

# Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$

Ihr Graph sei  $K$ .

a) Skizzieren Sie  $K$  im Intervall  $[0, 4]$ .

Geben Sie die Periode von  $f$  an.

Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von  $K$  auf ganz  $\mathbb{R}$  an.

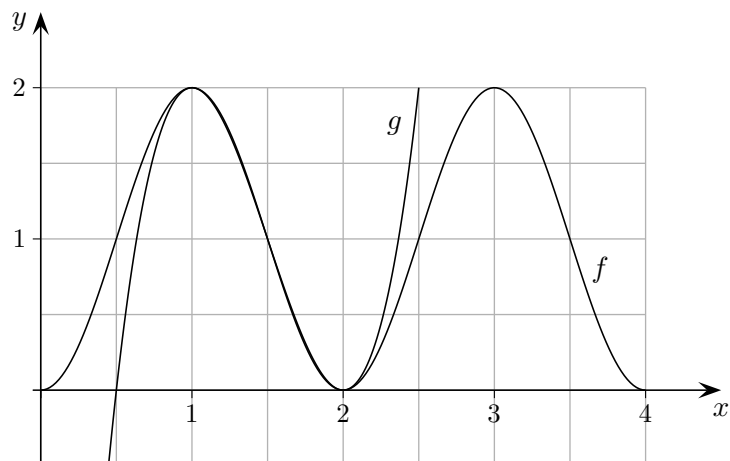
Für welche Werte von  $x$  nimmt  $f$  im Intervall  $[0, 2]$  den Wert 1 an?

b) Die Funktion  $f$  kann auch in der Form  $f(x) = a - \cos(bx)$  dargestellt werden. Bestimmen Sie  $a$  und  $b$ .

c)  $K$  und die  $x$ -Achse begrenzen zwischen benachbarten Nullstellen jeweils eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt einer solchen Fläche exakt.

d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $g$  dritten Grades hat in  $P(1 | 2)$  einen Hochpunkt und in  $Q(2 | 0)$  einen Tiefpunkt. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für  $g$ .

An welchen Stellen im Intervall  $[1, 2]$  weichen die Funktionswerte von  $f$  und  $g$  am stärksten voneinander ab?



1. a)

Periode  $p = 2$

$H(2k + 1 \mid 2), k \in \mathbb{Z}$

$T(2k \mid 0), k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 0,5$  und  $x_1 = 1,5$

b)  $f(0) = 0 \implies a = 1$

$2 = p = \frac{2\pi}{b} \implies b = \pi$

$f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$

c)  $A = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (1 - \cos(\pi \cdot x)) dx = \left[ x - \frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot x) \right]_0^2 = 2$

d) Ansatz  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

1.  $g(1) = 2$

2.  $g'(1) = 0$

3.  $g(2) = 0$

4.  $g'(2) = 0$

1.  $a + b + c + d = 2$

2.  $3a + 2b + c = 0$

3.  $8a + 4b + 2c + d = 0$

4.  $12a + 4b + c = 0$

Die Funktion lautet:  $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

Maximalstellen für  $d(x) = |f(x) - g(x)|$  lauten:  $x_1 = 1,28$  und  $x_1 = 1,72$   
 $d_{\max} = 0,02$ .

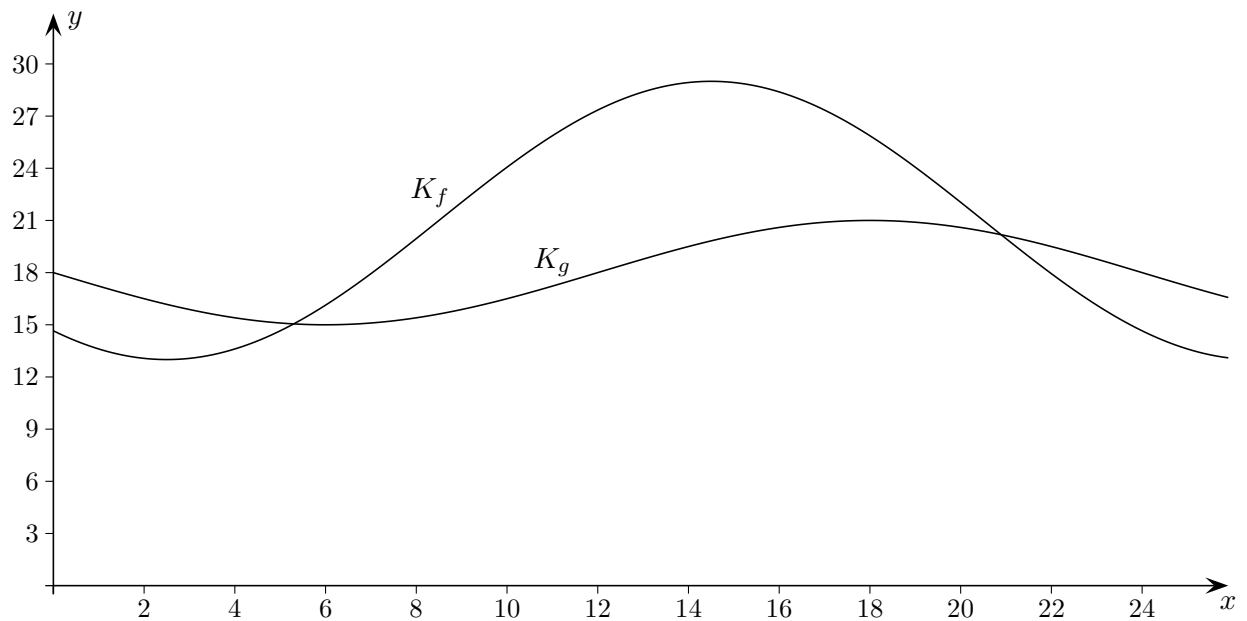
# Trigonometrische Funktionen

2. Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + 21, \quad 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden ( $x$  in Stunden,  $f(x)$  in  $^{\circ}\text{C}$ ).

Die Abbildung zeigt den Graphen  $K_f$  von  $f$  sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf  $K_g$ .



- a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens  $22^{\circ}\text{C}$ ? Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten? Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.
- b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion  $g$ , der den Temperaturverlauf  $K_g$  wiedergibt. Beschreiben Sie, wie  $K_g$  aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit  $y = \sin x$  entsteht. Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe  $K_f$  und  $K_g$  an. Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?
- c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion  $h$  mit

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + ax + b, \quad 24 \leq x \leq 48$$

beschrieben werden ( $x$  in Stunden,  $h(x)$  in  $^{\circ}\text{C}$ ).

Dabei stimmen zum Zeitpunkt  $x = 24$  sowohl die durch  $f$  und  $h$  beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie  $a$  und  $b$ .

Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term  $ax + b$  bestimmt wird.

2. a) Nach 2,5 Stunden (um 2:30 Uhr) beträgt die minimale Außentemperatur  $13^\circ C$ , nach 14,5 Stunden (um 14:30 Uhr) beträgt die maximale Außentemperatur  $29^\circ C$ .

$$x \leq 8,98 \text{ und } x \geq 20,02$$

$$8,98 + (24 - 20,02) = 13 \text{ [Stunden]}$$

Der Temperaturanstieg im Freien ist bei  $x = 8,5$  am größten.

Durchschnittliche Temperatur zwischen 6 und 18 Uhr beträgt  $25,0^\circ C$ .

- b) Ansatz:  $g(x) = a \cdot \sin[b(x + c)] + d$ ,

Der Graph von  $g$  ist um 18 nach oben verschoben, also  $d = 18$ .

Die Amplitude beträgt  $a = 3$ .

Die Periode von  $g$  beträgt 24 und damit gilt  $24 = \frac{2\pi}{b} \implies b = \frac{\pi}{12}$

Der Graph ist um 12 nach rechts verschoben, also  $c = -12$ .

$$g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 12)\right] + 18$$

Der Graph von  $g$  entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:

- 1) Streckung mit dem Faktor  $a = 3$  in  $y$ -Richtung
- 2) Streckung mit dem Faktor  $\frac{12}{\pi}$  in  $x$ -Richtung (Kehrwert!, beachte die Perioden  $2\pi$  und 24)
- 3) Verschiebung um 12 nach rechts
- 4) Verschiebung um 18 nach oben

Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht.

Größter Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur:

Die Differenz wird dargestellt durch die Funktion  $d(x) = |f(x) - g(x)|$ .

Maximum an der Stelle  $x = 13,1$ , also um 13:06 Uhr.

- c)  $h(24) = f(24) \iff 24a + b = 22,587$

$$h'(24) = f'(24) \iff a - 0,319 = 0$$

$$\implies a = 0,32 \text{ und } b = 14,9$$

$$D = \frac{1}{24} \int_{24}^{48} \left( \underbrace{10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right]}_{\text{Periode } p = 24, \text{ Integral ist Null}} + ax + b \right) dx$$

Periode  $p = 24$ , Integral ist Null

## Trigonometrische Funktionen

3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$  im Intervall  $\left[-\frac{3}{2}\pi \mid \frac{5}{2}\pi\right]$ .

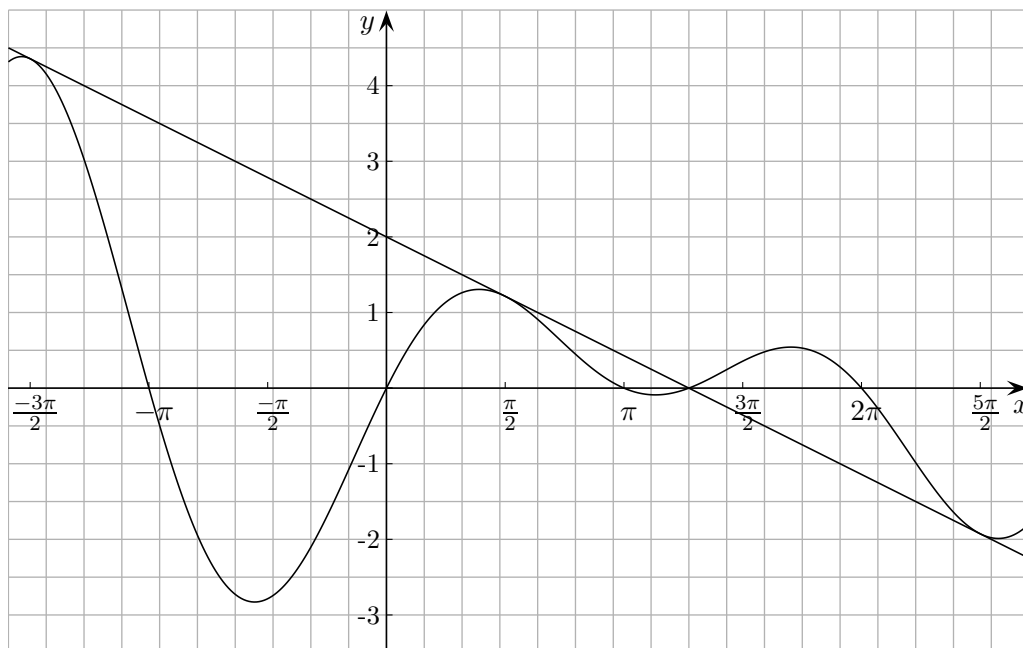
b) Zeigen Sie algebraisch, dass die Gerade  $g$  mit  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  im Punkt  $P\left(\frac{\pi}{2} \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$  Tangente für den Graphen von  $f$  ist.

Untersuchen Sie, ob die Gerade  $g$  noch für weitere Punkte des Graphen von  $f$  Tangente ist.

c) Zeigen Sie, dass gilt:  $f''(x) + f(x) = -\cos(x)$

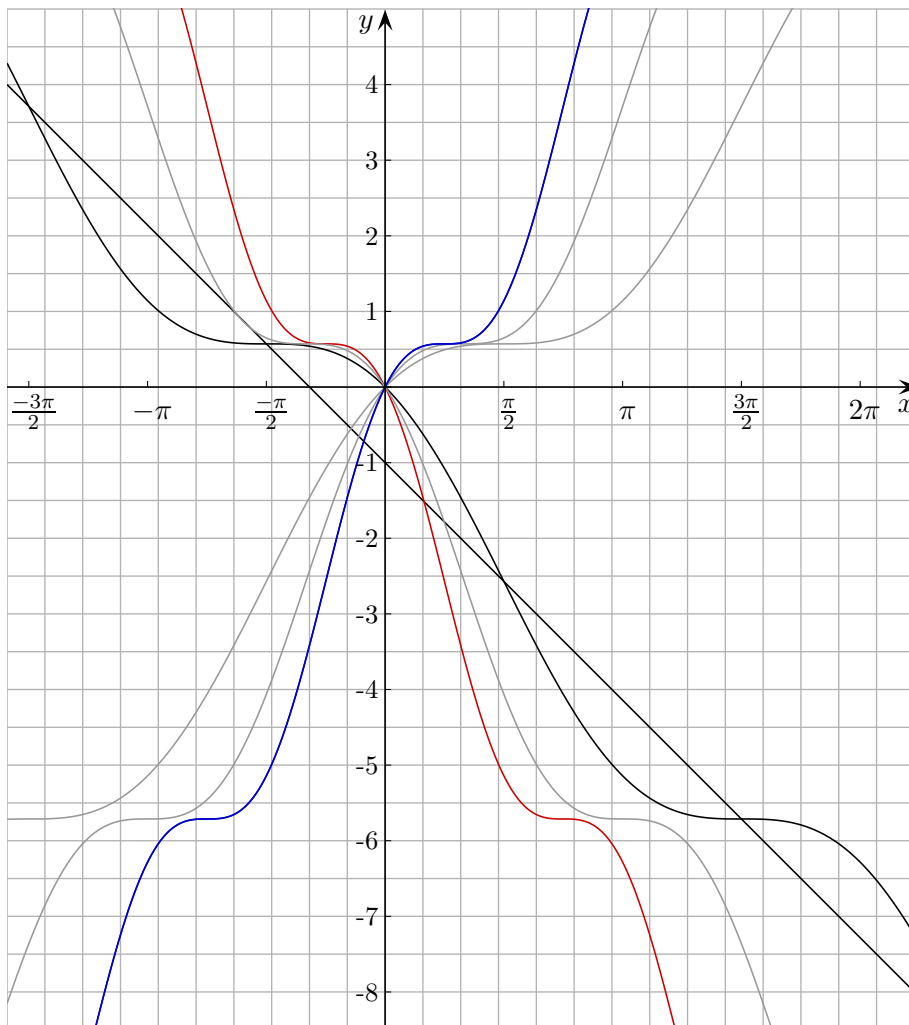
und begründen Sie damit (durch Integration beider Seiten):

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x) + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \cos(x) + C$$



# Trigonometrische Funktionen

4. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von  $f_k$  aus dem Graph von  $f_1$  hervor?
  - Begründen Sie: Die Graphen von  $f_k$  besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.
  - Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.
  - Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von  $f_1$  und die Gerade  $y = -x - 1$  für  $0 \leq x \leq 2\pi$  einschließen.
  - Zeigen Sie, dass  $f_1$  punktsymmetrisch bezüglich  $P(\frac{3}{2}\pi \mid f_1(\frac{3}{2}\pi))$  ist.
  - Die Gerade  $y = -kx - 1$  und der Graph von  $f_k$  schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche  $A$  ein. Ermitteln Sie den Wert für  $k$ , damit gilt:  $A = 4 \text{ FE}$ .




---

*Roofls*

---

# Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktionenschar  $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von  $f_k$  aus dem Graph von  $f_1$  hervor?

Streckung/Stauchung in  $x$ -Achsenrichtung für  $k > 0$   
Der Graph von  $f_{-k}$  geht durch  $y$ -Achsen-Spiegelung aus dem Graphen von  $f_k$  hervor.  
Dieses wird im Weiteren häufig verwendet.

b) Begründen Sie: Die Graphen von  $f_k$  besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.

Bed. für  $f_1$ :  $\cos(x) = x + 1$ ,  $x = 0$

c) Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.

$$f_k''(x) = -\cos(kx) \cdot k^2$$

$$W\left(\frac{\pi}{2k} + z\frac{\pi}{k} \mid \dots\right), z \in \mathbb{Z}$$

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von  $f_1$  und die Gerade  $y = -x - 1$  für  $0 \leq x \leq 2\pi$  einschließen.

$$A = 4$$

e) Zeigen Sie, dass  $f_1$  punktsymmetrisch bezüglich  $P\left(\frac{3}{2}\pi \mid f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$  ist.

$$g(x) = f_1\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) - \left(x + \frac{3}{2}\pi\right) - 1 = \sin(x) - x - \frac{3}{2}\pi - 1$$

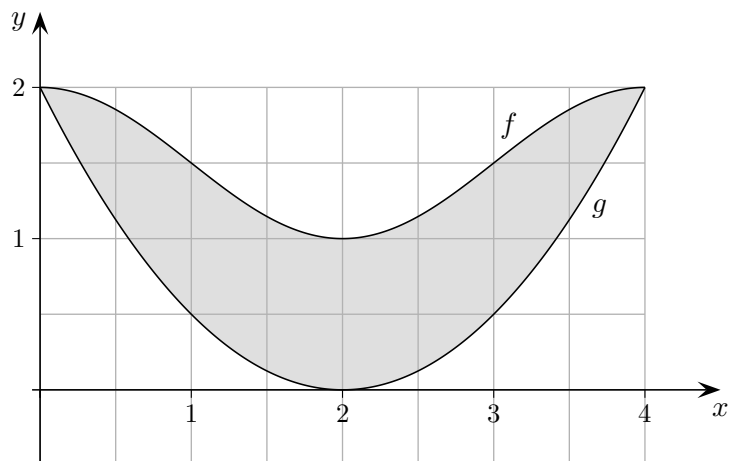
$$h(x) = \sin(x) - x \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

$$\text{beachte: } g(0) = -\frac{3}{2}\pi - 1 = f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

f) Die Gerade  $y = -kx - 1$  und der Graph von  $f_k$  schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche  $A$  ein. Ermitteln Sie den Wert für  $k$ , damit gilt:  $A = 4$  FE.

$$x_1 = \frac{\pi}{2k}, \quad x_2 = \frac{3}{2k}\pi$$

Für  $k = 1$  gilt:  $A = 2$ . Daher muss  $k = \frac{1}{2}$  sein.



- a) Wie groß ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der trigonometrischen Funktion  $f$  und der Parabel  $g$ ?
- b) Unter welchem Winkel treffen sich die Graphen bei  $x = 4$ ?

a)  $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3}{2}$

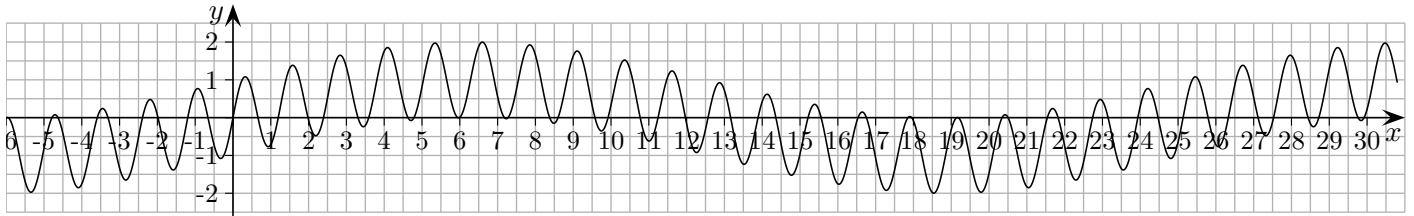
$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$$

$$A = \frac{10}{3} \text{ FE}$$

b)  $\alpha = 63,4^\circ$



## Gemeinsame Periode



Abgebildet ist der Graph von  $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$  für  $a = 5$  und  $b = \frac{1}{4}$ .  
Wie kann die Periode aus  $a$  und  $b$  bestimmt werden?

Die Perioden der Teilfunktionen lauten  $p_1 = \frac{2}{5}\pi$  und  $p_2 = 8\pi$ .

Für eine Funktion mit der Periode  $p$  ist auch ein ganzzahliges Vielfaches von  $p$  ein Periodenintervall.

Die Periode von  $f$  ist daher das kleinste ganzzahlige Vielfache von  $p_1$  und  $p_2$ , hier also  $8\pi$ .

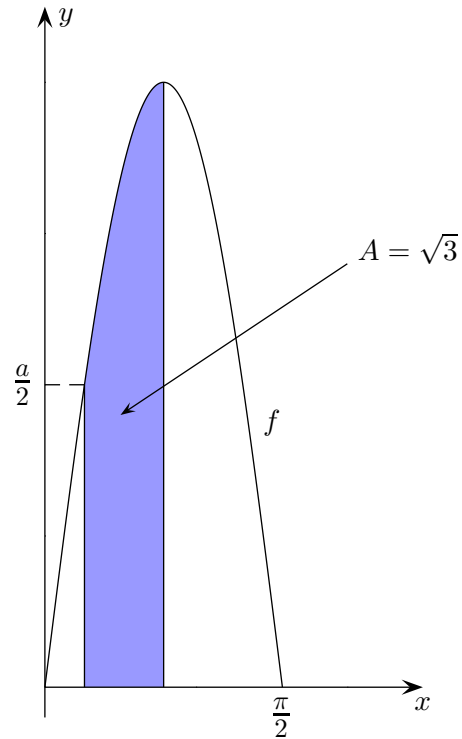
Die (in Ni mögliche) Ermittlung zweier Maxima mit dem GTR ist etwas mühsam.

Mit  $f$  besitzt auch  $f'$  die Periode  $p$ .

Für die obige Funktion  $f$  gilt:  $f'(0) = f'(8\pi) = \frac{21}{4}$  und für  $0 < x < 8\pi$  ist  $f'(x) < \frac{21}{4}$ .

Dies belegt, dass das kürzeste Periodenintervall die Länge  $8\pi$  hat.

# Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von  $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ .  
Bestimme  $a$  und  $b$ .

Periodenlänge  $\pi \implies b = 2$

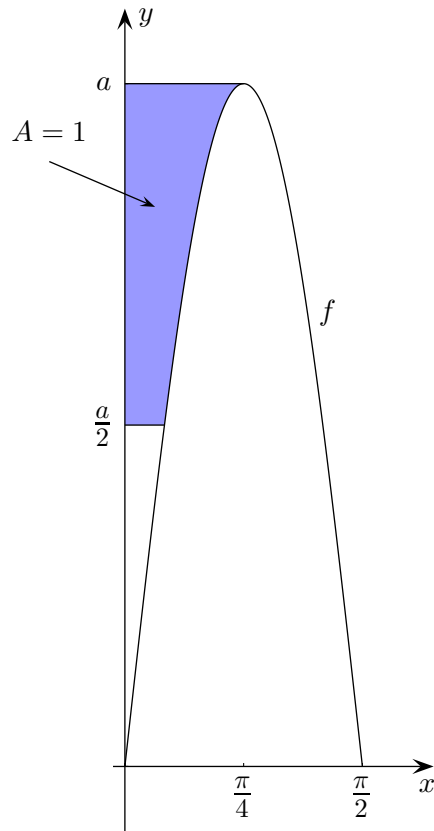
untere Integrationsgrenze:  $f(x) = \frac{a}{2} \implies x = \frac{\pi}{12}$

$$A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sqrt{3} \implies a = 4$$

---

Roolfs

## Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von  $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ .  
Bestimme  $a$  und  $b$ .

Periodenlänge  $p = \pi \implies b = 2$

$$a \cdot \left[ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx \right] = 1 \implies a = 4,515$$

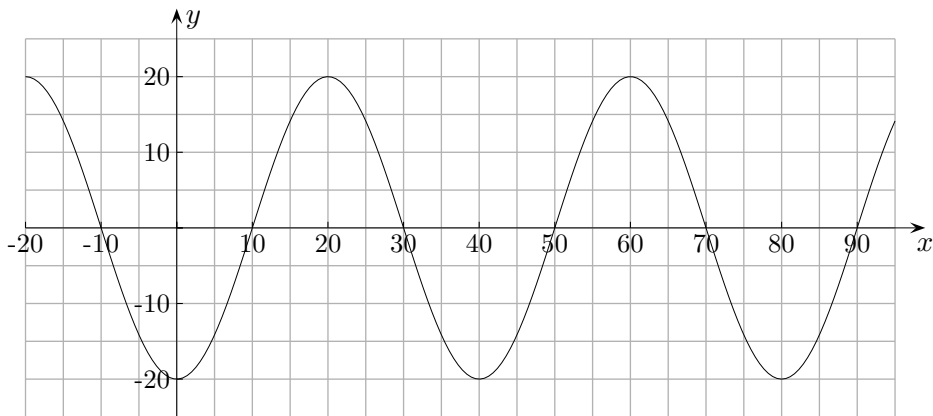
---

*Roolfs*

---

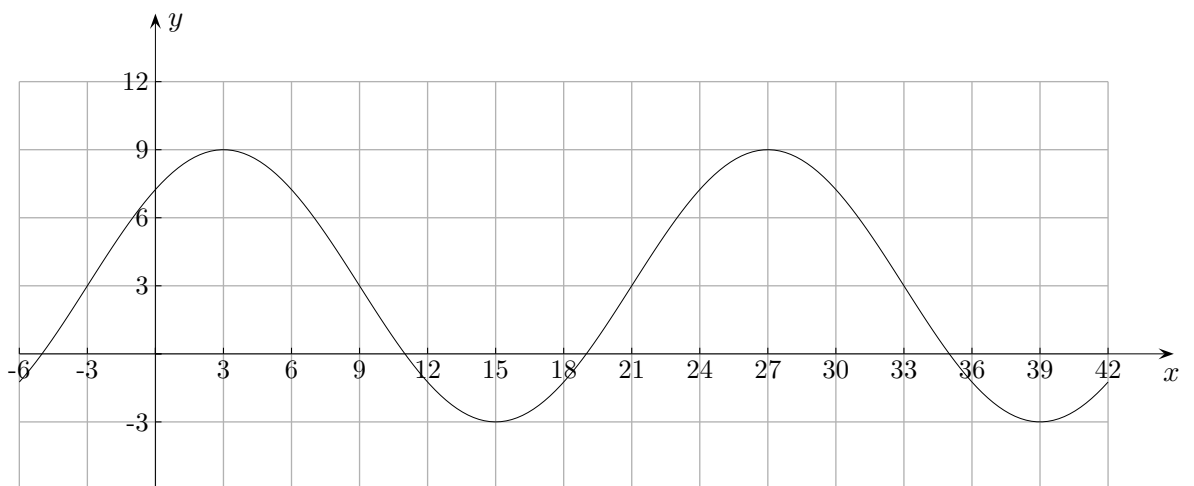
# Trigonometrische Funktionen

a)



Der Graph von  $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x - \frac{\pi}{c}\right)$  ist dargestellt. Bestimme  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

b)

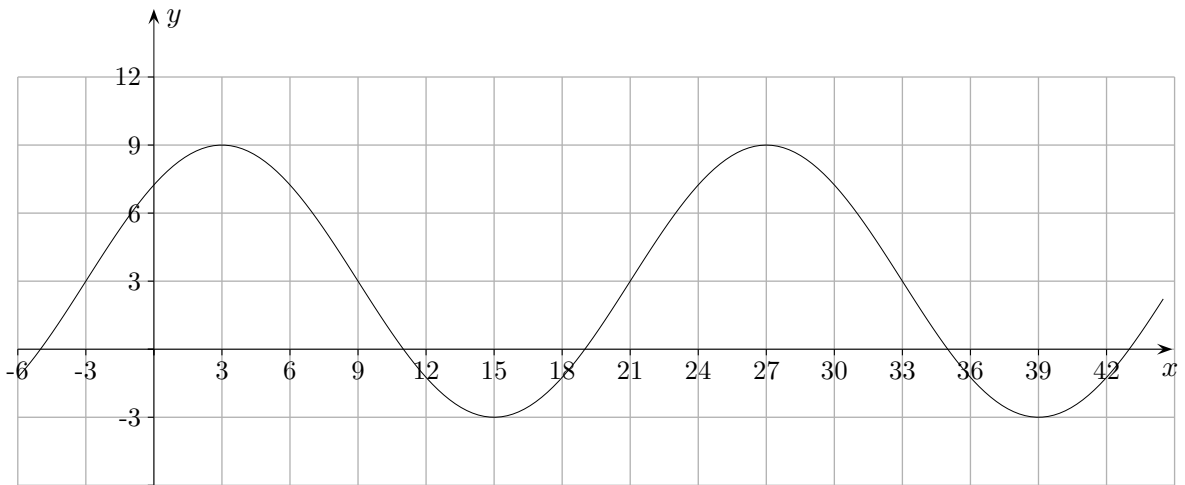


Der Graph von  $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{c}\right) + d$  ist dargestellt. Bestimme  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ .

a)  $a = 20, b = 20, c = 2$

b)  $a = 6, b = 12, c = 4, d = 1$

# Sinus-Funktion



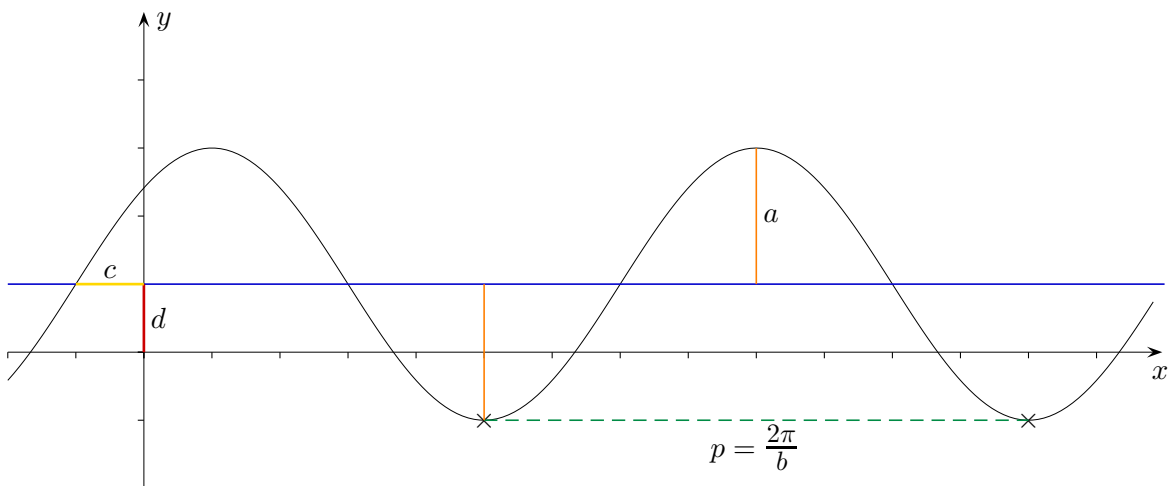
nach rechts verschieben ( $c > 0$ ):

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$$

nach links verschieben:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

Zuerst  $d$  ermitteln, dann  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .



$$f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(x + 3)\right) + 3$$

---

Roofls

---

# Trigonometrische Funktionen

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von  $f$ .  
Welche Symmetrien weist der Graph von  $f$  auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

# Trigonometrische Funktionen Ergebnisse

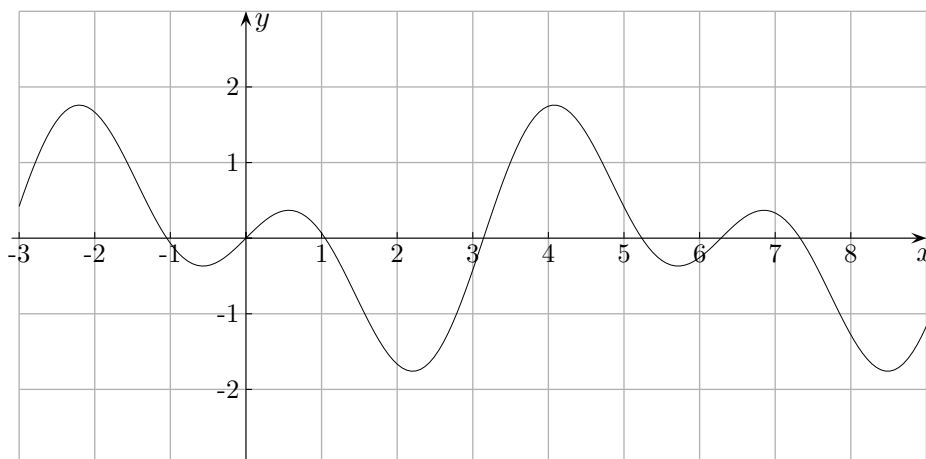
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von  $f$ .  
Welche Symmetrien weist der Graph von  $f$  auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode  $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 2\pi$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}\pi$ ,  $x_4 = \frac{5}{3}\pi$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:

$$\cos(x) - 4 \cdot \cos^2(x) + 2 = 0$$

$x_1 = 0,568$ ,  $x_2 = 2,206$ ,  $x_3 = 4,078$ ,  $x_4 = 5,715$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der  $x$ -Achse, deren  $x$ -Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist.



# Trigonometrische Funktionen

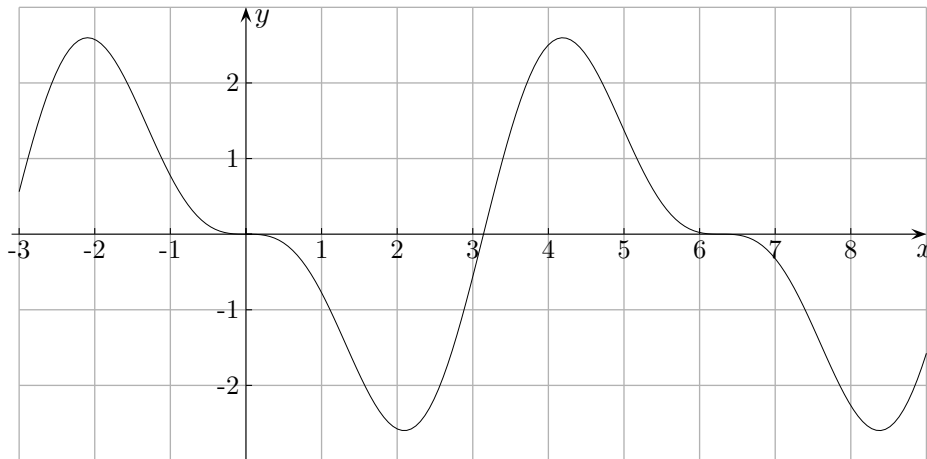
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \sin(2x) - 2 \sin(x)$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von  $f$ .  
Welche Symmetrien weist der Graph von  $f$  auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode  $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = 2\pi$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen, notw. Bed.:

$$4 \cdot \cos^2(x) - 2 \cos(x) - 2 = 0$$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der  $x$ -Achse, deren  $x$ -Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist.

# Trigonometrische Funktionen

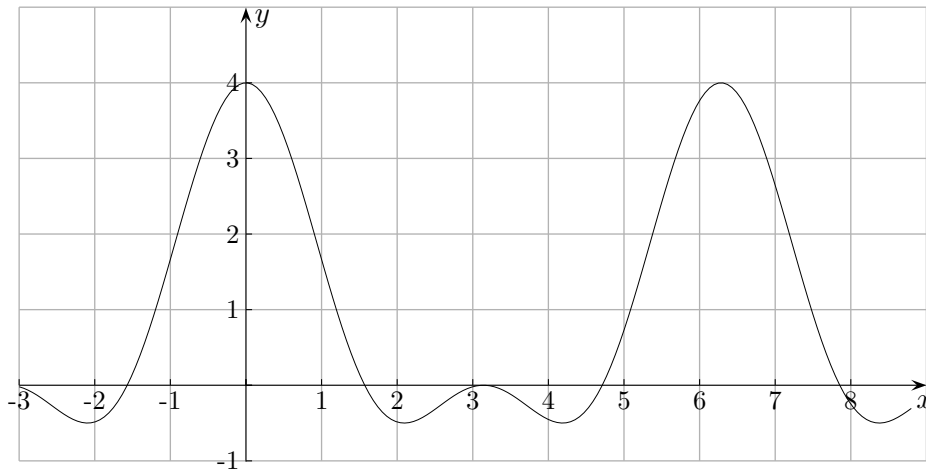
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \cos(2x) + 2 \cos(x) + 1$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von  $f$ .  
Welche Symmetrien weist der Graph von  $f$  auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode  $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_{1/2} = \pm\pi$ ,  $x_{3/4} = \pm\frac{1}{2}\pi$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:

$$\sin(x)(1 + 2 \cos(x)) = 0$$

$x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $x_3 = \frac{4}{3}\pi$ , sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse und zu allen Parallelen, deren Abstand ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist.

---

*Roofs*

---

# Trigonometrische Funktionen

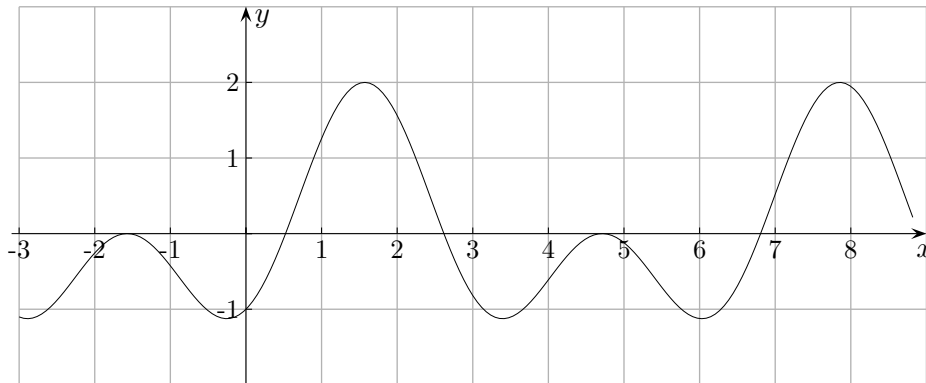
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von  $f$ .  
Welche Symmetrien weist der Graph von  $f$  auf?

Es gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$



Periode  $p = 2\pi$

Nullstellen:

$$2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Zwischenlösungen:

$$\sin(x) = -1 \text{ und } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{6}\pi, x_2 = \frac{5}{6}\pi, x_3 = \frac{3}{2}\pi, \text{ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.}$$

Extremstellen, notw. Bed.:

$$\cos(x) \cdot (1 + 4 \sin(x)) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\pi, x_2 = \frac{3}{2}\pi, x_3 = 3,394, x_4 = 6,031, \text{ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.}$$

Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch zu allen Parallelen zur  $y$ -Achse,

deren Abstand  $\frac{1}{2}\pi$  oder  $\frac{3}{2}\pi$  plus einem ganzzahligen Vielfachen der Periode beträgt.

---

*Roofls*

# Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) \cdot \cos(tx)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $A(t)$  der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von  $f_t$  in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.

Für welches  $t$  ist  $A(t)$  minimal?

2. Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{2} \cdot x\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeichnen Sie die Graphen für  $t = 1$  und  $t = 2$ .  
Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse bilden.
  - b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für  $t = 2$  und allgemeines  $t$ .  
Untersuchen Sie, ob es Werte von  $t$  gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist.
  - c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster  $x$ -Koordinate.
3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel)  $g$  berührt den Graphen der Sinusfunktion  $f(x) = \sin(x)$  in  $O(0 | 0)$  und  $A(\pi | 0)$ ?
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von  $f$  und  $g$ .
  - c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von  $f$  und  $g$  im Bereich  $0 \leq x \leq \pi$ ?

# Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = (\frac{t^2}{2} + 1) \cdot \cos(tx)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Sei  $A(t)$  der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von  $f_t$  in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.

Für welches  $t$  ist  $A(t)$  minimal?  $x_N = \frac{\pi}{2t}$ ,  $A(t) = \frac{t^2 + 2}{2t}$ ,  $t_{\min} = \sqrt{2}$

2. Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin(\frac{t\pi}{2} \cdot x)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeichnen Sie die Graphen für  $t = 1$  und  $t = 2$ .

Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse bilden.  $\alpha_1 = 14,0^\circ$ ;  $\alpha_2 = 21,3^\circ$

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für  $t = 2$  und allgemeines  $t$ .  $A_2 = \frac{10}{\pi}$ ,  $A_t = \frac{4(t^2 + 1)}{\pi t}$

Untersuchen Sie, ob es Werte von  $t$  gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist.  $t_{\min} = 1$

- c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster  $x$ -Koordinate.

$$\text{Max}(\frac{1}{t} \mid t^2 + 1), \quad h(x) = \frac{1}{x^2} + 1$$

3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel)  $g$  berührt den Graphen der Sinusfunktion

$$f(x) = \sin(x) \text{ in } O(0 \mid 0) \text{ und } A(\pi \mid 0)? \quad g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + x$$

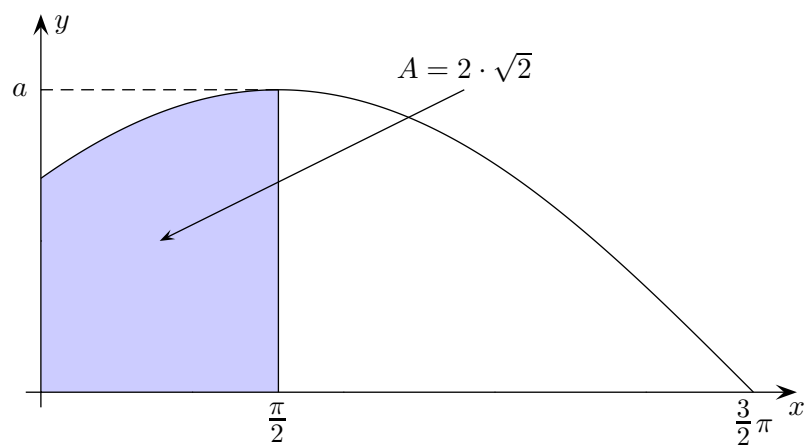
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von  $f$  und  $g$ .

$$A = 2 - \frac{\pi^2}{6} = 0,355$$

- c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von  $f$  und  $g$  im Bereich  $0 \leq x \leq \pi$ ?

$$d_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

## Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von  $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$ .  
Bestimme  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

$$\text{Periodenlänge } 4\pi \implies b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Verschiebung " } \longrightarrow \text{ " um } \frac{\pi}{2} \implies c = -\frac{\pi}{4}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2 \cdot \sqrt{2} \implies a = 2$$

---

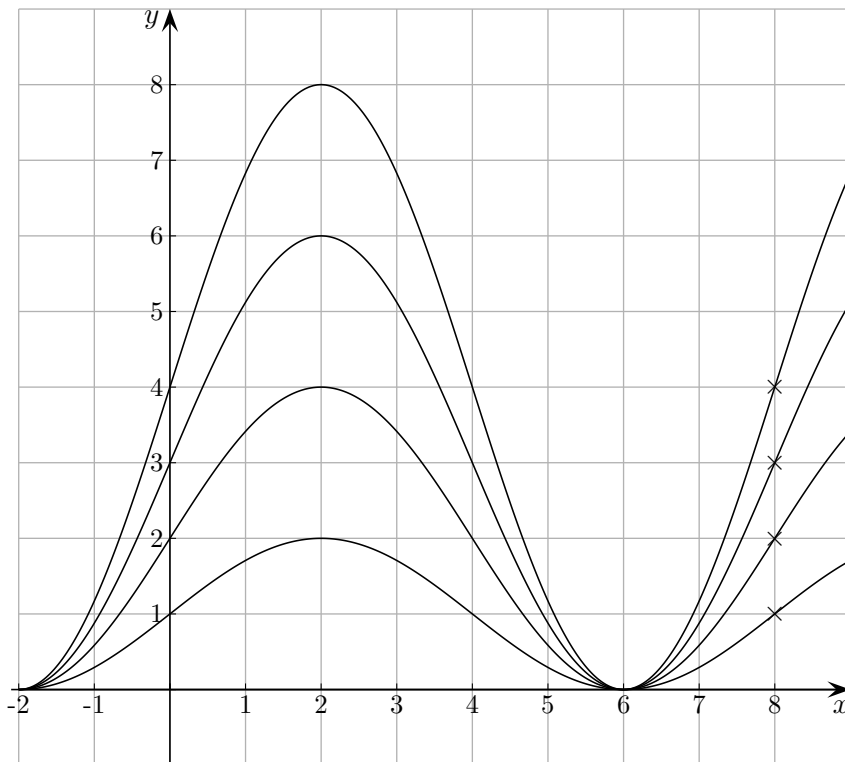
*Roolfs*

# Funktionenschar

Von einer Funktionenschar  $f_k$  sind die Graphen von  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$  abgebildet.

Gib einen möglichen Funktionsterm  $f_k$  an.

Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten  $P_k(4 | \dots)$  von  $f_k$  einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.



# Funktionenschar

Von einer Funktionenschar  $f_k$  sind die Graphen von  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$  abgebildet.

Gib einen möglichen Funktionsterm  $f_k$  an.

Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten  $P_k(4 | \dots)$  von  $f_k$  einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.



$$f_k(x) = k + k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\text{Tangenten } y = -\frac{1}{4}k\pi(x - 4) + k \quad \text{oder} \quad y = k\left(-\frac{\pi}{4}x + \pi + 1\right)$$

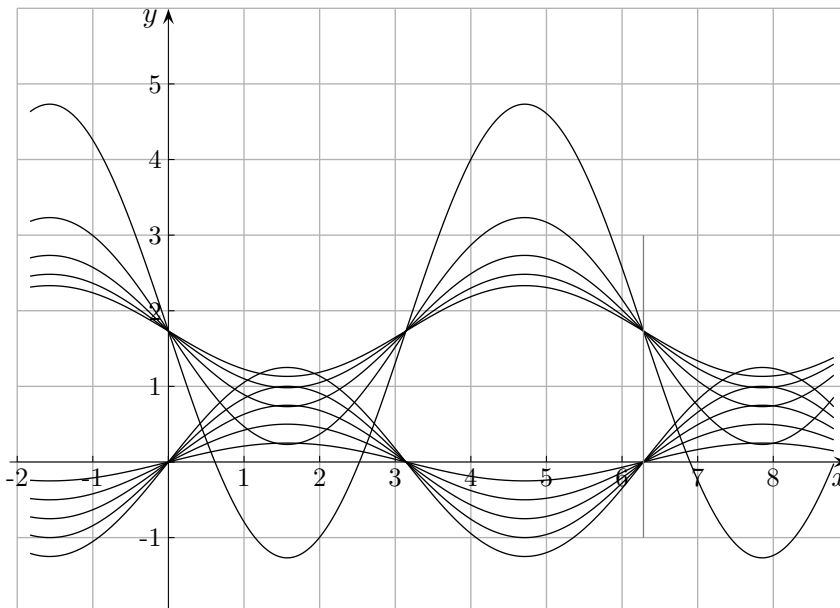
$$\text{Schnittstelle } x_s = \frac{4(\pi+1)}{\pi}$$



# Funktionenschar

Gegeben sind die beiden Funktionenscharen  $f_a(x) = \frac{a}{4} \sin(x)$  und  $g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a} \sin(x)$  für  $0 \leq x \leq 2\pi$  und  $a \in \mathbb{R}^+$ .

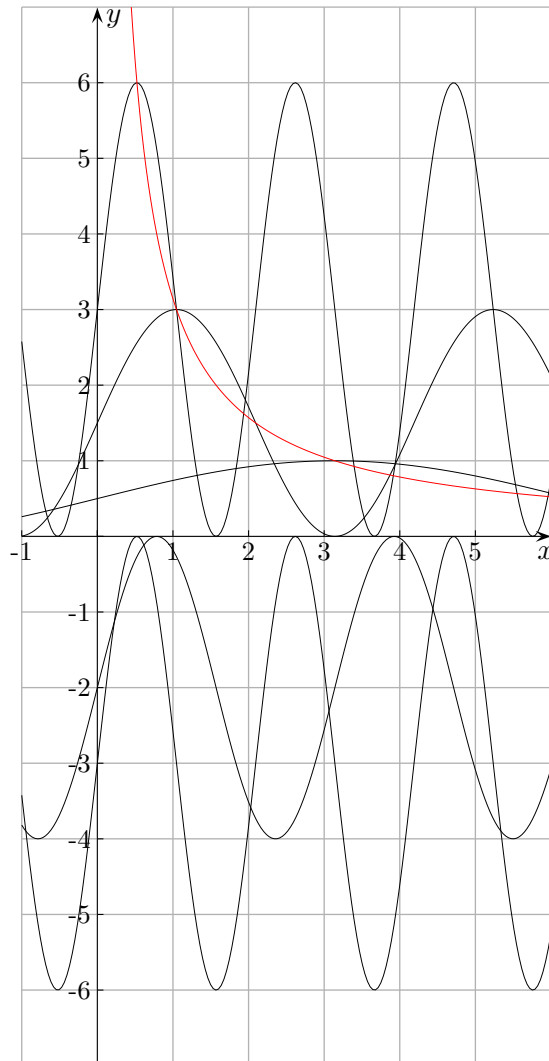
- a) Es sind Graphen für  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  abgebildet. Ordnen Sie sie zu.
- b) Wie lauten die Extrempunkte von  $g_a$ ?
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von  $g_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von  $g_2$  aus dem Graph von  $f_4$  hervor?
- e) Für welche Werte von  $a$  schneiden sich die Graphen von  $f_a$  und  $g_a$  an der Stelle  $x = \frac{1}{3}\pi$ ?
- f) Für welche Werte von  $a$  berühren sich die Graphen?
- g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für  $a = 2$  einschließen.
- h) Sei  $a = 2$ . Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.



## Funktionenschar Ergebnisse

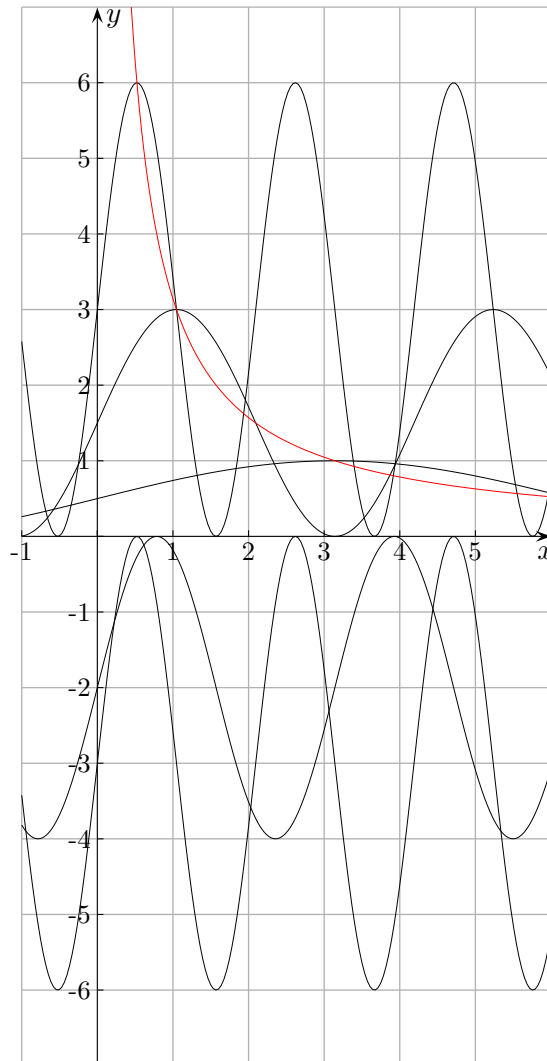
- a) Es sind Graphen für  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  abgebildet. Ordnen Sie sie zu. ...
- b) Wie lauten die Extrempunkte von  $g_a$ ?  
 $\text{Min}\left(\frac{1}{2}\pi \mid \sqrt{3} - \frac{3}{a}\right), \text{Max}\left(\frac{3}{2}\pi \mid \sqrt{3} + \frac{3}{a}\right)$
- c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von  $g_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .  
2 Nullstellen für  $a < \sqrt{3}$ , 1 Nullstelle für  $a = \sqrt{3}$ , keine Nullstelle für  $a > \sqrt{3}$
- d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von  $g_2$  aus dem Graph von  $h(x) = \sin(x)$  hervor?  
Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $k = 1,5$ ,  
Spiegelung an der  $x$ -Achse,  
Verschiebung in  $y$ -Richtung um  $\sqrt{3}$
- e) Für welche Werte von  $a$  schneiden sich die Graphen von  $f_a$  und  $g_a$  an der Stelle  $x = \frac{1}{3}\pi$ ?  
 $a^2 - 8a + 12 = 0 \implies a_1 = 2, a_2 = 6$
- f) Für welche Werte von  $a$  berühren sich die Graphen?  
 $f_a\left(\frac{1}{2}\pi\right) = g_a\left(\frac{1}{2}\pi\right)$  (Extremstellen!)  
 $a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 = 0 \implies a_{1/2} = 2\sqrt{3}$
- g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für  $a = 2$  einschließen.  
 $A = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} [f_2(x) - g_2(x)] dx = 0,186$
- h) Sei  $a = 2$ . Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.  
 $S_1\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right), S_2\left(\frac{2}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$   
Tangentengleichungen in  $S_1$ :  
 $y = 0,25x + 0,1712$   
 $y = -0,75x + 1,2184$   
an der Stelle  $x = \frac{1}{2}\pi$ :  $y_1 = 0,5639, y_2 = 0,0403$   
Diagonallängen  $e = 1,0472, f = 0,5236$  (vertikal)  
 $A = 0,274$

# Funktionenschar



- Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar  $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$  für  $k \neq 0$ . Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen.
- Für positive Werte des Parameters  $k$  liegen die 1. Hochpunkte rechts von der  $y$ -Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung.
- Zeichnen Sie die Graphen für  $k = 1$  und  $k = 2$ . Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und  $x$ -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen. Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für  $k$  auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

# Funktionenschar



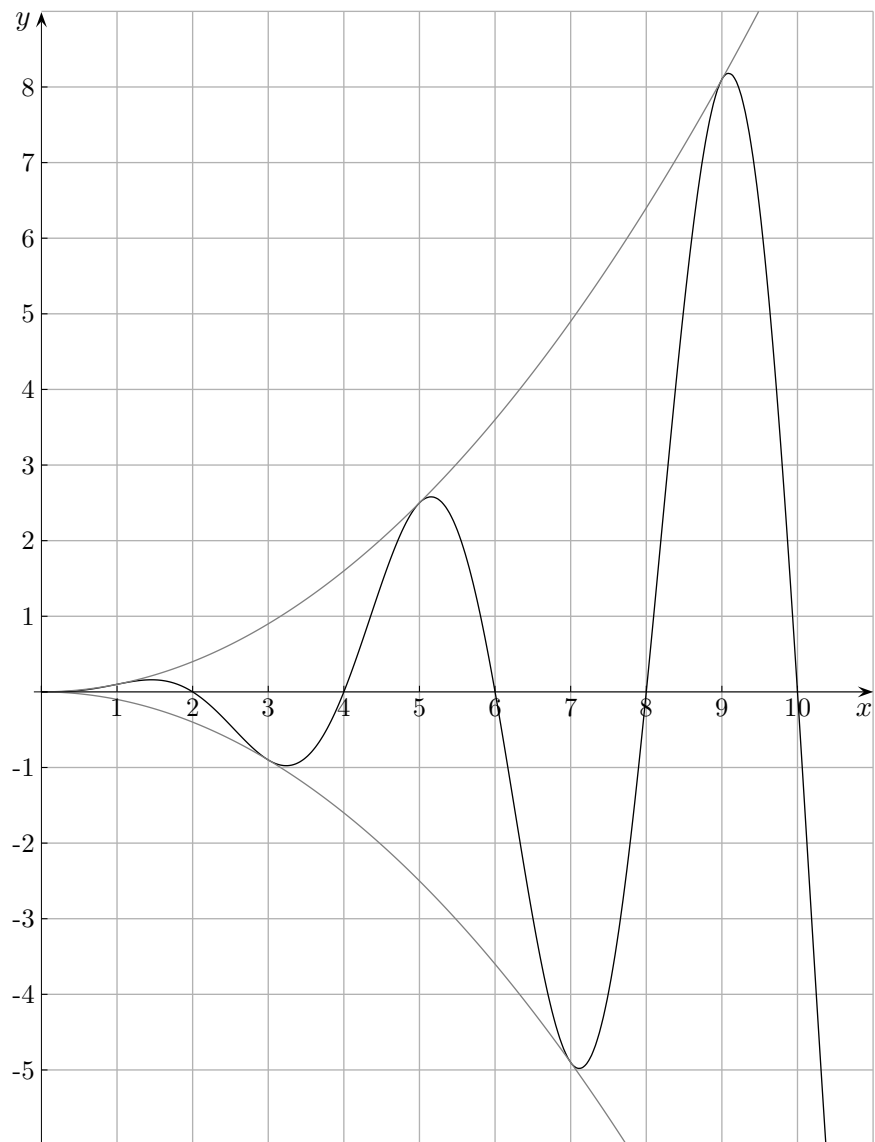
- a) Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar  $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$  für  $k \neq 0$ .  
Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen. Beachte:  $f_k(0) = k$
- b) Für positive Werte des Parameters  $k$  liegen die 1. Hochpunkte rechts von der  $y$ -Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung.  $\text{Max}(\frac{\pi}{2k} | 2k), g(x) = \frac{\pi}{x}$
- c) Zeichnen Sie die Graphen für  $k = 1$  und  $k = 2$ . Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und  $x$ -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen.  $k = 1: x_1 = \frac{3}{2}\pi, x_2 = \frac{7}{2}\pi$   
 $k = 2: x_1 = \frac{3}{4}\pi, x_2 = \frac{7}{4}\pi, A = 2\pi$
- Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für  $k$  auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung.  $A$  ist unabhängig von  $k$ .  
Beachte: Steckung/Stauchung in  $x$ - und  $y$ -Achsenrichtung

Funktion  $f(x) = ax^2 \cdot \sin(bx)$

Die mit einer quadratischen Funktion multiplizierte Sinusfunktion ist vom angegebenen Typ,  $P(5 | 2,5)$  liegt auf ihrem Graphen.

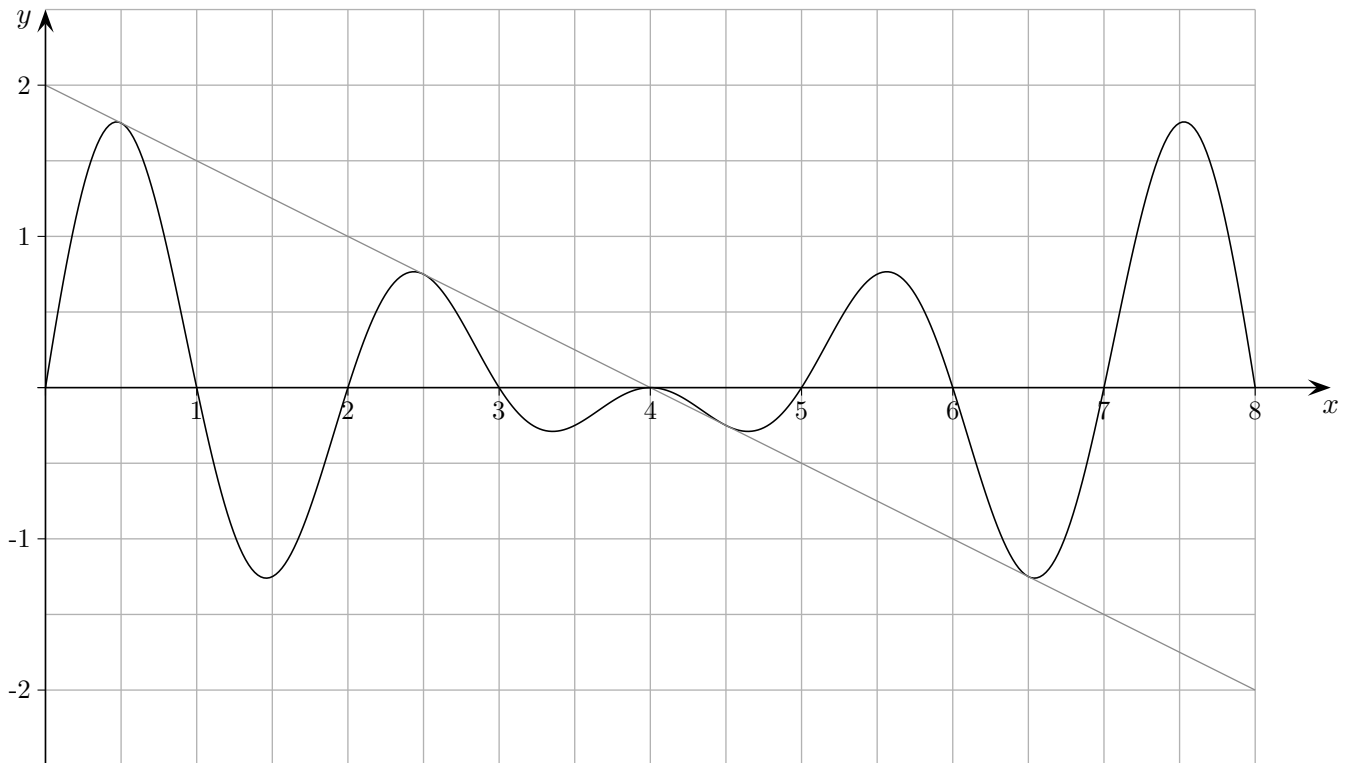
Ermitteln Sie  $a$  und  $b$

und sodann die Stellen mit waagerechter Tangente im Bereich  $4 \leq x \leq 4$ .



# Sinus-Funktion

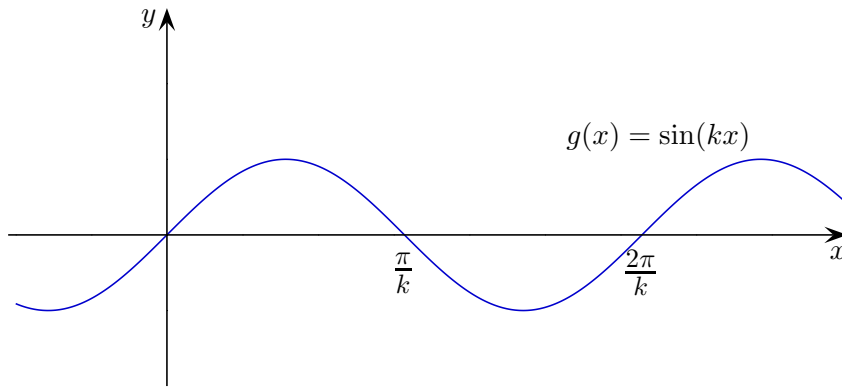
Ermitteln Sie den Funktionsterm.



1. Wie lautet die 3. Nullstelle von  $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x + 2) \cdot \sin(kx)$  für  $x \geq 0$  vom Ursprung aus betrachtet?
2. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x \cdot \cos(x)$ .  
Zeigen Sie  $f''(x) + f(x) = -2 \sin(x)$  und berechnen Sie  $\int f(x) dx$ .

# Funktionenschar

Wie lautet die 3. Nullstelle von  $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x + 2) \cdot \sin(kx)$  für  $x \geq 0$  vom Ursprung aus betrachtet?



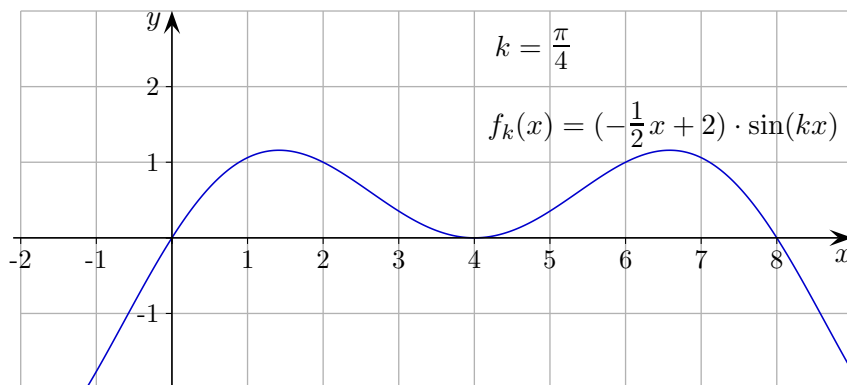
Es sind 4 Fälle zu unterscheiden:

$$4 < \frac{\pi}{k} \iff k < \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{\pi}{k}$$

$$\frac{\pi}{k} < 4 \leq \frac{2\pi}{k} \iff \frac{\pi}{4} < k \leq \frac{\pi}{2}, \quad x_N = 4$$

$$4 = \frac{\pi}{k} \iff k = \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{2\pi}{k} = 8$$

$$\frac{2\pi}{k} < 4 \iff \frac{\pi}{2} < k, \quad x_N = \frac{2\pi}{k}$$



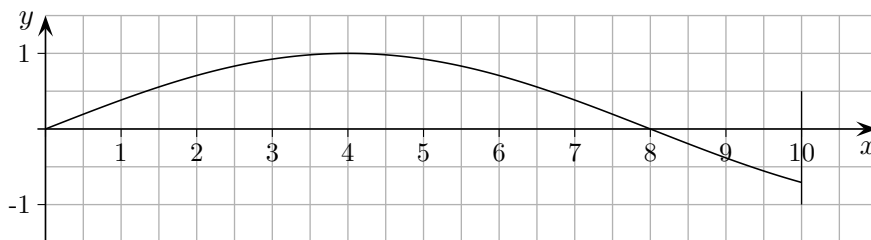
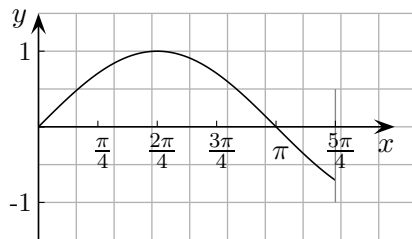

---

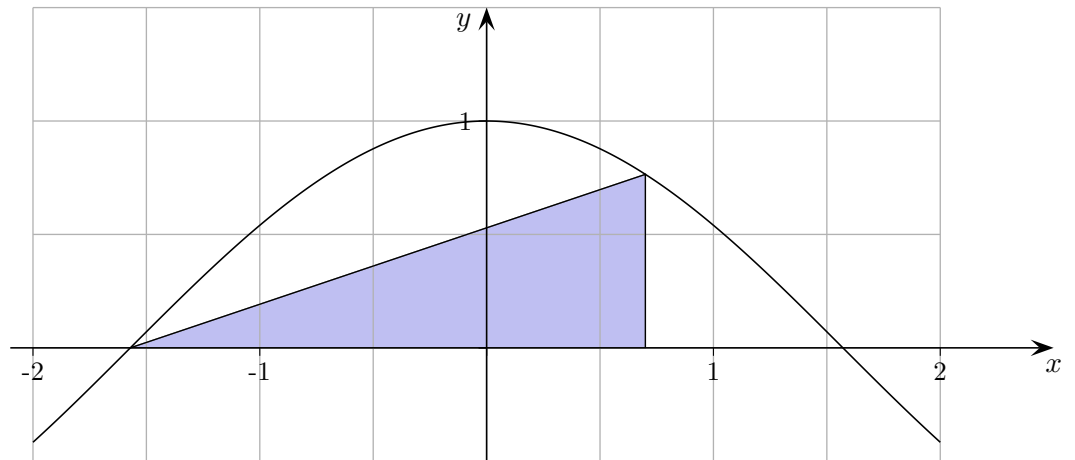
Roofs



# Streckung

Der untere Graph geht durch Streckung in  $x$ -Richtung aus dem oberen Sinus-Graph hervor. Ermitteln Sie den Funktionsterm des unteren Graphen.





Gegeben ist der Graph von  $f(x) = \cos(x)$ .  
Ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks.