$$

$$\text{Schnittstelle } x_s = -0,923$$

$$\text{Normale durch } C: \quad y = -1,472 \cdot x + 1,682$$

$$\text{Flächeninhalt } 3,134 \text{ (FE)}$$

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{a-x}$.
Die erste Ableitung lautet: $f'_a(x) = (1-x) \cdot e^{a-x}$
 - a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a auf Nullstellen, das Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte und bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. Skizzieren Sie die Graphen von f_3 und f'_3 .
 - b) Für welche x gilt: $f_a(x) > f'_a(x)$?
 - c) Ermitteln Sie die Stelle $x > \frac{1}{2}$ des größtmöglichen Abstands der Punkte $A_a(x | f_a(x))$ und $B_a(x | f'_a(x))$ in Abhängigkeit von a .

2. Bei einer Kurvenschar haben die Hochpunkte die Koordinaten $H(\frac{2}{3}t | \frac{9}{2t})$, $t \neq 0$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.
Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

3. Bei einer Kurvenschar haben die Wendepunkte die Koordinaten $W(\ln(\frac{t}{2}) | \frac{t^2}{4})$, $t > 0$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.
Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

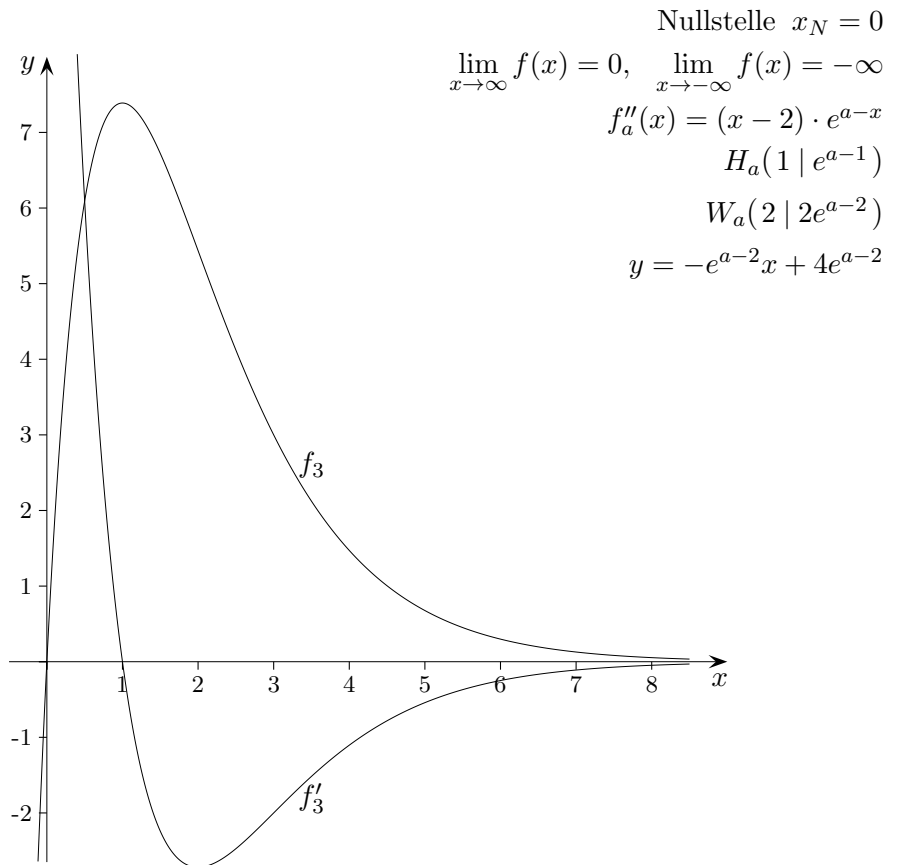
4. Dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist ein Rechteck größten Inhalts so einzubeschreiben, dass eine Seite auf der x -Achse liegt. Zeigen Sie, dass Eckpunkte in den Wendepunkten liegen.

↑ Ergebnisse

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x \cdot e^{a-x}$.

Die erste Ableitung lautet: $f'_a(x) = (1-x) \cdot e^{a-x}$.

- a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a auf Nullstellen, das Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte und bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. Skizzieren Sie die Graphen von f_3 und f'_3 .



b) Für welche x gilt: $f_a(x) > f'_a(x)$?

$$x > \frac{1}{2}$$

c) Ermitteln Sie die Stelle $x > \frac{1}{2}$ des größtmöglichen Abstands der Punkte $A_a(x \mid f_a(x))$ und $B_a(x \mid f'_a(x))$ in Abhängigkeit von a .

$$d_a(x) = (2x-1) \cdot e^{a-x}$$

$$d'_a(x) = (3-2x) \cdot e^{a-x}$$

$$x_E = \frac{3}{2}$$

2. Bei einer Kurvenschar haben die Hochpunkte die Koordinaten $H(\frac{2}{3}t \mid \frac{9}{2t})$, $t \neq 0$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.

Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

$$y = \frac{3}{x}$$

3. Bei einer Kurvenschar haben die Wendepunkte die Koordinaten $W(\ln(\frac{t}{2}) \mid \frac{t^2}{4})$, $t > 0$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.

Das Ergebnis ist zu vereinfachen (weder Klammern noch Doppelbrüche).

$$y = e^{2x}$$

4. $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, siehe Seite 1

↑

Gegeben seien die Funktionen $f_k(x) = (x + 1) \cdot e^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

- a) In welchen Bereichen wachsen bzw. fallen deren Graphen?
Ermitteln Sie die Schnittstelle der Graphen von f_k und f'_k . Welche Stelle ergibt sich für $k \rightarrow 0$?
Untersuchen Sie, ob sich die Graphen für $k = 0,6226$ rechtwinklig schneiden.
Für welches k liegt an der Stelle $x = 0$ ein Extremum vor?

Für das Folgende sei $k = 1$.

- b) Die Parallele zur y -Achse $x = u$, $u \geq 0$, schneidet die Graphen von f und f' .
Für welches u ist der Abstand der beiden Schnittpunkte maximal?
- c) Der Graph von f' schließt mit der x -Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein.
Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt?

Gegeben seien die Funktionen $f_k(x) = (x + 1) \cdot e^{-kx}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

- a) In welchen Bereichen wachsen bzw. fallen deren Graphen? $f'(x) = (-kx + 1 - k) \cdot e^{-kx}$
 für $x \leq \frac{1-k}{k}$ monoton steigend, für $x \geq \frac{1-k}{k}$ monoton fallend

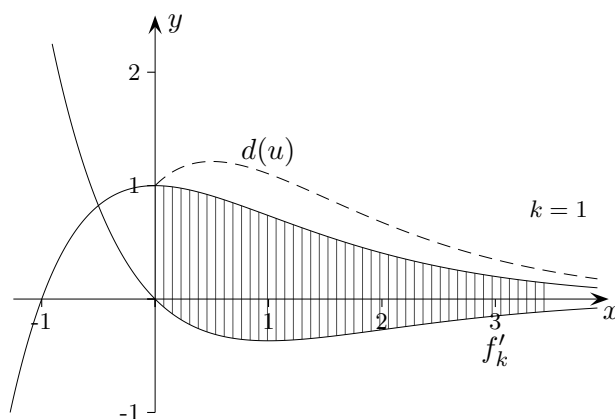
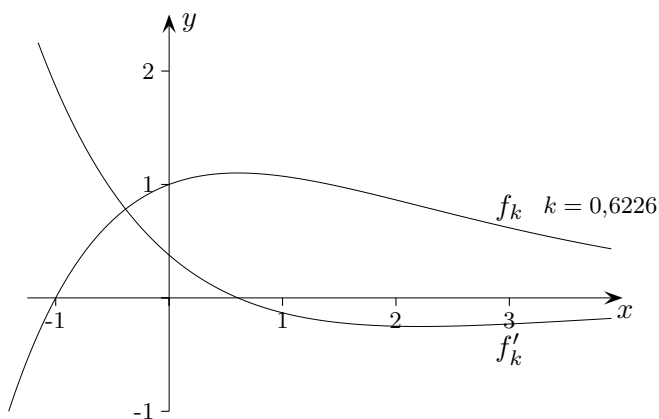
Ermitteln Sie die Schnittstelle der Graphen von f_k und f'_k . Welche Stelle ergibt sich für $k \rightarrow 0$?
 $x_S = -\frac{k}{1+k}$, $x = 0$

Untersuchen Sie, ob sich die Graphen für $k = 0,6226$ rechtwinklig schneiden.
 Für welches k liegt an der Stelle $x = 0$ ein Extremum vor? $k = 1$

Für das Folgende sei $k = 1$.

- b) Die Parallele zur y -Achse $x = u$, $u \geq 0$, schneidet die Graphen von f und f' .
 Für welches u ist der Abstand der beiden Schnittpunkte maximal? $d(u) = (2u + 1) \cdot e^{-u}$
 $u_{\max} = 0,5$

- c) Der Graph von f' schließt mit der x -Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein.
 Hat diese Fläche einen endlichen Inhalt? $A(u) = |(u + 1) \cdot e^{-u} - 1|$
 $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 1$



Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

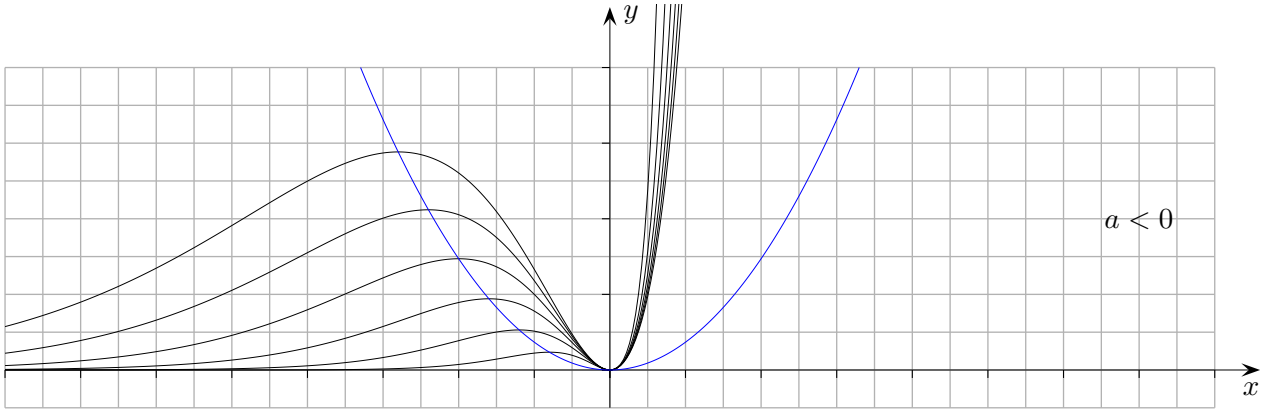
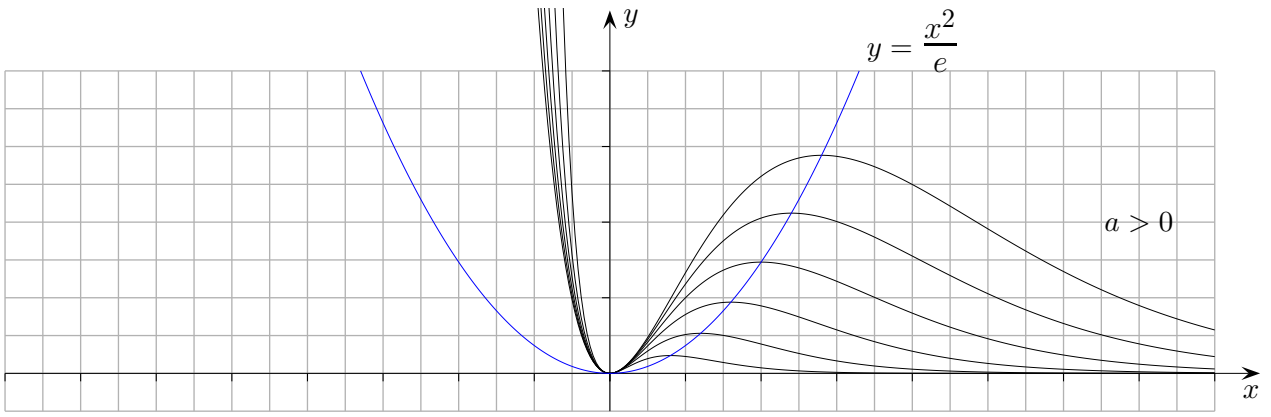
a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2 \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

- b) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar stets genau einen Punkt gemeinsam haben.
- c) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x -Achse und auf Extrempunkte (zur Kontrolle: Maximumstelle bei $2a$).
- d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Maxima der Schar liegen.
- e) Zeigen Sie, dass bei jeder Scharkurve die Maximumstelle in der Mitte zwischen den beiden Wendestellen liegt.
- f) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f_a in Abhängigkeit von a .
- g) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente besitzt, die parallel zur x -Achse verläuft.
- h) Skizzieren Sie den Graphen von f_1 .
- i) Zeigen Sie, dass

$$F_1(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{1-x} \text{ eine Stammfunktion von } f_1 \text{ ist.}$$

Berechnen Sie die Maßzahl der ins Unendliche reichenden Fläche, die vom Graph der Funktion f_1 und der positiven x -Achse begrenzt wird.



Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2 \right), \quad x \in \mathbb{R} \qquad f_a'(x) = e^{1-\frac{x}{a}} \left(2x - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

b) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar stets genau einen Punkt gemeinsam haben. $O(0 | 0)$

c) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x -Achse und auf Extrempunkte (zur Kontrolle: Maximumstelle bei $2a$). $x = 0$
 $Min(0 | 0); Max(2a | 4a^2 e^{-1})$

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Maxima der Schar liegen. $y = x^2 e^{-1}$

e) Zeigen Sie, dass bei jeder Scharkurve die Maximumstelle in der Mitte zwischen den beiden Wendestellen liegt. $x_{W_{1/2}} = 2a \pm \sqrt{2}a$

f) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f_a in Abhängigkeit von a . z.B. $a > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$

g) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente besitzt, die parallel zur x -Achse verläuft. $a = 1$

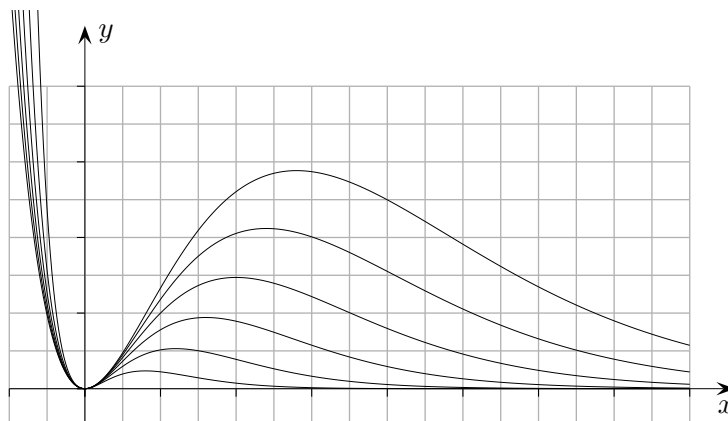
h) Skizzieren Sie den Graphen von f_1 .

i) Zeigen Sie, dass

$$F_1(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{1-x} \text{ eine Stammfunktion von } f_1 \text{ ist.} \qquad F_1'(x) = f_1(x)$$

Berechnen Sie die Maßzahl der ins Unendliche reichenden Fläche, die vom Graph der Funktion f_1 und der positiven x -Achse begrenzt wird. $A = 2e$

↑ Wendepunkte



Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 e^{1-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

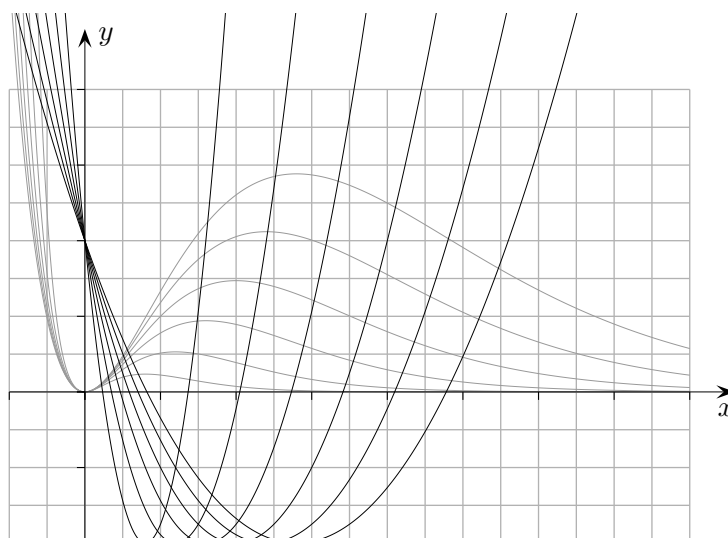
Die 2. Ableitung lautet:

$$f_a''(x) = e^{1-\frac{x}{a}} \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 2 \right)}_{\text{Polynom 2. Grades}}$$

Um nachzuweisen, dass an den Stellen $x_{1/2} = (2 \pm \sqrt{2})a$ Wendepunkte vorliegen (notw. Bed. $f_a''(x) = 0$), ist davon abzuraten, die 3. Ableitung heranzuziehen.

Ein Wendepunkt ist ein Punkt des Funktionsgraphen, an dem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert. Zwischen Tief- (Linkskurve) und Hochpunkt (Rechtskurve) muss daher ein Wendepunkt vorliegen. Da die x -Achse hier Asymptote ist, muss sich die Krümmung nach dem Hochpunkt noch einmal ändern. Es können auch nicht mehr als 2 Wendepunkte vorliegen, da ein Polynom 2. Grades (Parabel) maximal 2 Nullstellen hat.

Alternativ kann auf den Vorzeichenwechsel jeweils an beiden Nullstellen der Parabeln hingewiesen werden, da stets gilt: $e^{1-\frac{x}{a}} > 0$



Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = a(ax + 1)e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = a^3(ax - 1)e^{-ax}$$

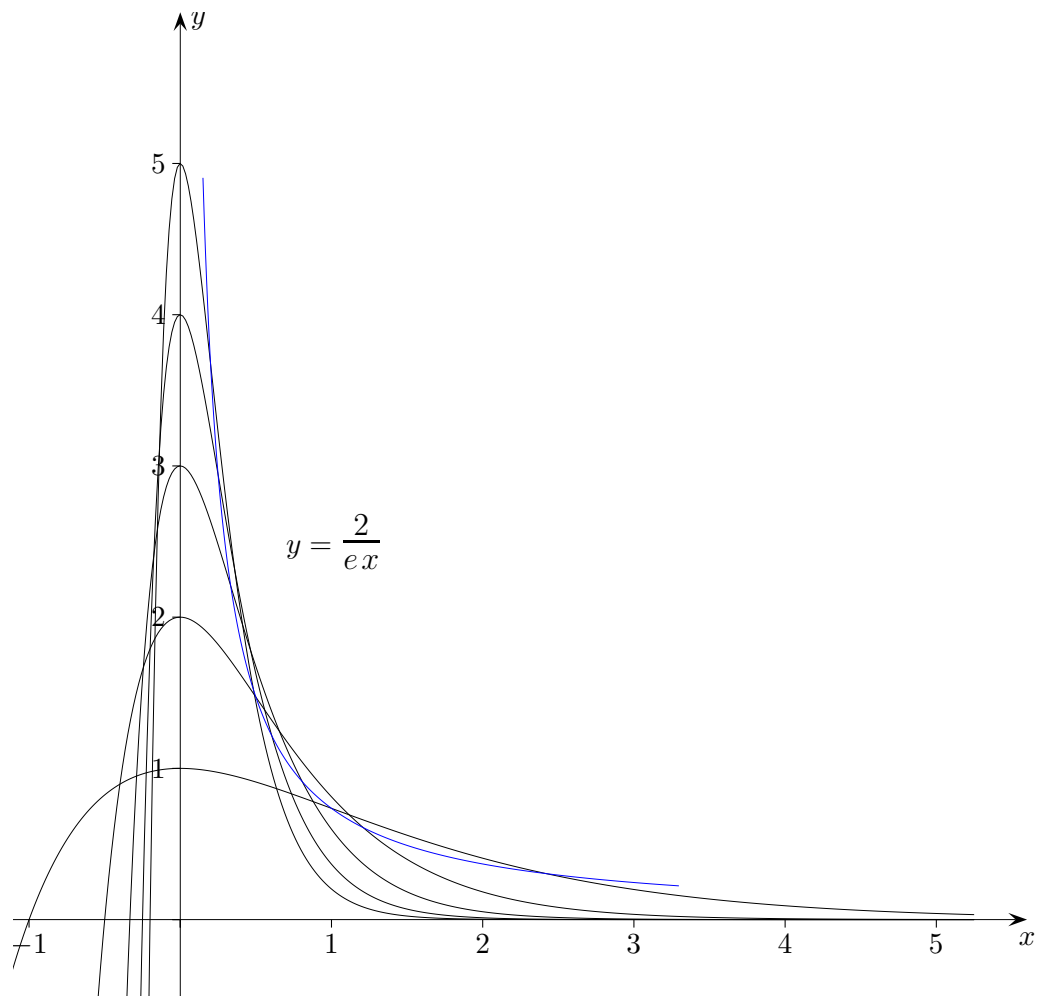
- b) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.
- c) Diskutieren Sie die Funktion $f: x \rightarrow (x + 1)e^{-x}$.
- d) Der Graph von f schließt mit der x -Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.
- e) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.
- f) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a . Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

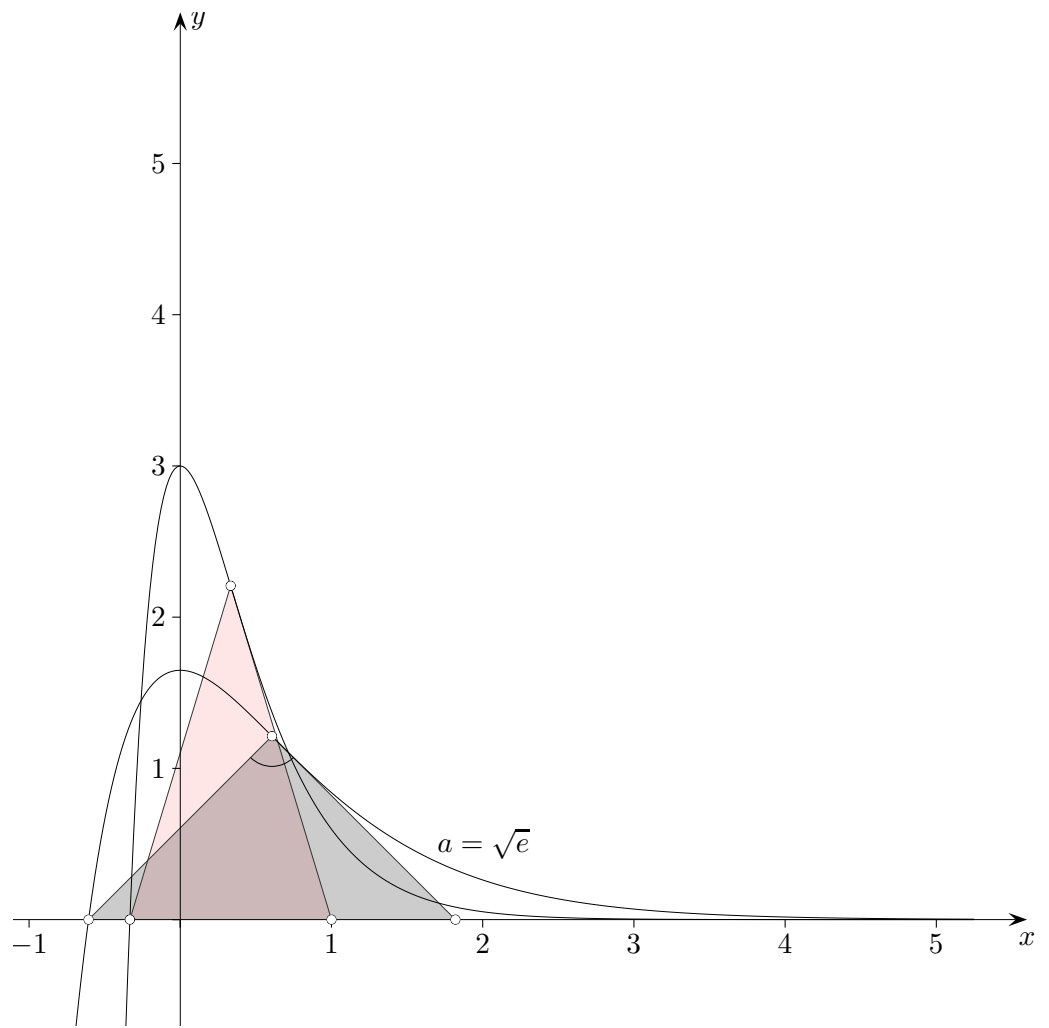
$$\left[\text{Zur Kontrolle: } t: y = -\frac{a^2}{e}x + \frac{3a}{e} \right]$$

g) Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x -Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x -Achse bilden ein Dreieck.

Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist.





Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = a(ax + 1)e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestätigen Sie, dass gilt:

$$f_a''(x) = a^3(ax - 1)e^{-ax} \qquad f_a'(x) = -a^3xe^{-ax}$$

b) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt. $x_w = \frac{1}{a}$, $a = 1$

c) Diskutieren Sie die Funktion $f: x \rightarrow (x + 1)e^{-x}$. $x_N = -1$; $\text{Max}(0 | 1)$; $W(1 | 2e^{-1})$; ...

d) Der Graph von f schließt mit der x -Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an. $A = e$

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen. $W\left(\frac{1}{a} \mid \frac{2a}{e}\right)$
 $y = \frac{2}{ex}$

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a . Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } t: y = -\frac{a^2}{e}x + \frac{3a}{e} \right] \qquad A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{e} \cdot \frac{3}{a} = \frac{9}{2e}$$

g) Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x -Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x -Achse bilden ein Dreieck.

Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist. $x_{N_a} = -\frac{1}{a}$; $x_{W_a} = \frac{1}{a}$; $x_{S_a} = \frac{3}{a}$

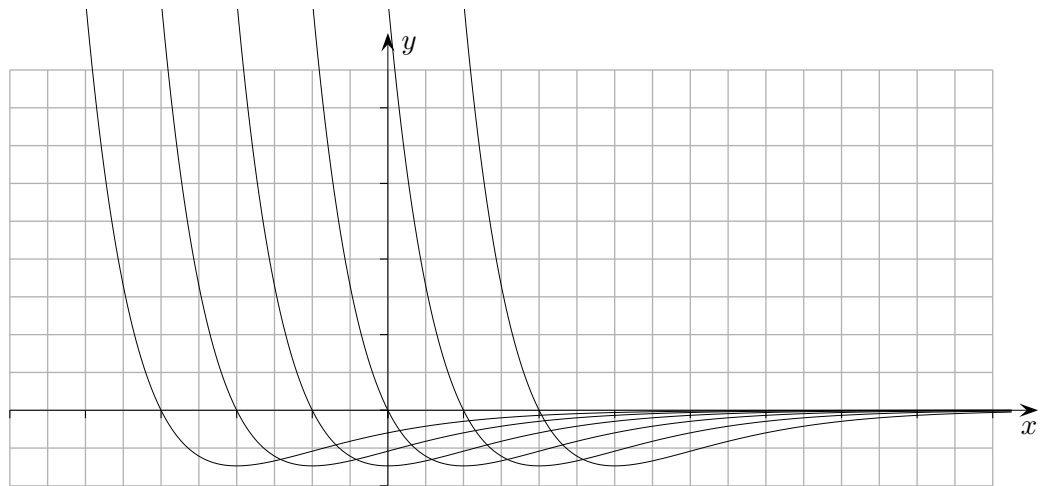
Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist. $f_a'\left(\frac{1}{a}\right) = -1$; $a = \sqrt{e}$

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = -2(x - a)e^{-(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Extrempunkt auf der y -Achse liegt.
- b) Diskutieren Sie die Funktion $f: x \rightarrow -2(x + 1)e^{-x-1}$.
- c) Untersuchen Sie, ob b und c so bestimmt werden können, dass $F(x) = (bx + c)e^{-x-1}$ eine Stammfunktion von f ist.
- d) Der Graph von f schließt mit der x -Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.
- e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt $P(3 | 0)$ an den Graphen von f .

Gegeben ist nun die Funktion $g(x) = 2e^{-x-1}$.

- f) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s | y_s)$ der Graphen von f und g und zeichnen Sie beide Graphen.
- g) Die Punkte $A(x | g(x))$ und $B(x | f(x))$ sind Punkte auf dem Graphen von g bzw. von f , wobei $x \geq x_s$. Bestimmen Sie x so, dass die Länge der Strecke \overline{AB} maximal ist.



Die Graphen gehen durch Verschiebung auseinander hervor.

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = -2(x - a)e^{-(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Extrempunkt auf der y -Achse liegt.

$$f'_a(x) = (2x - 2a - 2)e^{-(x-a)}, \quad E(1 + a \mid -2e^{-1}), \quad a = -1$$

- b) Diskutieren Sie die Funktion $f: x \rightarrow -2(x + 1)e^{-x-1}$. $x_N = -1$; $\text{Min}(0 \mid -2e^{-1})$; $\text{W}(1 \mid -4e^{-2})$; ...

- c) Untersuchen Sie, ob b und c so bestimmt werden können, dass $F(x) = (bx + c)e^{-x-1}$ eine Stammfunktion von f ist. $-2(x + 1) = b - bx - c \implies b = 2, c = 4$

- d) Der Graph von f schließt mit der x -Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an. $A = |-2|$

- e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt $P(3 \mid 0)$ an den Graphen von f .

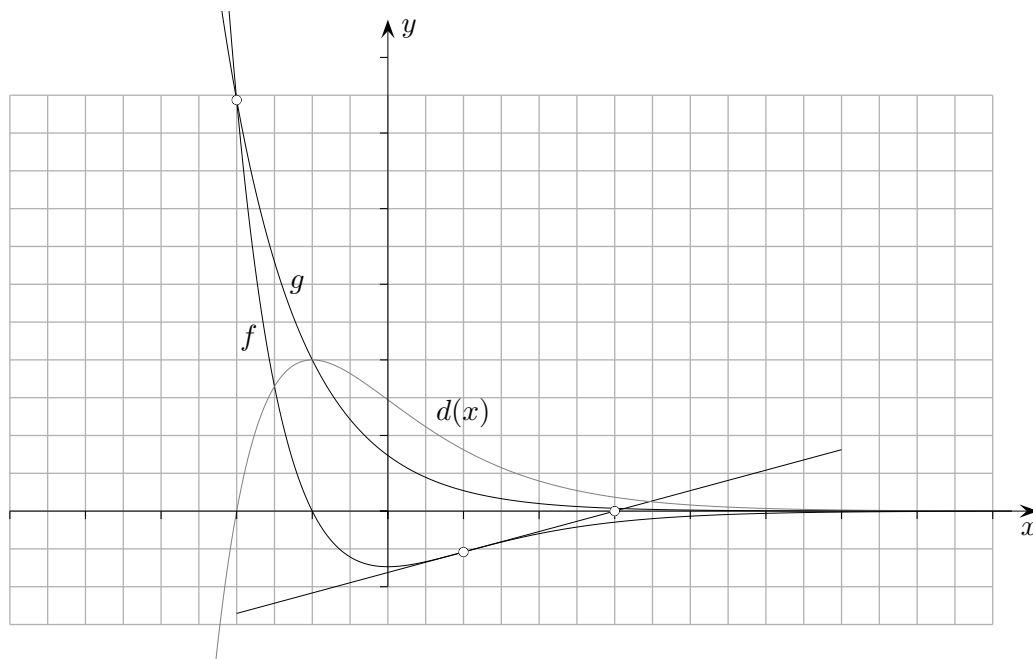
$$y = 2e^{-2}x - 6e^{-2}$$

Gegeben ist nun die Funktion $g(x) = 2e^{-x-1}$.

- f) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s \mid y_s)$ der Graphen von f und g und zeichnen Sie beide Graphen.

$$S(-2 \mid 2e)$$

- g) Die Punkte $A(x \mid g(x))$ und $B(x \mid f(x))$ sind Punkte auf dem Graphen von g bzw. von f , wobei $x \geq x_s$. Bestimmen Sie x so, dass die Länge der Strecke \overline{AB} maximal ist. $d_{\max} = 2$ an der Stelle $x = -1$



↑ Ableitungen Übung

1. $f(x) = 2x \cdot e^{-kx}$ $f'(x) = ?$

2. $f(x) = 0,3 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2x}$

3. $f(x) = 5(1 - x) \cdot e^{2-x}$

4. $f(x) = \frac{k}{2} (e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}})$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx+1}$

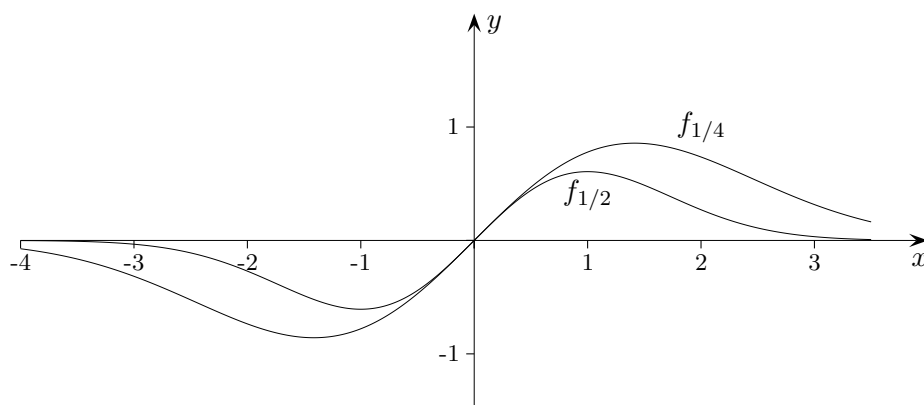
6. $f(x) = (x^2 - k) \cdot e^{-2x}$

7. $f(x) = 4e^{\frac{x}{k}+k}$

8. $f(x) = 40 \left(1 - e^{-\frac{1}{25}x}\right)^2$

↑ Ableitungen Übung

1. $f(x) = 2x \cdot e^{-kx}$ $f'(x) = 2(1 - kx) \cdot e^{-kx}$
2. $f(x) = 0,3 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2x}$ $f'(x) = (0,6x - 0,06x^2) \cdot e^{-0,2x}$
3. $f(x) = 5(1 - x) \cdot e^{2-x}$ $f'(x) = 5(x - 2)e^{2-x}$
4. $f(x) = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right)$ $f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} \right)$
5. $f(x) = x^2 \cdot e^{-kx+1}$ $f'(x) = x(2 - kx)e^{-kx+1}$
6. $f(x) = (x^2 - k) \cdot e^{-2x}$ $f'(x) = 2(-x^2 + x + k)e^{-2x}$
7. $f(x) = 4e^{\frac{x}{k}+k}$ $f'(x) = \frac{4}{k}e^{\frac{x}{k}+k}$
8. $f(x) = 40 \left(1 - e^{-\frac{1}{25}x} \right)^2$ $f'(x) = \frac{16}{5} \left(1 - e^{-\frac{1}{25}x} \right) e^{-\frac{1}{25}x}$



1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden:

$$f_k''(x) = 2kx(2kx^2 - 3) \cdot e^{-kx^2}$$

- a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung gilt:

$$f_k'(x) = (1 - 2kx^2) \cdot e^{-kx^2}$$

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von f_k .

Ermitteln Sie die Extrema. Auf welcher Ortskurve liegen sie?

Untersuchen Sie, ob es eine Gerade gibt, die Tangente an alle Graphen von f_k ist.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, den Parameter k so zu wählen, dass der Graph von f_k den Punkt $H\left(2 \mid \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ als Hochpunkt hat.

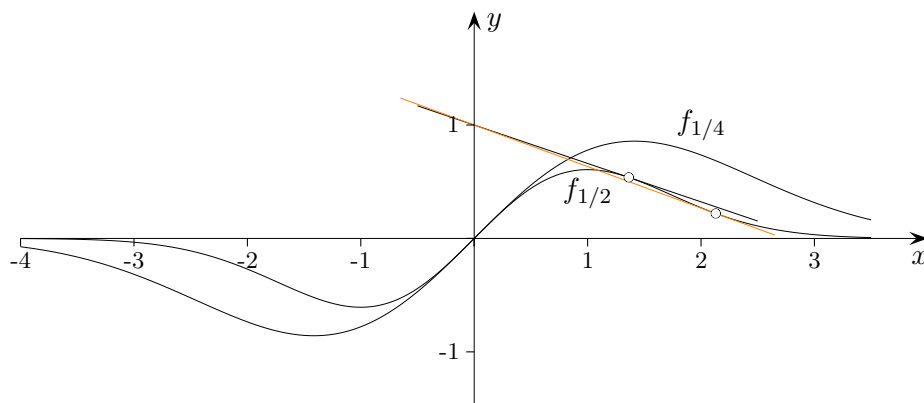
Begründen Sie, dass der Graph von f_k drei Wendepunkte hat.

- b) Ermitteln Sie a so, dass $F_k(x) = a \cdot e^{-kx^2}$ jeweils eine Stammfunktion von f_k ist.

Ermitteln Sie auf 3 Nachkommastellen genau den Wert für dasjenige k ,

für das gilt: $\int_0^2 f_k(x) dx = 1$

- c) Sei für diese Teilaufgabe $k = \frac{1}{2}$. Ermitteln Sie eine Stelle (auf der x -Achse), für die die zugehörige Tangente die y -Achse bei $y = 1$ schneidet. Beantworten Sie begründet anhand des Funktionsgraphen von $f_{1/2}$ die Frage, ob es mehrere dieser Stellen gibt.



1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-kx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden:

$$f_k''(x) = 2kx(2kx^2 - 3) \cdot e^{-kx^2}$$

a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung gilt:

$$f_k'(x) = (1 - 2kx^2) \cdot e^{-kx^2}$$

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von f_k .

Ermitteln Sie die Extrema. Auf welcher Ortskurve liegen sie?

Untersuchen Sie, ob es eine Gerade gibt, die Tangente an alle Graphen von f_k ist.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, den Parameter k so zu wählen, dass der Graph von f_k

den Punkt $H(2 \mid \frac{2}{\sqrt{3}})$ als Hochpunkt hat.

Begründen Sie, dass der Graph von f_k drei Wendepunkte hat.

Graphen punktsymmetrisch

$$E\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \mid \pm \frac{1}{\sqrt{2ke}}\right), y = \frac{1}{\sqrt{e}}x$$

$$y = x$$

nicht möglich

siehe S.24

b) Ermitteln Sie a so, dass $F_k(x) = a \cdot e^{-kx^2}$ jeweils eine Stammfunktion von f_k ist.

$$a = -\frac{1}{2k}$$

Ermitteln Sie auf 3 Nachkommastellen genau den Wert für dasjenige k ,

$$\text{für das gilt: } \int_0^2 f_k(x) dx = 1$$

$$\dots, \quad 2k = 1 - e^{-4k}, \quad \text{GTR, } k = 0,398$$

c) Sei für diese Teilaufgabe $k = \frac{1}{2}$. Ermitteln Sie eine Stelle (auf der x -Achse)

für die die zugehörige Tangente die y -Achse bei $y = 1$ schneidet.

Beantworten Sie begründet anhand des Funktionsgraphen von $f_{1/2}$ die Frage,

ob es mehrere dieser Stellen gibt.

$$\dots \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^3 = 1$$

$$x_1 = 1,363, \quad x_2 = 2,130$$

vor und nach der Wendestelle ...

Gegeben sei $f(x) = 4xe^{-2x+1}$.

- a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und auf das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.
- b) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x - 1) \cdot e^{-2x+1}$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Stammfunktion an, die durch den Ursprung verläuft und skizzieren Sie ihren Graphen.
- c) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der positiven x -Achse und dem Graphen von f nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an.
- d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W(1 | 4e^{-1})$.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f , der Tangente im Punkt W , und der x -Achse umschlossen wird und sich nicht ins Unendliche ausdehnt. (GTR)

Gegeben sei $f(x) = 4xe^{-2x+1}$.

- a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und auf das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

$$f'(x) = (4 - 8x)e^{-2x+1}, \quad f''(x) = 16(x - 1)e^{-2x+1}$$

$$\text{Nullstelle } x = 0, \text{ Max}\left(\frac{1}{2} \mid 2\right), \text{ W}\left(1 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

- b) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x - 1) \cdot e^{-2x+1}$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Stammfunktion an, die durch den Ursprung verläuft und skizzieren Sie ihren Graphen.

- c) Begründen Sie, dass die Fläche, die sich zwischen der positiven x -Achse und dem Graphen von f nach rechts ins Unendliche ausdehnt, einen endlichen Inhalt hat und geben Sie diesen an. $A = e$

- d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $W(1 \mid 4e^{-1})$. $y = -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e}$
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f , der Tangente im Punkt W , und der x -Achse umschlossen wird und sich nicht ins Unendliche ausdehnt. (GTR) $B = e - \frac{1}{e} = 2,350$

