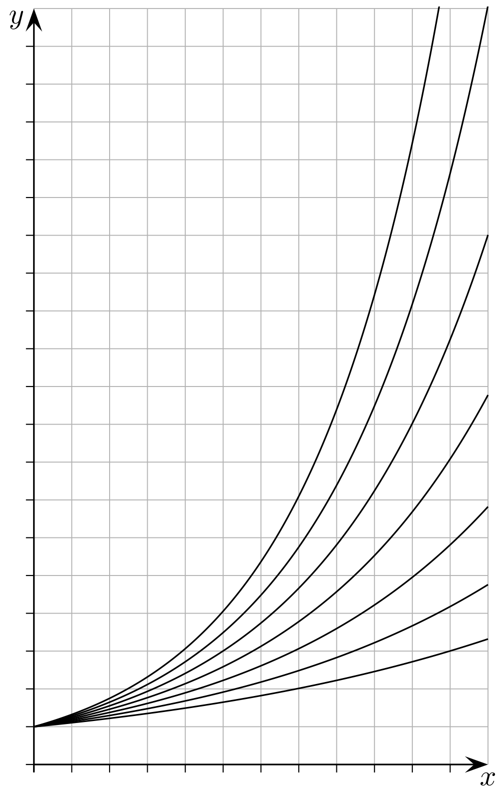
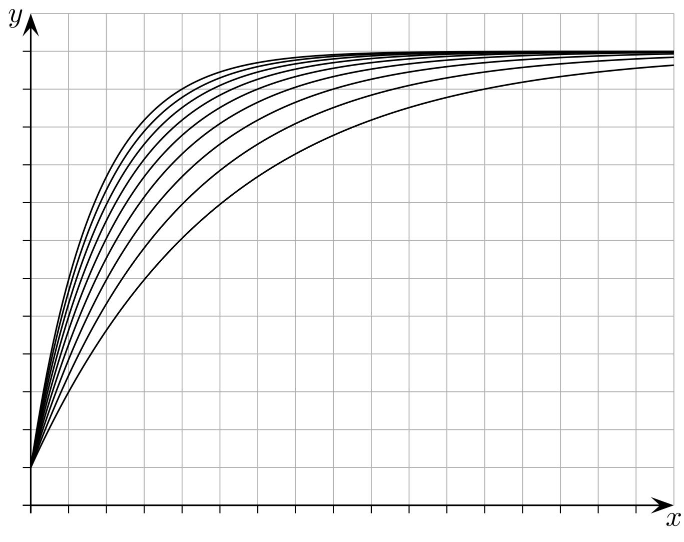
Weg zur e-Funktion

Zur Einstimmung werden einige Wachstumsverläufe skizziert.

1. Exponentielles Wachstum

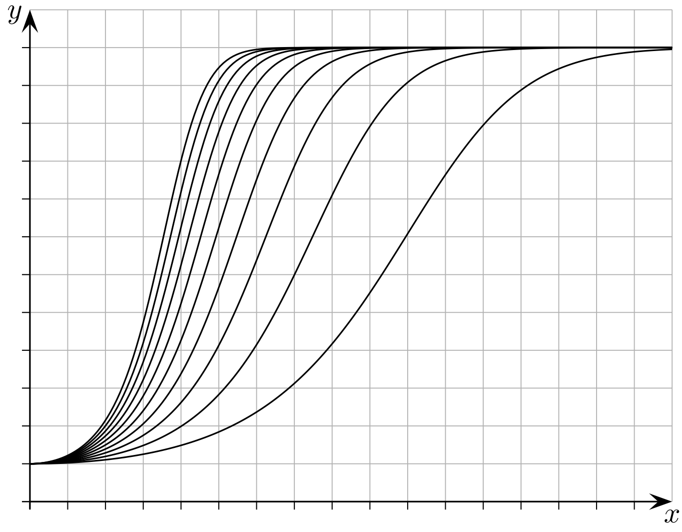


2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

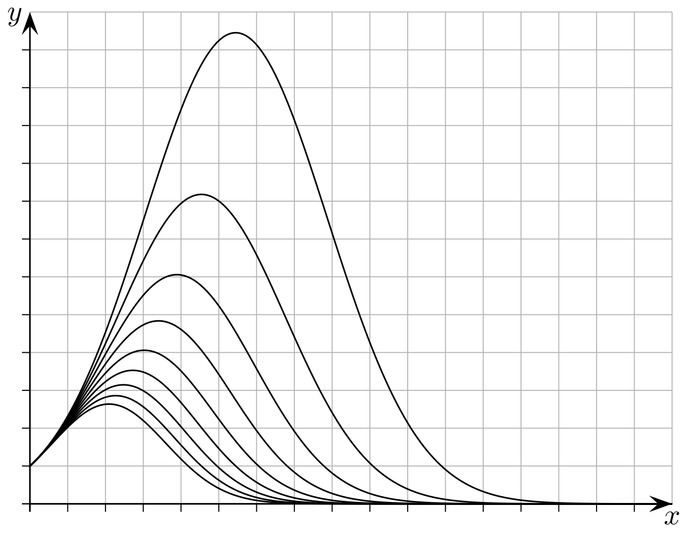


Wachstumsverläufe

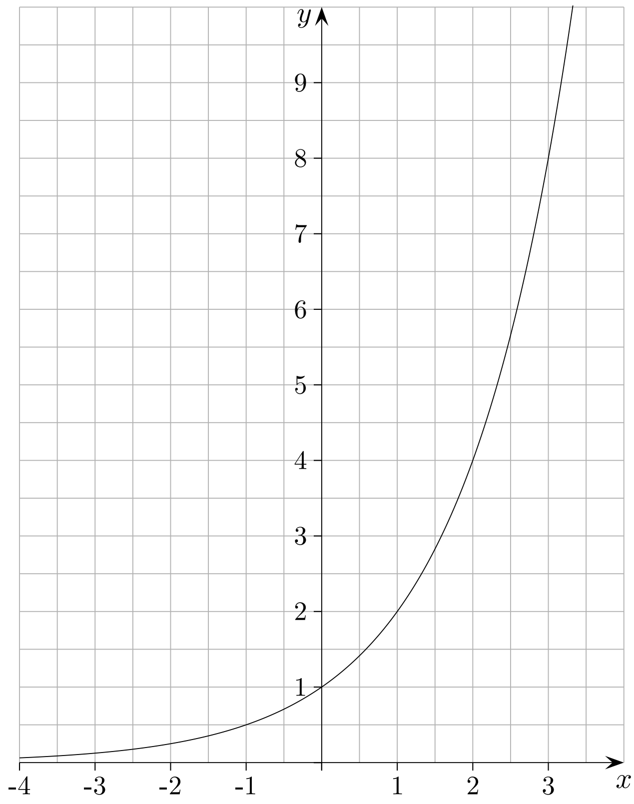
3. Logistisches Wachstum



4. Vergiftetes Wachstum



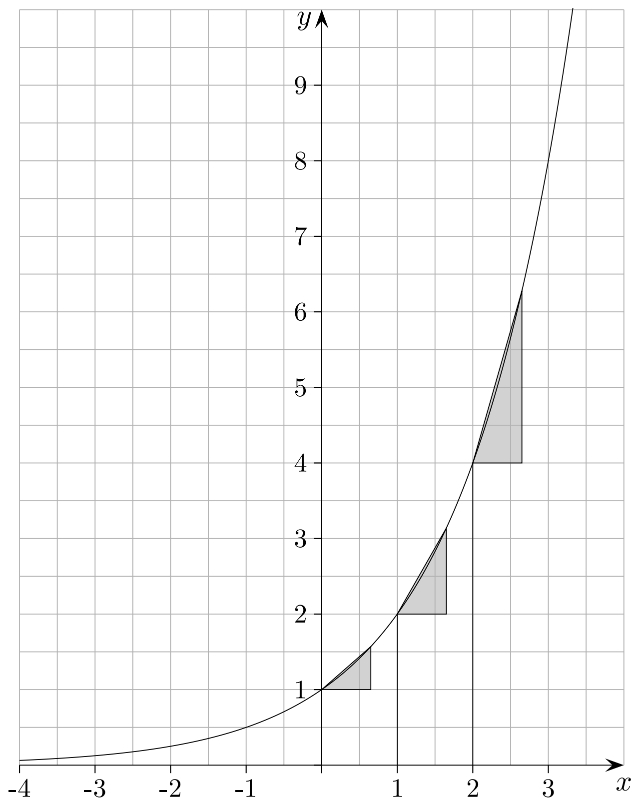
Exponentielles Wachstum



Funktionen für exponentielles Wachstum, Beispiele:

1. $K_n = K_0 \cdot q^n$ Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$
2. $f(x) = a \cdot 2^x$ Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand a
3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten
4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit
5. $f(x) = a \cdot 1{,}15^x$ $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$, 15 %-iger Zuwachs pro Zeiteinheit
6. $f(x) = a \cdot 0{,}85^x$ $1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$, 15 %-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15 %-iger Zerfall

$$f(x) = 2^x$$



Uns interessiert die Ableitung von $f(x) = 2^x$.

Das allgemeine Vorgehen (h-Methode), um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{Tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$

Hieraus erkennen wir:

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

Für die Ableitung der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

$f'(x) = k \cdot f(x), \quad k = f'(0)$ ist ein Streckfaktor.

Erläutere:

Für das exponentielle Wachstum gilt:

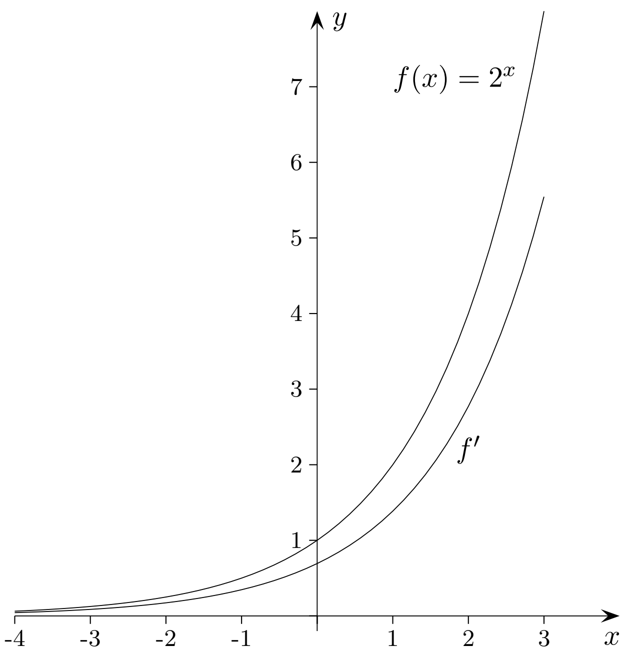
Der Zuwachs Δy ist proportional zum Bestand.

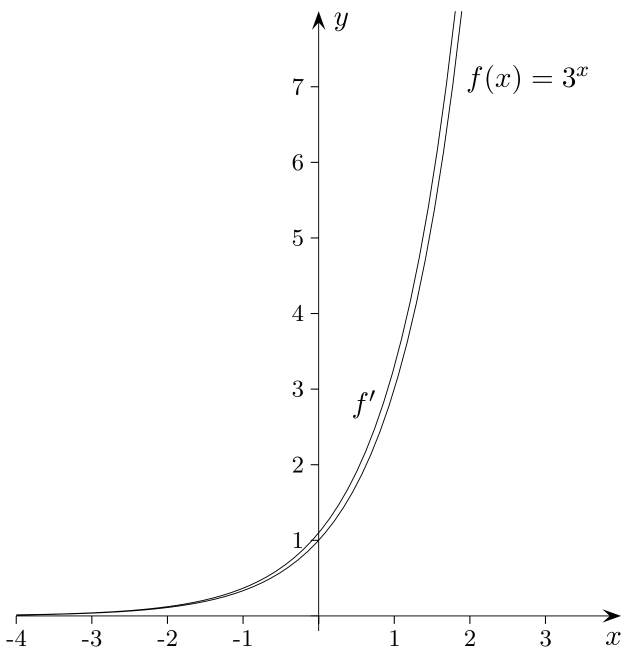
$$f'(x) = f(x)$$

Graphische Differentiation (Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen) der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$ - die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

(Später kommen wir auf die Ableitung von $f(x) = 2^x$ zurück.)





Die Tangentengleichung im Ursprung wäre $y = x + 1$, beachte $f'(0) = 1$.

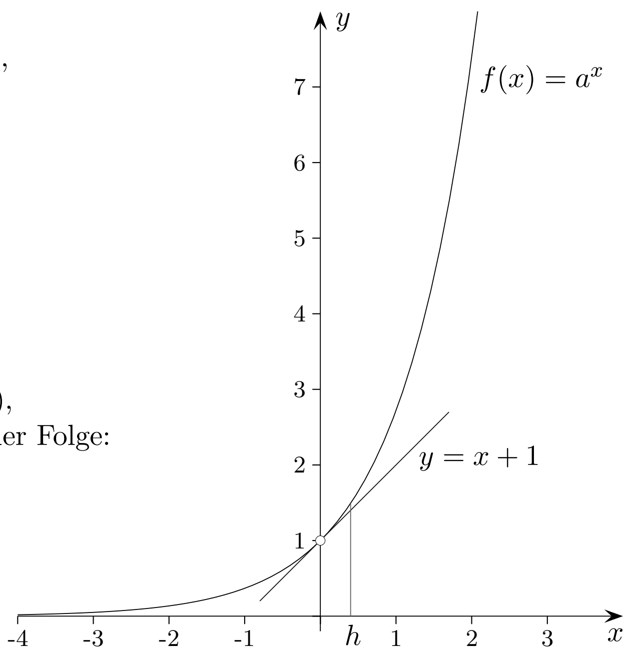
Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n:

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad |\ (\ )^n \qquad \Longrightarrow \qquad a \simeq (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein ($10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7$), so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:

$$a_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n$$



Eulersche Zahl

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ wird nach Euler (1707 - 1783) mit e bezeichnet (e von exponential),

$e = 2{,}718\,281\,828\,459\;\ldots$ Siehe auch die Kettenbruchentwicklungen von e unter Verschiedenes.

Für die e-Funktion $f(x) = e^x$ gilt: $(e^x)' = e^x$.

An anderer Stelle (Approximation der e-Funktion) wird hergeleitet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \;...$$

Erläutere den Bezug zu $(e^x)' = e^x$.

Wie lautet die Ableitung von $f(x) = e^{3x}$?

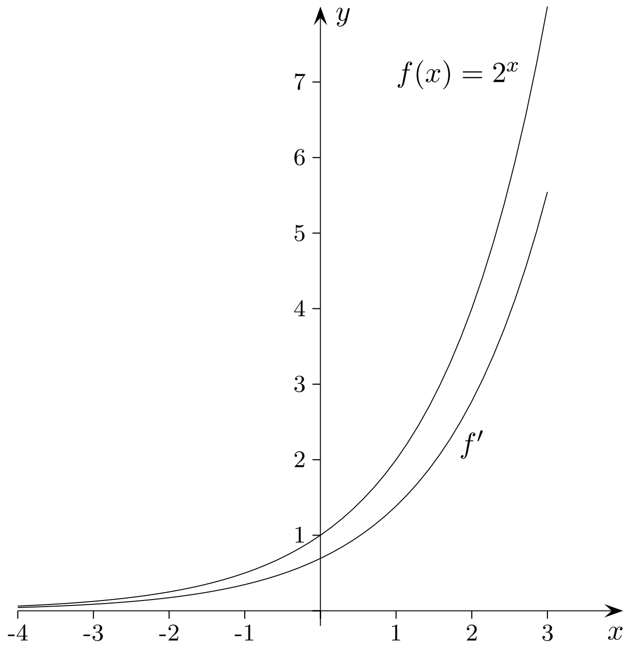
Erläutere:

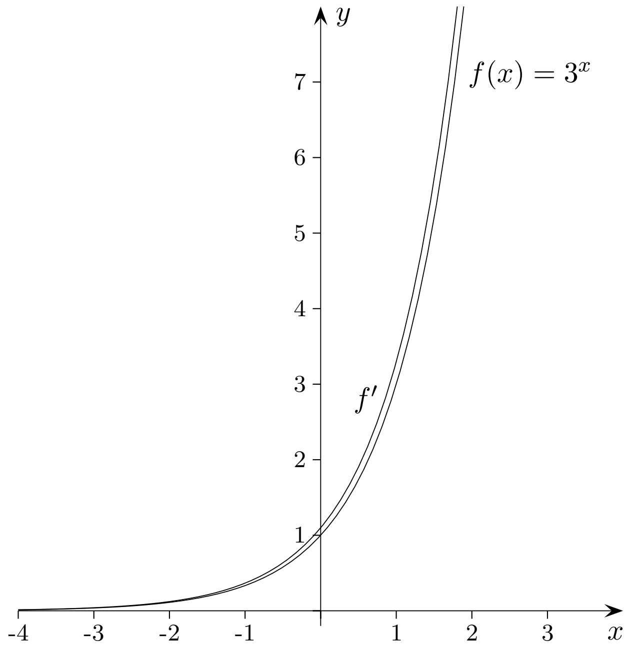
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x+3h} - e^{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{3x}\,\frac{e^{3h}-1}{h} = 3\cdot e^{3x}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}}_{f'(0)=1} = 3\cdot e^{3x}$$

Um $f(x) = 2^x$ abzuleiten, müssen wir uns zunächst mit Logarithmen zur Basis e befassen.
Dann sind wir in der Lage, $f(x) = 2^x = e^{\ln 2\,\cdot\,x}$ mit der Kettenregel abzuleiten, $f'(x) = \ln 2\cdot 2^x$.

kurz gefasst

$$f'(x) = f(x)$$





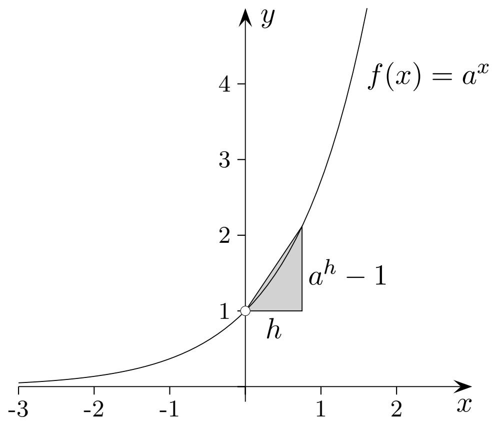
Graphische Differentiation der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$
- die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a, für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

Die h-Methode, um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{Tangente} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$



$f'(0)$ muss 1 sein, damit $(a^x)' = a^x$ gilt.
Für a folgt:

$$a = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Setze $h = 0{,}001$, $\frac{1}{h} = 1000$

$h = 10^{-9}$, $\frac{1}{h} = 10^9$

Der Grenzwert a wird nach Euler (1707-1783) mit e bezeichnet.

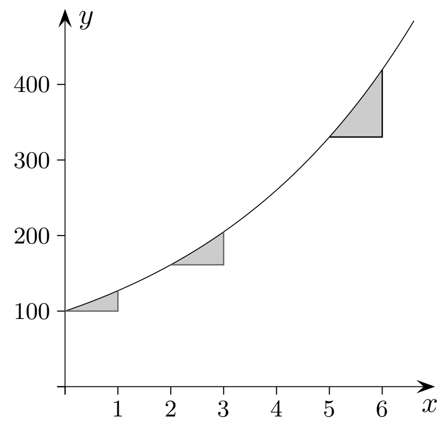
$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ \ldots$

Exponentielles Wachstum

Mit den Funktionen $f(x) = a e^{kx}$ erfassen wir exponentielle Wachstumsvorgänge.
Hierbei ist a der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a e^{kx} \\ f'(x) &= a e^{kx} \cdot k \\ f'(x) &= k f(x) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate)
ist proportional zum Bestand.

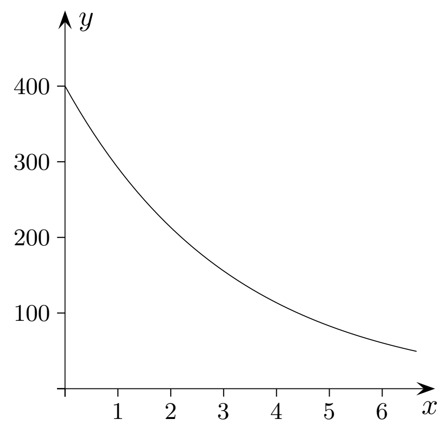


Mit $f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^x$

erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Wachstumskonstante k
und dem Prozentsatz des jährlichen Wachstums, es gilt

$$e^k = 1 + \frac{p}{100}.$$

Für einen Wachstumsprozess sei $p = 4\,\%$. Ermittle k.



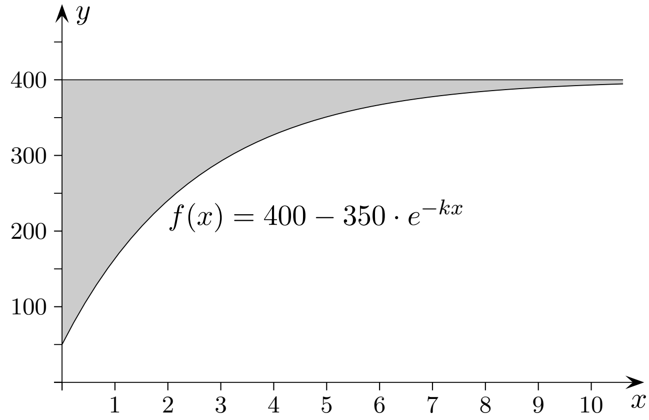
Für einen exponentiellen Abnahmeprozess $f(x) = a e^{-kx}$ bzw. $f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$
gilt entsprechend

$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}.$$

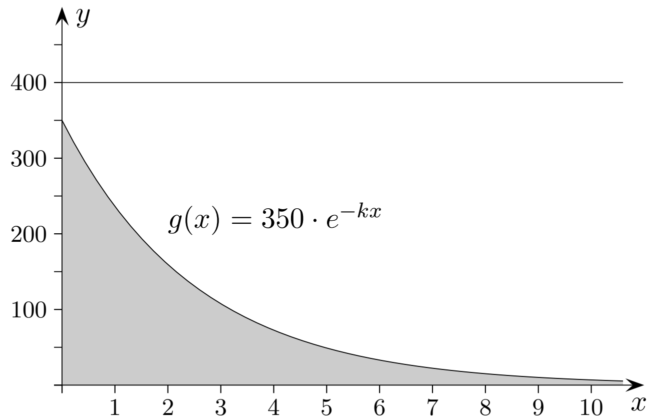
Zeige, dass für die Halbwertszeit T, das ist die Zeit, in der die Hälfte
der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist, gilt:

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

Begrenztes Wachstum



Mit der Funktion $f(x) = G - ae^{-kx}$ erfassen wir begrenztes Wachstums.
Von der Grenze G wird eine Funktion $g(x)$ für die exponentielle Abnahme subtrahiert.
Hierbei ist $G - a$ der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.



$$\begin{aligned} f(x) &= G - ae^{-kx} \\ f'(x) &= ae^{-kx} \cdot k \\ f'(x) &= k(G - f(x)) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate)
ist proportional zur Differenz $G - f(x)$.

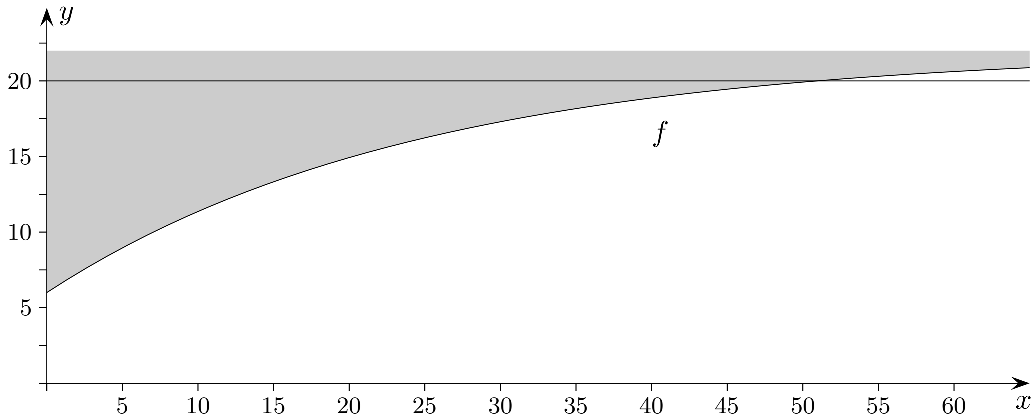
Für die exponentielle Abnahme $g(x) = a \cdot e^{-kx}$ bzw. $g(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$ gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank ($6°C$) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt $22°C$. Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert $22°C$ kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um 4 % der noch bis $22°C$ fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf $20°C$ erwärmt hat?

Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank ($6°C$) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt $22°C$. Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert $22°C$ kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um $4\,\%$ der noch bis $22°C$ fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf $20°C$ erwärmt hat?

$f(x) = 22 - 16 \cdot 0{,}96^x$
$f(x) = 22 - 16e^{-0{,}0408x}$

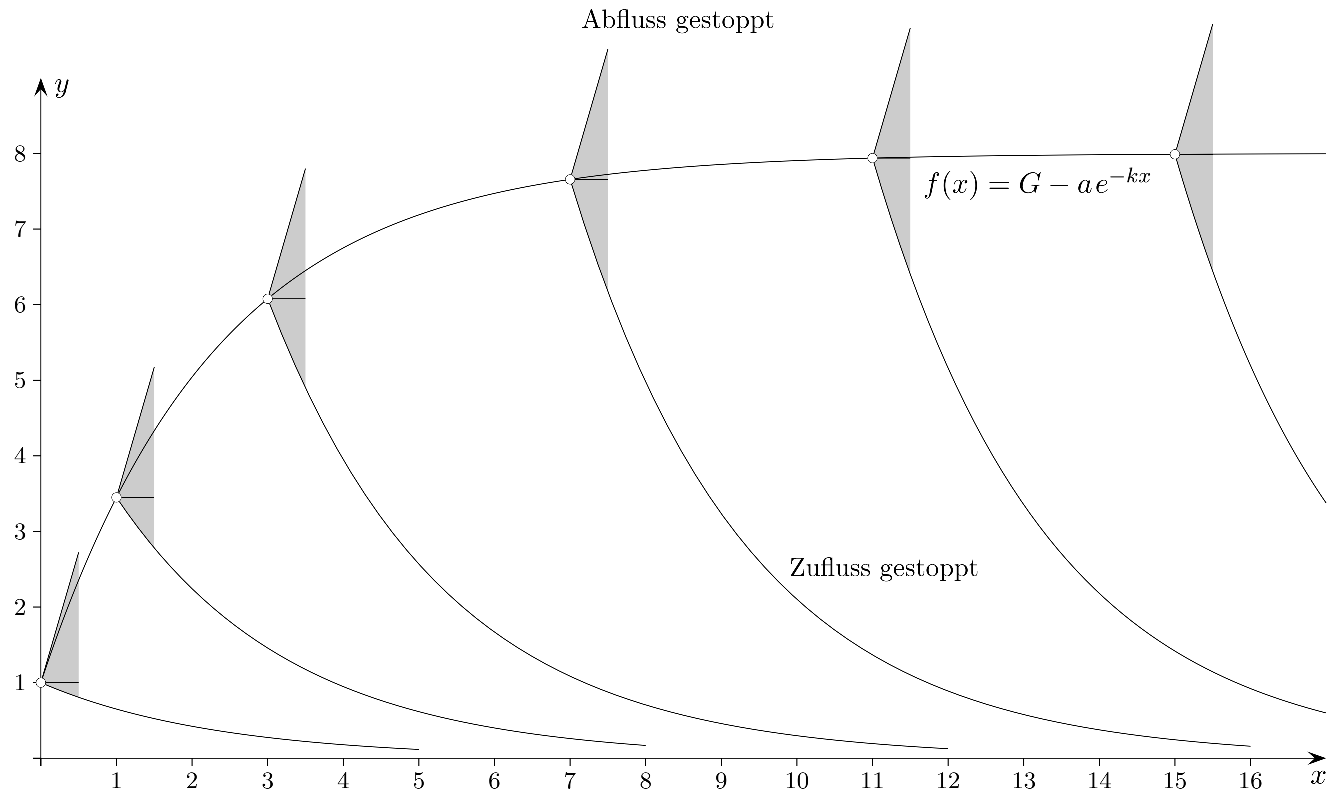
51 Minuten



Zu- und Abfluss

Die DGL des beschränkten Wachstums $f'(x) = k \cdot (G - f(x)), \quad k > 0$,
lässt sich leicht umformen zu: $f'(x) = -kf(x) + k \cdot G$, bzw. $f'(x) = -kf(x) + b$

Die Änderungsrate setzt sich nun aus einem zum Bestand proportionalen Anteil (mit negativem Vorzeichen) und einer konstanten Zuflussrate $b = k \cdot G$ zusammen.



Zu jedem Zeitpunkt x_0 liegt ein Zufluss mit konstanter Änderungsrate b vor.
Gleichzeitig erfolgt eine exponentielle Abnahme gemäß $f(x_0) \cdot e^{-kx}$ bzw. $f(x_0) \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$.
Es gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

Da mit größer werdendem $f(x)$ der Abfluss ansteigt, wird schließlich ein Gleichgewichtszustand erreicht. Würde ab einem bestimmten Zeitpunkt entweder der Zu- oder Abfluss gestoppt, so verliefe die weitere Entwicklung gemäß des verbleibenden Graphen (siehe Abb.).

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute $2\,mg$ eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute $4\,\%$ des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute 2 mg eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute 4 % des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

$f'(x) = -kf(x) + 2, \quad k = -\ln(0{,}96) = 0{,}04082$

$f'(x) = k\big(G - f(x)\big), \quad G = \frac{b}{k} = 49{,}0$

$f(x) = G - Ge^{-kx}$

$f(60) = 44{,}8$

ungenau:

$k = 0{,}04$

$G = 50{,}0$ beachte: $\frac{4}{100}G = 2$

$f(60) = 45{,}5$