

1. Weg zur e -Funktion Wachstumsverläufe
2. Exponentielles Wachstum $f(x) = a \cdot 1,15^x, \dots$
3. $f(x) = 2^x$
4. $f'(x) = f(x)$
5. Eulersche Zahl
6. $f'(x) = f(x)$ kurz gefasst
7. Exponentielles Wachstum $f(x) = a e^{kx}$
8. Begrenztes Wachstum
9. Temperaturzunahme
10. Zu- und Abfluss
11. Tropfinfusion

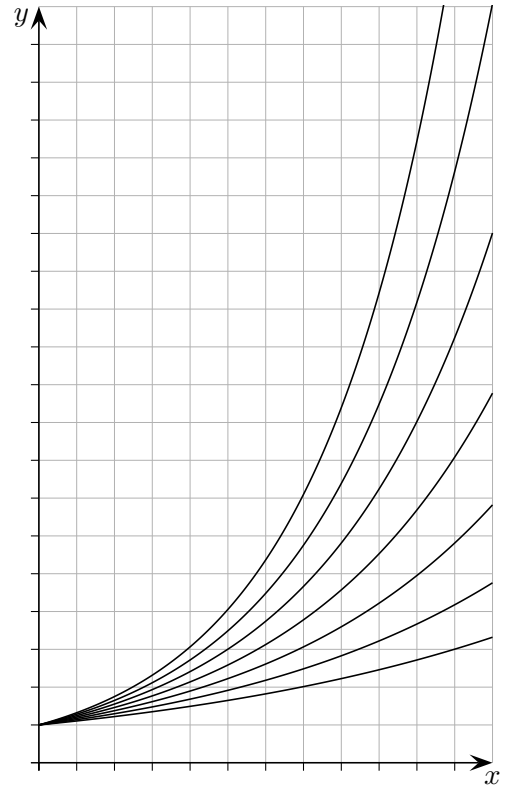
Differenzial- und Integralrechnung

Startseite

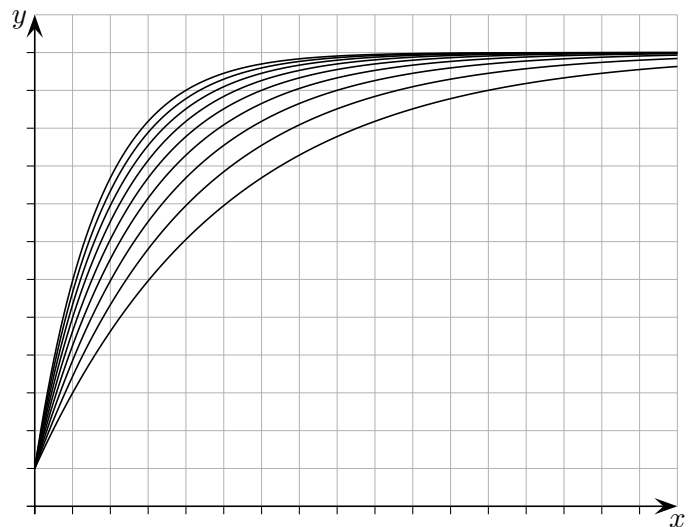
↑ Weg zur e -Funktion

Zur Einstimmung werden einige Wachstumsverläufe skizziert.

1. Exponentielles Wachstum

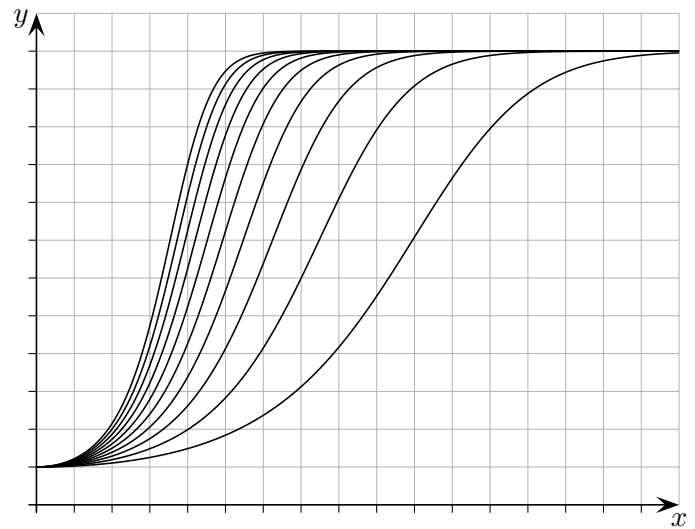


2. Begrenztes (beschränktes) Wachstum

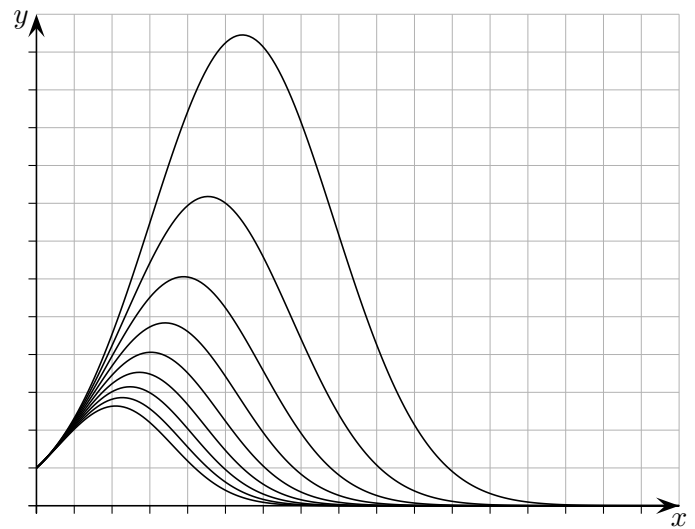


↑ Wachstumsverläufe

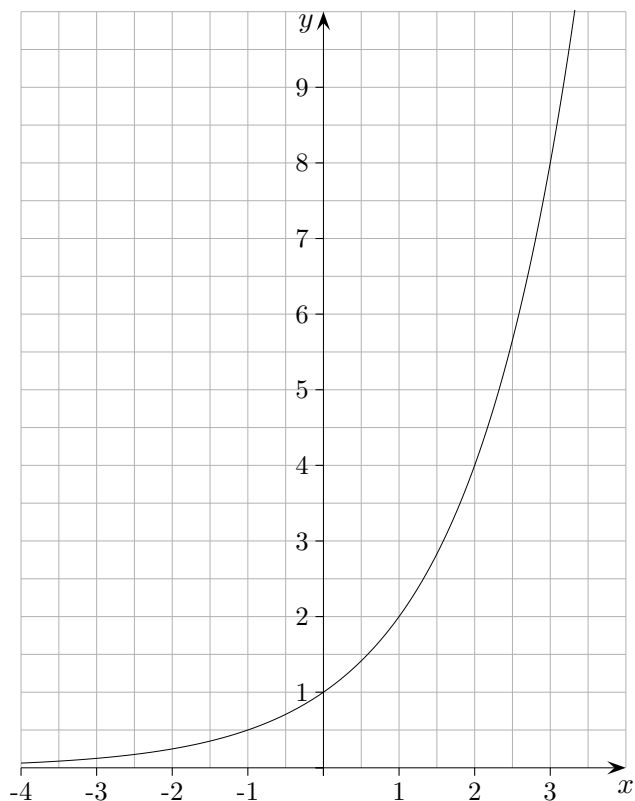
3. Logistisches Wachstum



4. Vergiftetes Wachstum



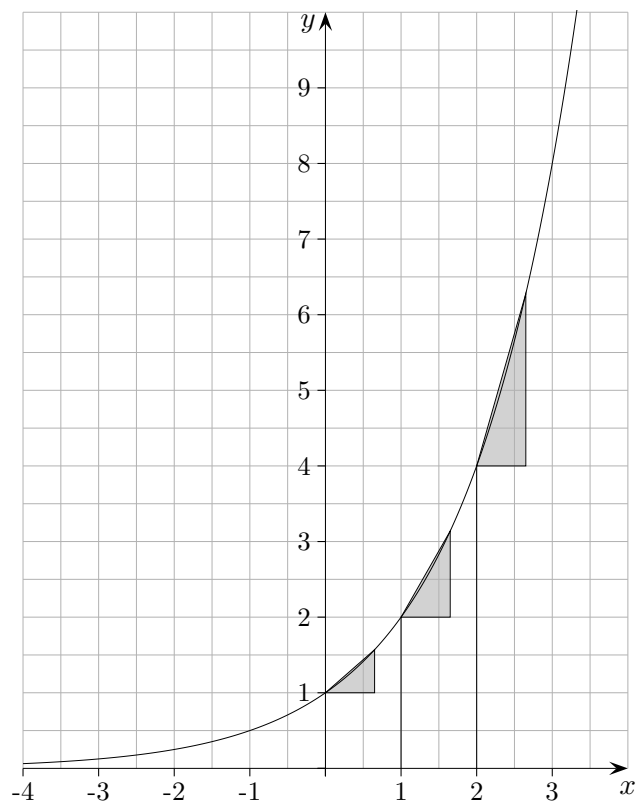
↑ Exponentielles Wachstum



Funktionen für exponentielles Wachstum, Beispiele:

1. $K_n = K_0 \cdot q^n$ Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$
2. $f(x) = a \cdot 2^x$ Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand a
3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$ Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten
4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit
5. $f(x) = a \cdot 1,15^x$ $1 + \frac{15}{100} = 1,15$, 15%-iger Zuwachs pro Zeiteinheit
6. $f(x) = a \cdot 0,85^x$ $1 - \frac{15}{100} = 0,85$, 15%-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15%-iger Zerfall

$$\uparrow f(x) = 2^x$$



Uns interessiert die Ableitung von $f(x) = 2^x$.

Das allgemeine Vorgehen (h -Methode), um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$

Hieraus erkennen wir:

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

Für die Ableitung der Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

$$f'(x) = k \cdot f(x), \quad k = f'(0) \text{ ist ein Streckfaktor.}$$

Erläutere:

Für das exponentielle Wachstum gilt:

Der Zuwachs Δy ist proportional zum Bestand.

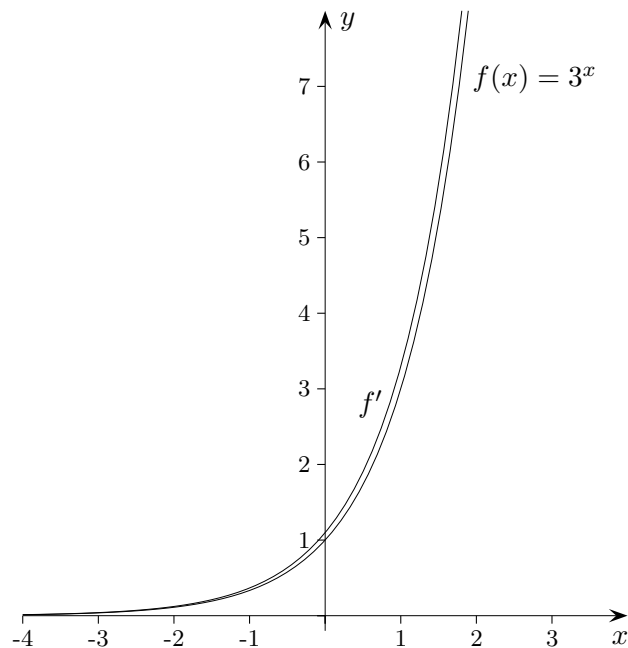
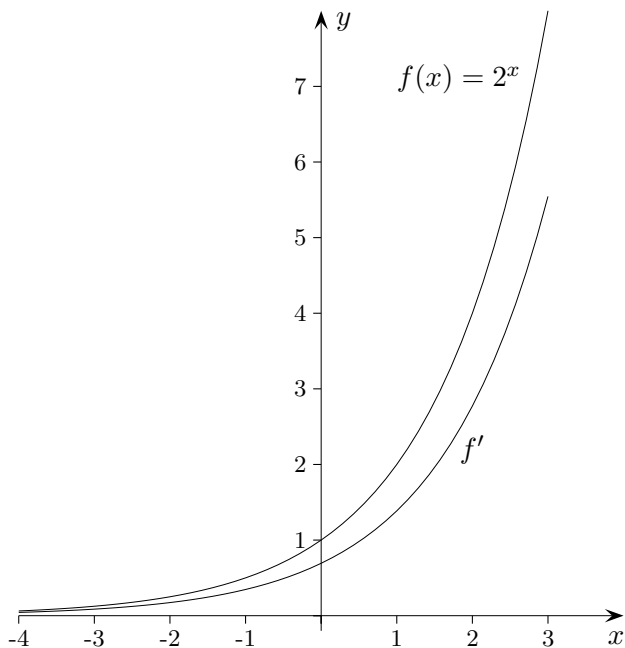
↑

$$\uparrow f'(x) = f(x)$$

Graphische Differentiation (Zeichnen der Tangenten und Ablesen der Steigungen) der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$ - die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a , für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

(Später kommen wir auf die Ableitung von $f(x) = 2^x$ zurück.)



Die Tangentengleichung im Ursprung wäre $y = x + 1$, beachte $f'(0) = 1$.

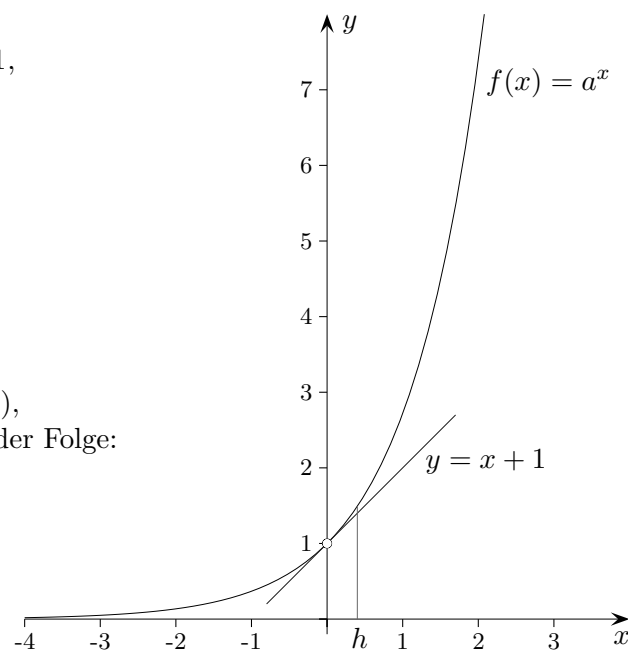
Für kleine h müsste dann gelten: $a^h \simeq h + 1$

Mit $h = \frac{1}{n}$ wäre für große n :

$$a^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n} \quad | \quad ()^n \quad \implies \quad a \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Setzen wir für n große Zahlen ein (10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^7), so erhalten wir gute Näherungen für den Grenzwert der Folge:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



↑

↑ Eulersche Zahl

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 460
10^2	2,704 813 829
10^3	2,716 923 932
10^4	2,718 145 926
10^5	2,718 268 237
10^6	2,718 280 468
10^7	2,718 281 763

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ wird nach Euler (1707 - 1783) mit e bezeichnet (e von exponential),

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ \dots$$

Siehe auch die Kettenbruchentwicklungen von e unter Verschiedenes.

Für die e -Funktion $f(x) = e^x$ gilt: $(e^x)' = e^x$.

An anderer Stelle (Approximation der e -Funktion) wird hergeleitet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Erläutere den Bezug zu $(e^x)' = e^x$.

Wie lautet die Ableitung von $f(x) = e^{3x}$?

Erläutere:

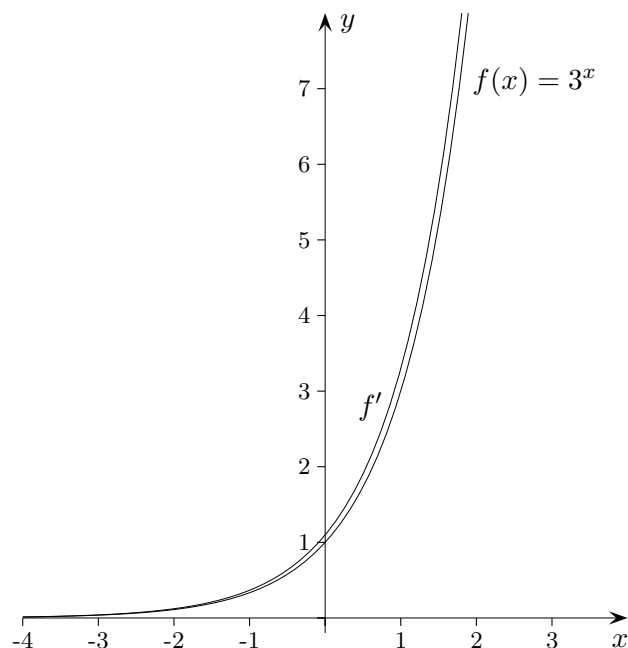
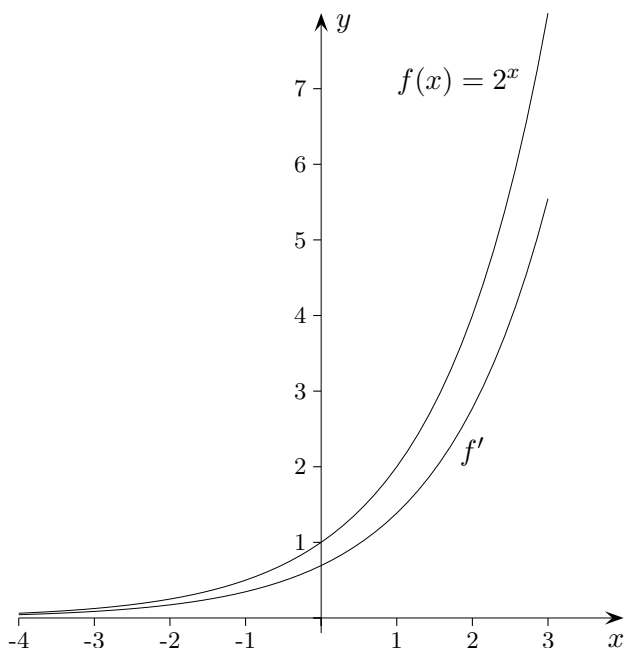
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3x+3h} - e^{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{3x} \frac{e^{3h} - 1}{h} = 3 \cdot e^{3x} \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3h} - 1}{3h}}_{f'(0) = 1} = 3 \cdot e^{3x}$$

Um $f(x) = 2^x$ abzuleiten, müssen wir uns zunächst mit Logarithmen zur Basis e befassen.

Dann sind wir in der Lage, $f(x) = 2^x = e^{\ln 2 \cdot x}$ mit der Kettenregel abzuleiten, $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$.

kurz gefasst

$$\uparrow f'(x) = f(x)$$



Graphische Differentiation der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 3^x$

- die Ableitung liegt einmal unterhalb, einmal oberhalb der jeweiligen Funktion - führt zur Frage:

Gibt es ein a , für das gilt: $(a^x)' = a^x$?

Die h -Methode, um die Ableitung an der Stelle x zu ermitteln, lautet:

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{f'(0)}$$

$f'(0)$ muss 1 sein, damit $(a^x)' = a^x$ gilt.

Für a folgt:

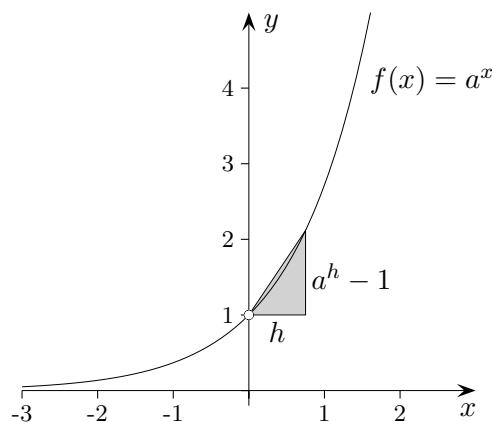
$$a = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Setze $h = 0,001$, $\frac{1}{h} = 1000$

$$h = 10^{-9}, \frac{1}{h} = 10^9$$

Der Grenzwert a wird nach Euler (1707-1783) mit e bezeichnet.

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459 \dots$$



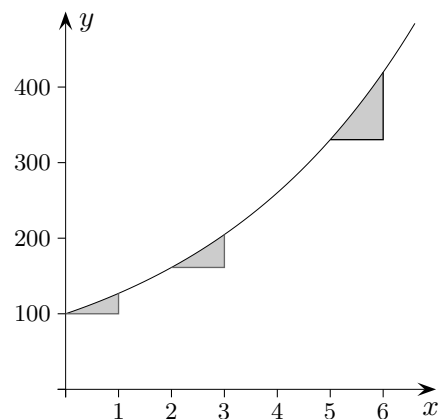
↑

↑ Exponentielles Wachstum

Mit den Funktionen $f(x) = ae^{kx}$ erfassen wir exponentielle Wachstumsvorgänge. Hierbei ist a der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ae^{kx} \\ f'(x) &= ae^{kx} \cdot k \\ f'(x) &= kf(x) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate) ist proportional zum Bestand.

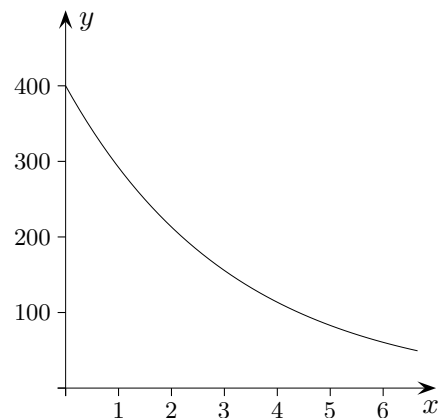


Mit $f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$

erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Wachstumskonstante k und dem Prozentsatz des jährlichen Wachstums, es gilt

$$e^k = 1 + \frac{p}{100}.$$

Für einen Wachstumsprozess sei $p = 4\%$. Ermittle k .



Für einen exponentiellen Abnahmeprozess $f(x) = ae^{-kx}$ bzw. $f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ gilt entsprechend

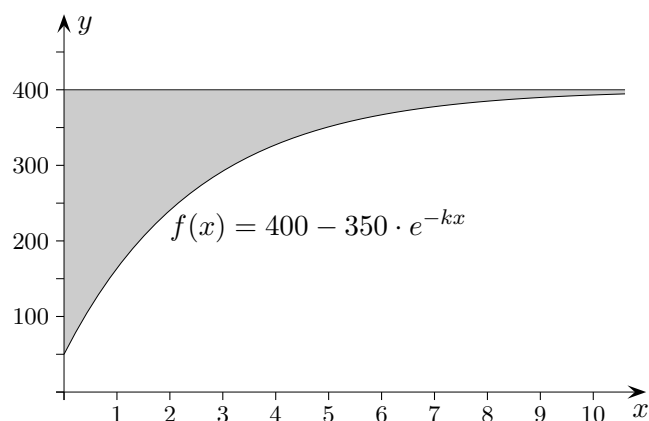
$$e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}.$$

Zeige, dass für die Halbwertszeit T , das ist die Zeit, in der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen ist, gilt:

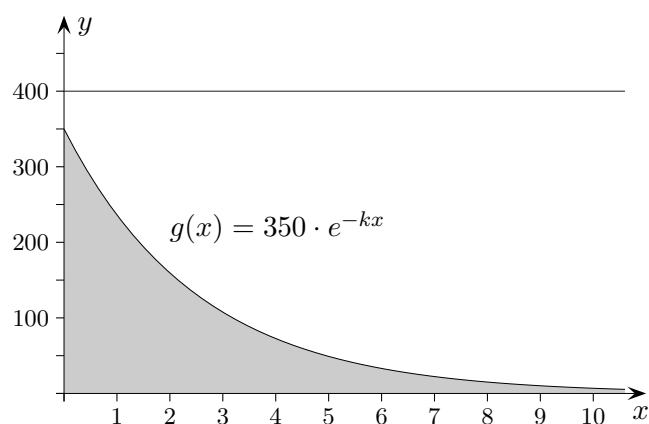
$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

↑

↑ Begrenztes Wachstum



Mit der Funktion $f(x) = G - ae^{-kx}$ erfassen wir begrenztes Wachstum.
 Von der Grenze G wird eine Funktion $g(x)$ für die exponentielle Abnahme subtrahiert.
 Hierbei ist $G - a$ der Anfangsbestand zur Zeit $x = 0$.



$$\begin{aligned} f(x) &= G - ae^{-kx} \\ f'(x) &= ae^{-kx} \cdot k \\ f'(x) &= k(G - f(x)) \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate)
 ist proportional zur Differenz $G - f(x)$.

Für die exponentielle Abnahme $g(x) = a \cdot e^{-kx}$ bzw. $g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

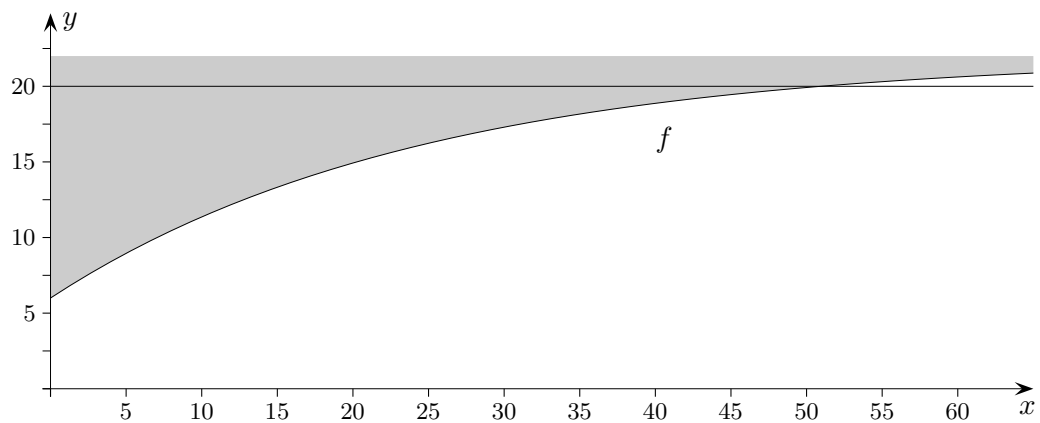
Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank (6°C) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt 22°C . Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert 22°C kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um 4% der noch bis 22°C fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf 20°C erwärmt hat?

Eine Flasche Milch wird aus dem Kühlschrank (6°C) genommen. Die Temperatur in der Küche beträgt 22°C . Anfangs nimmt die Temperatur der Milchflasche recht schnell zu. Je näher ihre Temperatur jedoch dem Wert 22°C kommt, desto langsamer erfolgt der weitere Temperaturanstieg. Die Temperaturzunahme kann als begrenztes Wachstum aufgefasst werden. Dabei soll angenommen werden, dass die Temperatur pro Minute um 4% der noch bis 22°C fehlenden Temperaturdifferenz zunimmt. Wird lange dauert es, bis sich die Milchflasche auf 20°C erwärmt hat?

$$f(x) = 22 - 16 \cdot 0,96^x$$

$$f(x) = 22 - 16e^{-0,0408x}$$

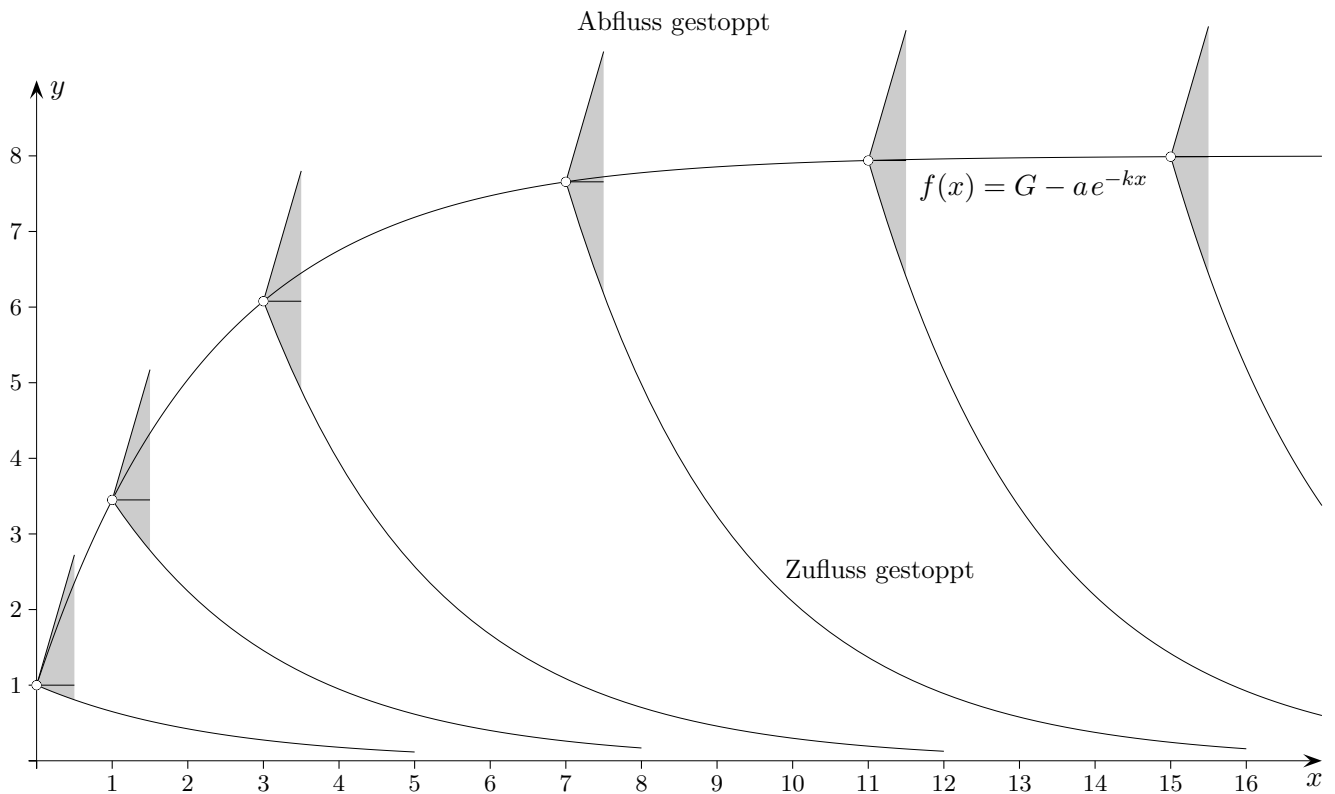
51 Minuten



↑ Zu- und Abfluss

Die DGL des beschränkten Wachstums $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$, $k > 0$, lässt sich leicht umformen zu: $f'(x) = -kf(x) + k \cdot G$, bzw. $f'(x) = -kf(x) + b$

Die Änderungsrate setzt sich nun aus einem zum Bestand proportionalen Anteil (mit negativem Vorzeichen) und einer konstanten Zuflussrate $b = k \cdot G$ zusammen.



Zu jedem Zeitpunkt x_0 liegt ein Zufluss mit konstanter Änderungsrate b vor.

Gleichzeitig erfolgt eine exponentielle Abnahme gemäß $f(x_0) \cdot e^{-kx}$ bzw. $f(x_0) \cdot (1 - \frac{p}{100})^x$.

Es gilt $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$.

Da mit größer werdendem $f(x)$ der Abfluss ansteigt, wird schließlich ein Gleichgewichtszustand erreicht. Würde ab einem bestimmten Zeitpunkt entweder der Zu- oder Abfluss gestoppt, so verlief die weitere Entwicklung gemäß des verbleibenden Graphen (siehe Abb.).

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute 2 mg eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute 4% des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

↑

Bei einer Tropfinfusion werden konstant pro Minute 2 mg eines Wirkstoffs zugeführt. Gleichzeitig baut der Körper pro Minute 4% des jeweils im Blut vorhandenen Wirkstoffs über Leber und Niere wieder ab. Die Infusion wird nach einer Stunde abgebrochen. Wie hoch ist die erreichte Wirkstoffmenge?

$$f'(x) = -kf(x) + 2, \quad k = -\ln(0,96) = 0,04082$$

$$f'(x) = k(G - f(x)), \quad G = \frac{b}{k} = 49,0$$

$$f(x) = G - Ge^{-kx}$$

$$f(60) = 44,8$$

ungenau:

$$k = 0,04$$

$$G = 50,0 \quad \text{beachte: } \frac{4}{100}G = 2$$

$$f(60) = 45,5$$

Differenzial- und Integralrechnung

Startseite