Vollständige Induktion

1. Wir wollen die Aussage: *Für alle natürlichen Zahlen gilt:* $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ beweisen.

   $(x)' = 1$ Dies ist unmittelbar einsichtig.

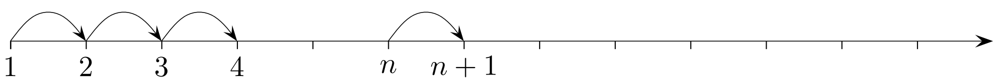
   $(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$ Wir verwenden die Produktregel.

   $(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

   $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$

   Um $(x^4)' = 4x^3$ zu beweisen, haben wir $(x^3)' = 3x^2$ verwendet.

   Um $(x^5)' = 5x^4$ zu beweisen, würden wir $(x^4)' = 4x^3$ verwenden.



2. Sei $A(n)$ die Aussage $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

   Bisher haben wir $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ bewiesen.

   Etwas genauer haben wir gezeigt:

   $A(1)$ Das war der Anfang.

   $A(1) \Longrightarrow A(2)$ In Worten: Aus $A(1)$ folgt $A(2)$

   $A(2) \Longrightarrow A(3)$

   $A(3) \Longrightarrow A(4)$

   Wenn es nun gelänge, den Übergang $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$
   (In Worten: Wenn die Aussage für n gilt, so gilt sie auch für den Nachfolger von n),
   allgemein zu beweisen, so wäre damit $A(n)$ für <u>alle</u> natürlichen Zahlen gültig.

3. Der Nachweis ist nicht schwierig:

   $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n$ Dies ist $A(n+1)$. Verwendet wurde $A(n)$.

   Damit wurde auf einen Schlag gezeigt:

   $A(4) \Longrightarrow A(5)$

   $A(5) \Longrightarrow A(6)$

   $A(6) \Longrightarrow A(7)$ und so fort

4. *Zusammengefasst: Um eine Aussage durch vollständige Induktion zu beweisen, genügt der Nachweis von*

   $A(1)$ *Dies ist der Induktionsanfang.*

   $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ *Das ist der Induktionsschluss von n auf $n+1$.*

5. Aufg. (eA)

   $$f(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

   Stelle eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf und beweise sie.

Vollständige Induktion

6. Beweise:

   a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

   b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

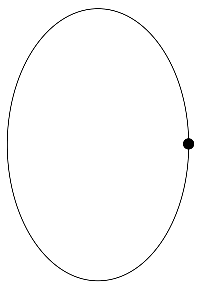
   c) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

   d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

   e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

   f) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7. Eulerscher Polyedersatz:
   Für beschränkte, konvexe Polyeder gilt: Anzahl Ecken + Anzahl Flächen = Anzahl Kanten + 2



   Mit diesem Graphen kann der Induktionsbeweis begonnen werden. Erläutere dies.
   Wo ist die 2. Fläche?
   Füge eine weitere Kante hinzu und untersuche die neue Situation.
   Wie sieht der allgemeine Schluss aus?

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Beweis:

1. Induktionsanfang $n = 1$, $A(1)$: $1 = 1^1$ *stimmt*

2. Induktionsschluss von n auf $n+1$

   $A(n) \implies A(n+1)$

   Schreibe hierzu $A(n+1)$ auf, formuliere also die obige Formel für $n+1$:

   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$

   Um die Gleichheit zu zeigen, wird $A(n)$ verwendet: Die ersten n Summanden ergeben n^2.

   $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}_{n^2} + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$

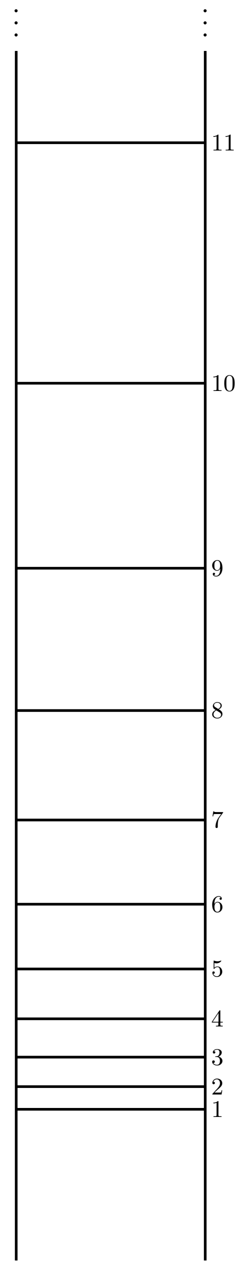
   Es verbleibt der Nachweis von:

   $$n^2 + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

   $$\ldots$$

Der verbleibende Nachweis ist nicht immer so einfach wie in diesem Beispiel.
Häufig führt geschicktes Ausklammern zum Ziel.

Vollständige Induktion, Veranschaulichung



Wir wollen beweisen, dass wir auf einer Leiter, deren Ende nicht erkennbar ist, beliebig weit nach oben klettern könnten.
Hierzu zeigen wir zunächst (Induktionsanfang), dass wir in der Lage sind, auf die erste Stufe zu gelangen.
Weiter weisen wir nach, dass wir, falls wir schon auf einer beliebigen Stufe wären, stets auch die nächst Höhere erreichen könnten (Induktionsschritt).
Beachte die Voraussetzung: Wir nehmen an, dass wir die Stufe n erreicht hätten.