Trigonometrische Funktionen

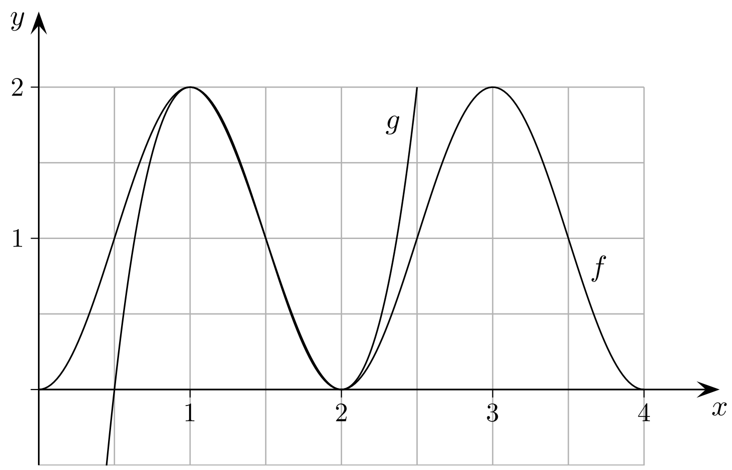
1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$
   Ihr Graph sei K.

   a) Skizzieren Sie K im Intervall $[0, 4]$.
   Geben Sie die Periode von f an.
   Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K auf ganz $\mathbb{R}$ an.
   Für welche Werte von x nimmt f im Intervall $[0, 2]$ den Wert 1 an?

   b) Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = a - \cos(bx)$ dargestellt werden. Bestimmen Sie a und b.

   c) K und die x-Achse begrenzen zwischen benachbarten Nullstellen jeweils eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt einer solchen Fläche exakt.

   d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades hat in $P(1 \mid 2)$ einen Hochpunkt und in $Q(2 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für g.
   An welchen Stellen im Intervall $[1, 2]$ weichen die Funktionswerte von f und g am stärksten voneinander ab ?

1. a) 

Periode $p = 2$
$H(2k+1 \mid 2),\ k \in \mathbb{Z}$
$T(2k \mid 0),\ k \in \mathbb{Z}$
$x_1 = 0{,}5$ und $x_1 = 1{,}5$

b) $f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$
$2 = p = \frac{2\pi}{b} \quad \Longrightarrow \quad b = \pi$
$f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$

c) $A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (1 - \cos(\pi \cdot x))\,dx = \left[x - \frac{1}{\pi}\sin(\pi \cdot x)\right]_0^2 = 2$

d) Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

1. $g(1) = 2$
2. $g'(1) = 0$
3. $g(2) = 0$
4. $g'(2) = 0$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a+b+c+d &=& 2 \\ 2. & 3a+2b+c &=& 0 \\ 3. & 8a+4b+2c+d &=& 0 \\ 4. & 12a+4b+c &=& 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

Maximalstellen für $d(x) = |\,f(x) - g(x)\,|$ lauten: $x_1 = 1{,}28$ und $x_1 = 1{,}72$
$d_{\max} = 0{,}02$.

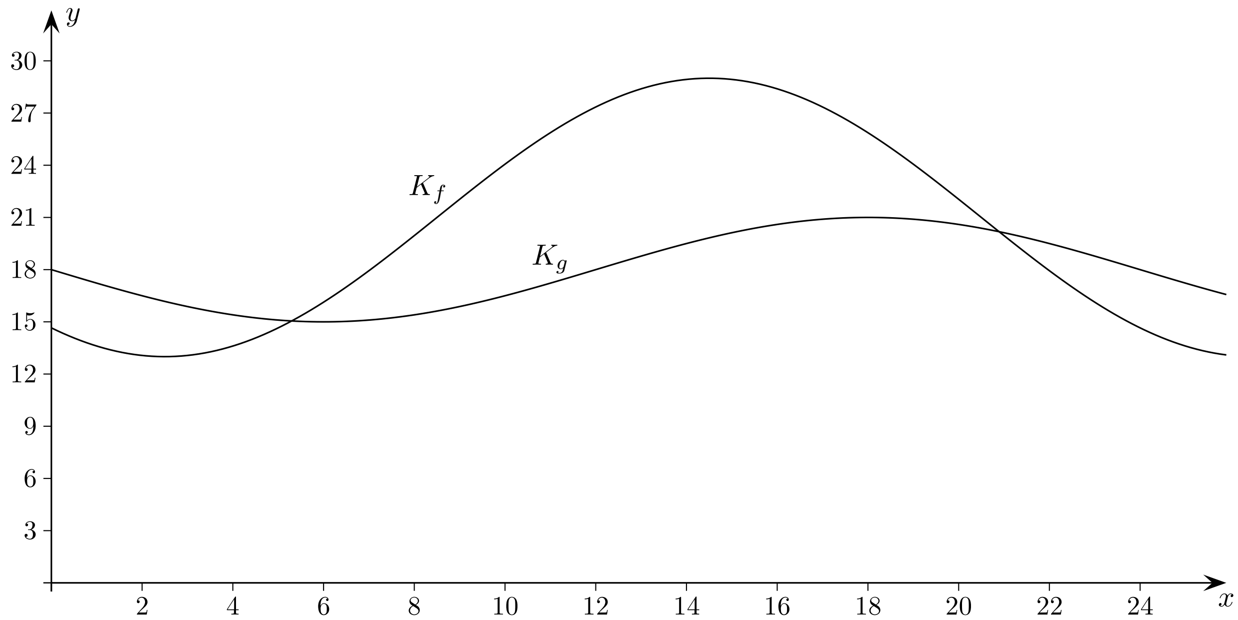
Trigonometrische Funktionen

2. Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right] + 21, \quad 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in $°C$).

Die Abbildung zeigt den Graphen K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.
Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens $22°\,C$?
Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?
Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt.
Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.
Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.
Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right] + ax + b, \quad 24 \leq x \leq 48$$

beschrieben werden (x in Stunden, $h(x)$ in $°C$).
Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b.
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

2. a) Nach 2,5 Stunden (um 2:30 Uhr) beträgt die minimale Außentemperatur $13^\circ\, C$, nach 14,5 Stunden (um 14:30 Uhr) beträgt die maximale Außentemperatur $29^\circ\, C$.

$x \leq 8{,}98$ und $x \geq 20{,}02$
$8{,}98 + (24 - 20{,}02) = 13$ [Stunden]

Der Temperaturanstieg im Freien ist bei $x = 8{,}5$ am größten.
Durchschnittliche Temperatur zwischen 6 und 18 Uhr beträgt $25,0^\circ\, C$.

b) Ansatz: $g(x) = a \cdot \sin\big[b(x + c)\big] + d$,
Der Graph von g ist um 18 nach oben verschoben, also $d = 18$.
Die Amplitude beträgt $a = 3$.
Die Periode von g beträgt 24 und damit gilt $24 = \frac{2\pi}{b} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{\pi}{12}$
Der Graph ist um 12 nach rechts verschoben, also $c = -12$.

$$g(x) = 3 \cdot \sin\Big[\tfrac{\pi}{12}(x - 12)\Big] + 18$$

Der Graph von g entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:

1) Streckung mit dem Faktor $a = 3$ in y-Richtung
2) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x-Richtung (Kehrwert!, beachte die Perioden 2π und 24)
3) Verschiebung um 12 nach rechts
4) Verschiebung um 18 nach oben

Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht.
Größter Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur:
Die Differenz wird dargestellt durch die Funktion $d(x) = |\, f(x) - g(x)\,|$.
Maximum an der Stelle $x = 13{,}1$, also um 13:06 Uhr.

c) $h(24) = f(24) \quad \Longleftrightarrow \quad 24a + b = 22{,}587$
$h'(24) = f'(24) \quad \Longleftrightarrow \quad a - 0{,}319 = 0$
$\Longrightarrow \quad a = 0{,}32$ und $b = 14{,}9$

$$D = \frac{1}{24}\int_{24}^{48} \Big(\underbrace{10 \cdot \sin\big[\tfrac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\big]}_{\text{Periode } p = 24, \text{ Integral ist Null}} + ax + b\Big)dx$$

Trigonometrische Funktionen

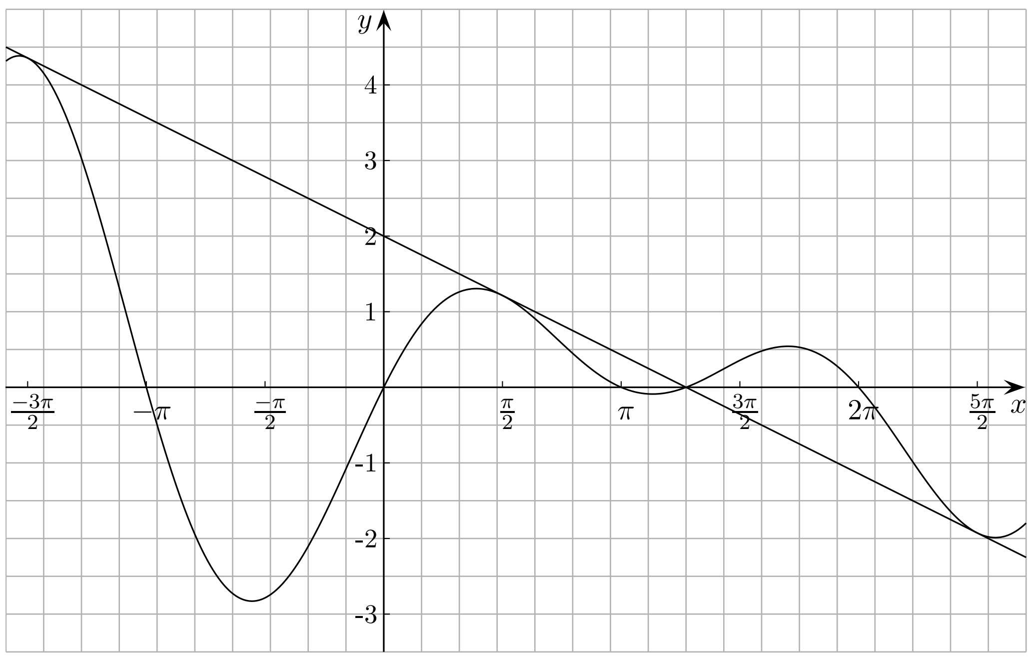
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot \sin(x)\,,\ \ x \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f im Intervall $\left[-\frac{3}{2}\pi \mid \frac{5}{2}\pi\right]$.

   b) Zeigen Sie algebraisch, dass die Gerade g mit $y = -\frac{1}{2}x + 2$ im Punkt $P\left(\frac{\pi}{2} \mid f(\frac{\pi}{2})\right)$ Tangente für den Graphen von f ist.

   Untersuchen Sie, ob die Gerade g noch für weitere Punkte des Graphen von f Tangente ist.

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $f''(x) + f(x) = -\cos(x)$
   und begründen Sie damit (durch Integration beider Seiten):
   $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(x) + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \cos(x) + C$



Trigonometrische Funktionen

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1\,,\;\; k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\;\; x \in \mathbb{R}$.

   a) Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von f_k aus dem Graph von f_1 hervor?

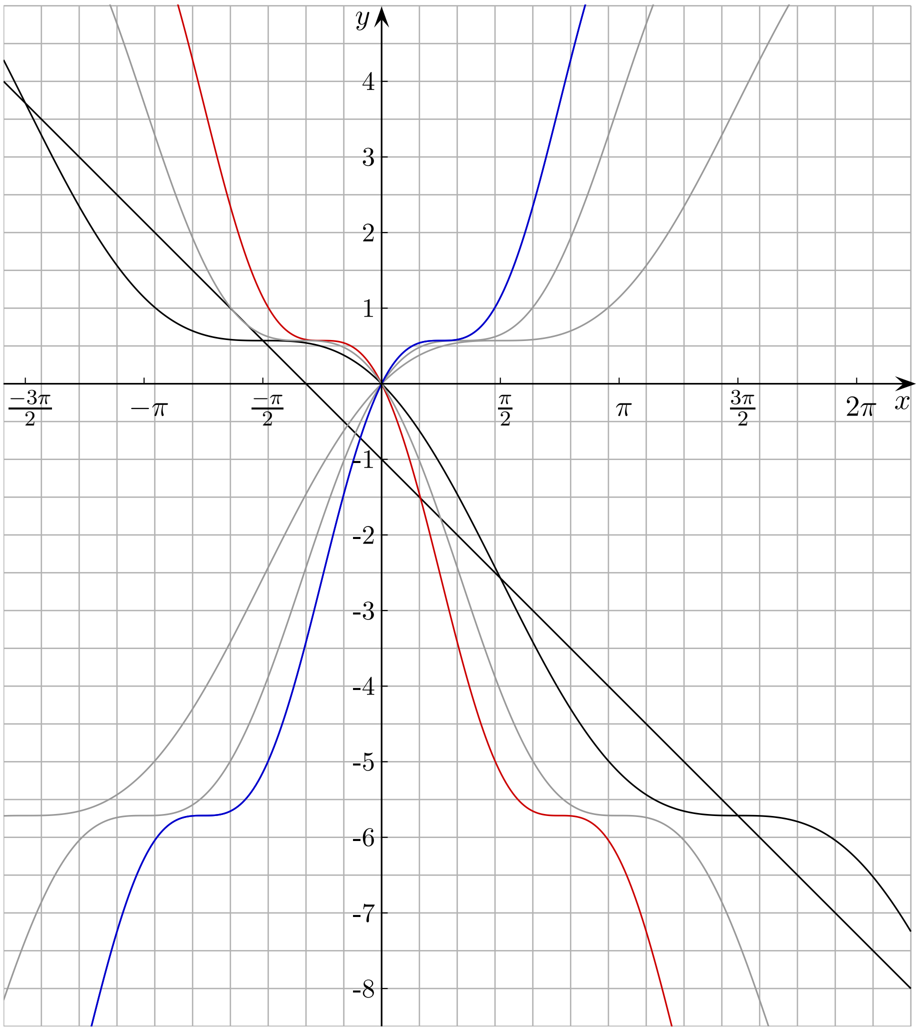
   b) Begründen Sie: Die Graphen von f_k besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.

   c) Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.

   d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von f_1 und die Gerade $y = -x - 1$ für $0 \le x \le 2\pi$ einschließen.

   e) Zeigen Sie, dass f_1 punktsymmetrisch bezüglich $P\big(\frac{3}{2}\pi \mid f_1(\frac{3}{2}\pi)\big)$ ist.

   f) Die Gerade $y = -kx - 1$ und der Graph von f_k schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche A ein. Ermitteln Sie den Wert für k, damit gilt: $A = 4$ FE.



Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \cos(kx) - kx - 1\,,\ \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \ x \in \mathbb{R}$.

   a) Durch welche Abbildungen gehen die Graphen von f_k aus dem Graph von f_1 hervor?

   Streckung/Stauchung in x-Achsenrichtung für $k > 0$
   Der Graph von f_{-k} geht durch y-Achsen-Spiegelung aus dem Graphen von f_k hervor.
   Dieses wird im Weiteren häufig verwendet.

   b) Begründen Sie: Die Graphen von f_k besitzen genau eine Nullstelle. Ermitteln Sie diese.

   Bed. für f_1: $\cos(x) = x + 1$, $x = 0$

   c) Untersuchen Sie die Schar auf Extrema und Wendepunkte.

   $f_k''(x) = -\cos(kx) \cdot k^2$
   $W(\frac{\pi}{2k} + z\frac{\pi}{k} \mid \dots),\ z \in \mathbb{Z}$

   d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von f_1 und die Gerade $y = -x - 1$ für $0 \le x \le 2\pi$ einschließen.

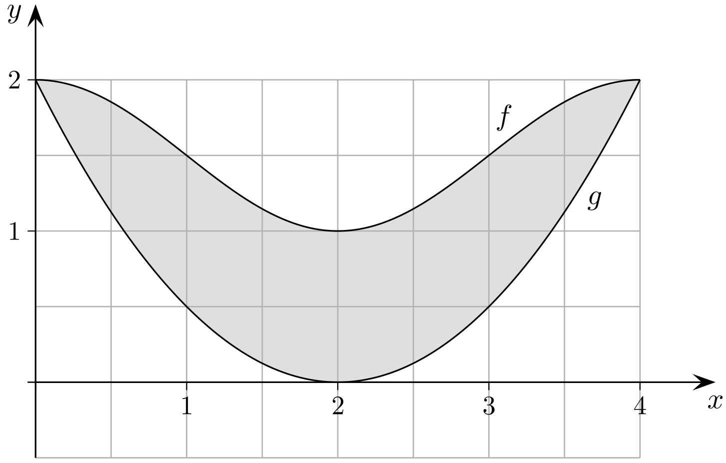
   $A = 4$

   e) Zeigen Sie, dass f_1 punktsymmetrisch bezüglich $P\Big(\frac{3}{2}\pi \mid f_1(\frac{3}{2}\pi)\Big)$ ist.

   $g(x) = f_1(x + \frac{3}{2}\pi) = \cos(x + \frac{3}{2}\pi) - (x + \frac{3}{2}\pi) - 1 = \sin(x) - x - \frac{3}{2}\pi - 1$
   $h(x) = \sin(x) - x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
   beachte: $g(0) = -\frac{3}{2}\pi - 1 = f_1(\frac{3}{2}\pi)$

   f) Die Gerade $y = -kx - 1$ und der Graph von f_k schließen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten eine Fläche A ein. Ermitteln Sie den Wert für k, damit gilt: $A = 4$ *FE*.

   $x_1 = \frac{\pi}{2k}\,,\ \ x_2 = \frac{3}{2k}\pi$
   Für $k = 1$ gilt: $A = 2$. Daher muss $k = \frac{1}{2}$ sein.



a) Wie groß ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der trigonometrischen Funktion f und der Parabel g?

b) Unter welchem Winkel treffen sich die Graphen bei $x = 4$?

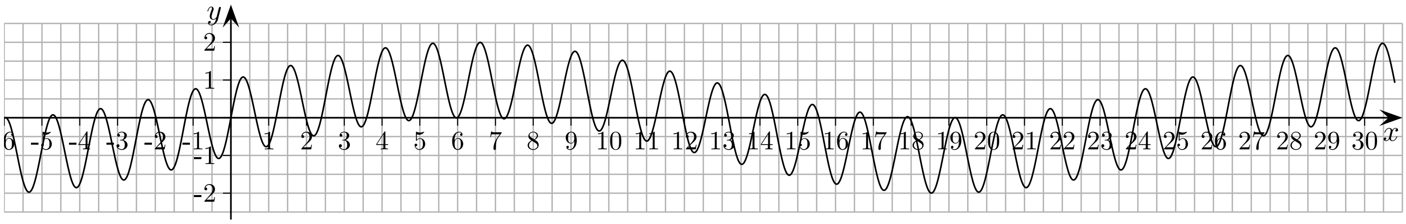
a) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) + \frac{3}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$

$A = \frac{10}{3}\,FE$

b) $\alpha = 63{,}4°$

Gemeinsame Periode



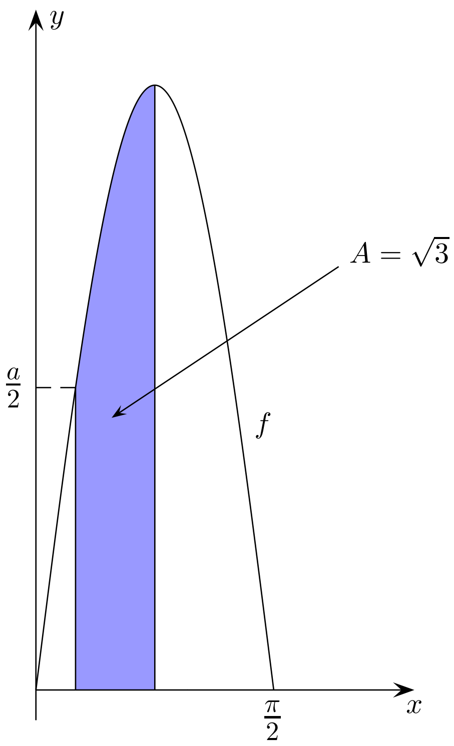
Abgebildet ist der Graph von $f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$ für $a = 5$ und $b = \frac{1}{4}$.
Wie kann die Periode aus a und b bestimmt werden?

Die Perioden der Teilfunktionen lauten $p_1 = \frac{2}{5}\pi$ und $p_2 = 8\pi$.
Für eine Funktion mit der Periode p ist auch ein ganzzahliges Vielfaches von p ein Periodenintervall.
Die Periode von f ist daher das kleinste ganzzahlige Vielfache von p_1 und p_2, hier also 8π.
Die (in Ni mögliche) Ermittlung zweier Maxima mit dem GTR ist etwas mühsam.

Mit f besitzt auch f' die Periode p.

Für die obige Funktion f gilt: $f'(0) = f'(8\pi) = \frac{21}{4}$ und für $0 < x < 8\pi$ ist $f'(x) < \frac{21}{4}$.
Dies belegt, dass das kürzeste Periodenintervall die Länge 8π hat.

Rückwärtsrechnen



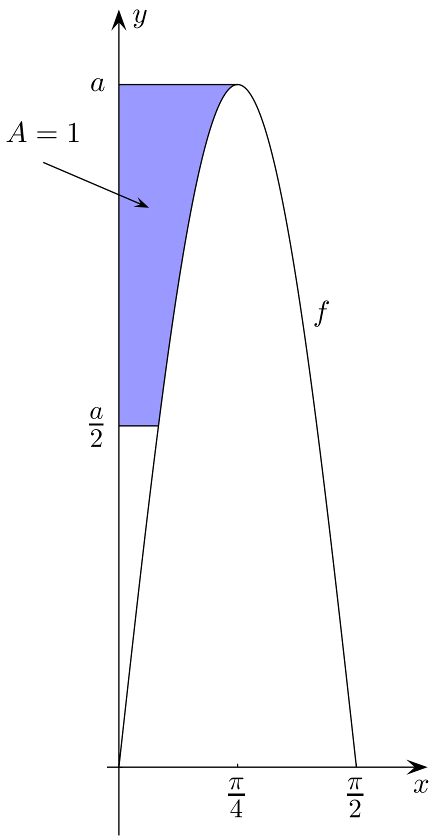
Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(bx)$.
Bestimme a und b.

Periodenlänge $\pi \implies b = 2$

untere Integrationsgrenze: $f(x) = \frac{a}{2} \implies x = \frac{\pi}{12}$

$A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \sqrt{3} \implies a = 4$

Rückwärtsrechnen



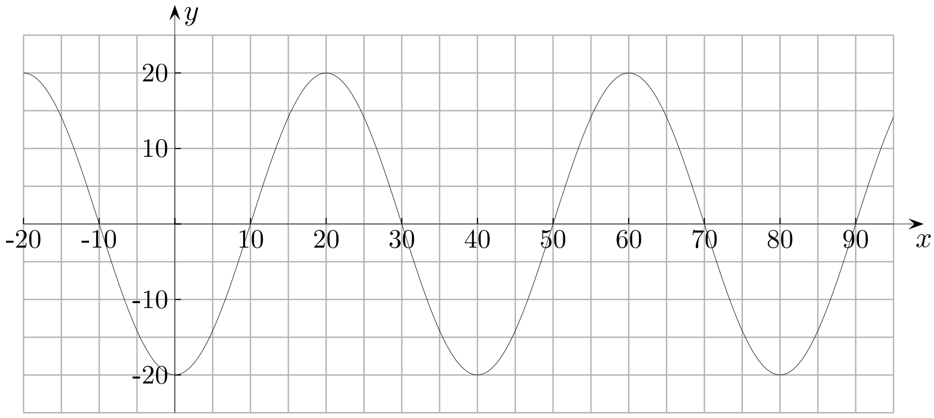
Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(bx)$.
Bestimme a und b.

Periodenlänge $p = \pi \implies b = 2$

$$a \cdot \left[\, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\, dx \right] = 1 \quad \implies \quad a = 4{,}515$$

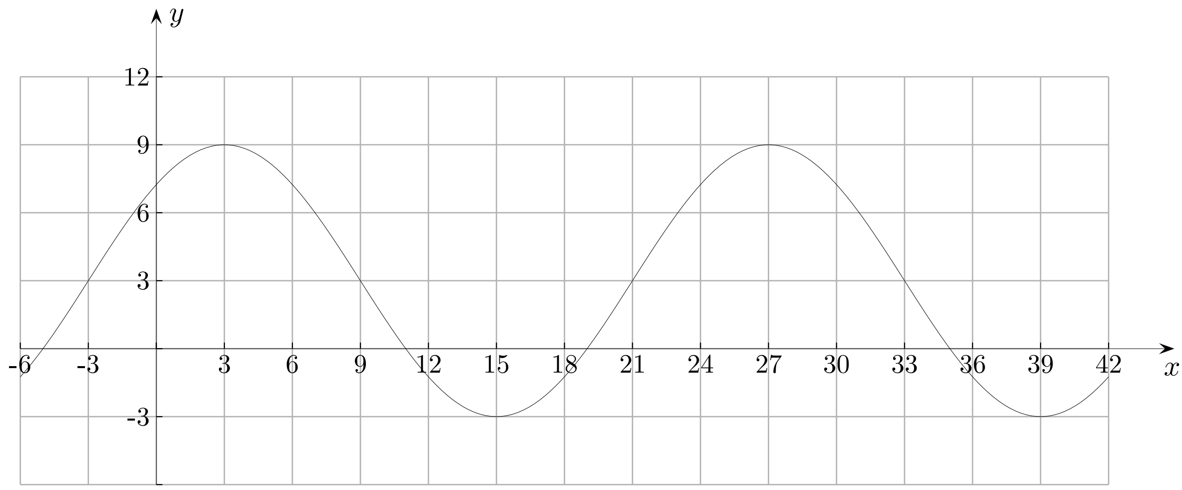
Trigonometrische Funktionen

a)



Der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{b}x - \frac{\pi}{c})$ ist dargestellt. Bestimme a, b und c.

b)

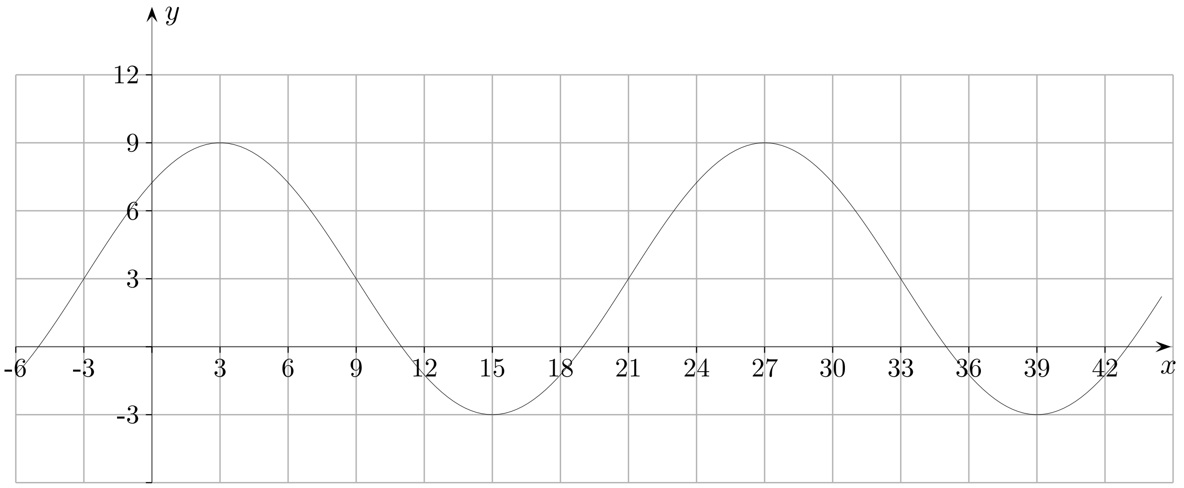


Der Graph von $f(x) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{c}) + d$ ist dargestellt. Bestimme a, b, c und d.

a) $a = 20,\ b = 20,\ c = 2$

b) $a = 6,\ b = 12,\ c = 4,\ d = 1$

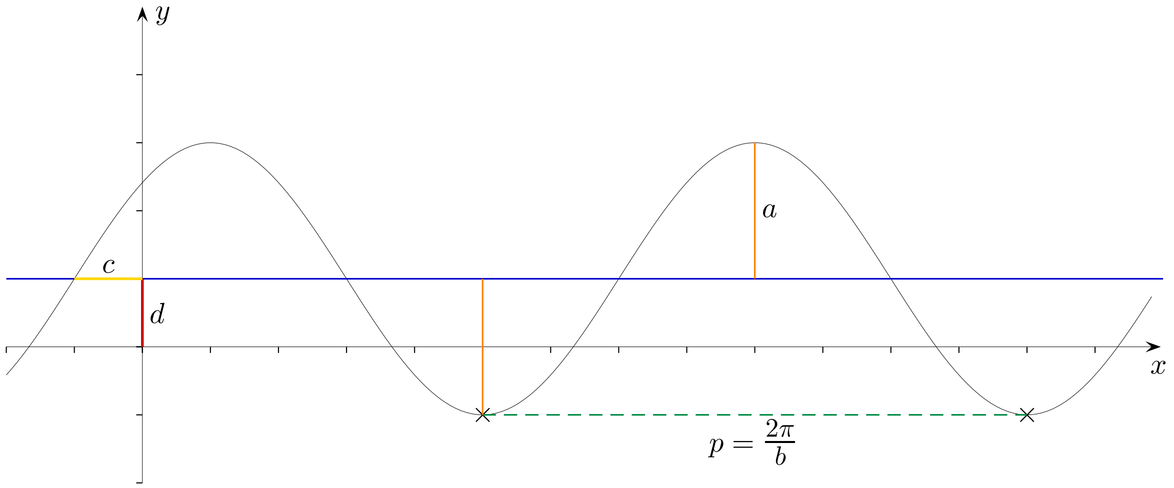
Sinus-Funktion



nach rechts verschieben ($c > 0$):
$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x - c)\big) + d$

nach links verschieben:
$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$

Zuerst d ermitteln, dann a, b, c.



$f(x) = 6 \cdot \sin\big(\frac{\pi}{12}(x + 3)\big) + 3$

Trigonometrische Funktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f.
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Trigonometrische Funktionen Ergebnisse

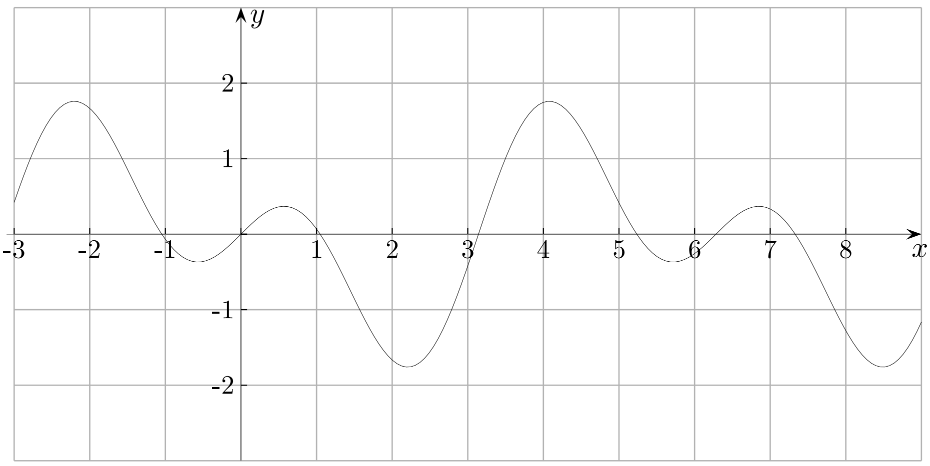
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - \sin(x)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f.
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:
$x_1 = \pi,\ x_2 = 2\pi,\ x_3 = \frac{1}{3}\pi,\ x_4 = \frac{5}{3}\pi$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:
$\cos(x) - 4 \cdot \cos^2(x) + 2 = 0$
$x_1 = 0{,}568,\ x_2 = 2{,}206,\ x_3 = 4{,}078,\ x_4 = 5{,}715$, sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der x-Achse, deren x-Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Trigonometrische Funktionen

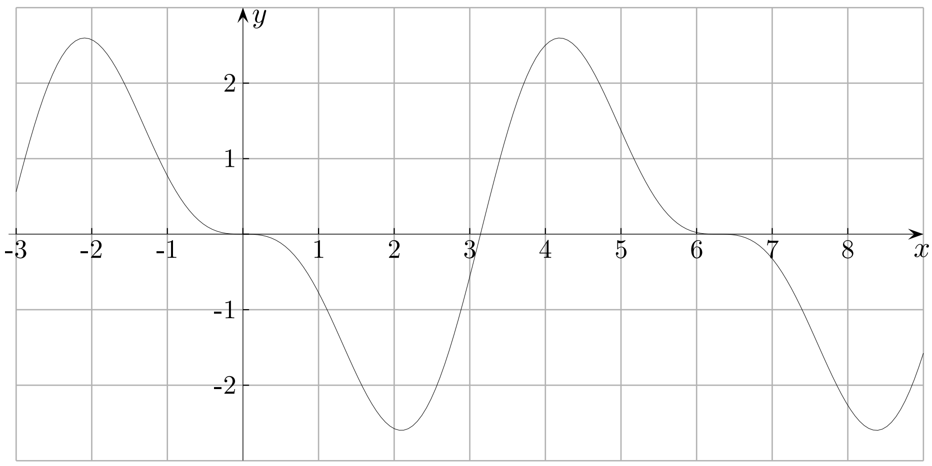
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x),\ \mathbb{D} = \mathbb{R}.$

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f.
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:
$x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen, notw. Bed.:
$4 \cdot \cos^2(x) - 2\cos(x) - 2 = 0$
$x_1 = \frac{2}{3}\pi,\ x_2 = \frac{4}{3}\pi,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zu allen Punkten auf der x-Achse, deren x-Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Trigonometrische Funktionen

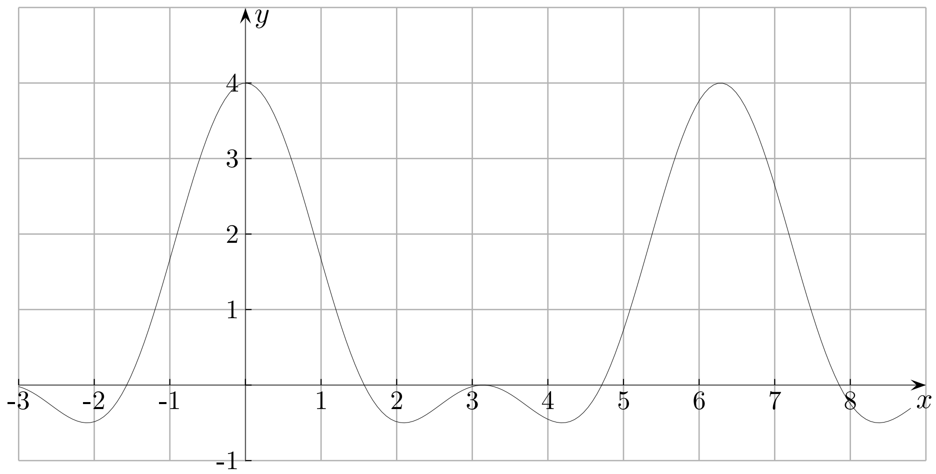
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) + 1,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f.
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:

$x_{1/2} = \pm\pi,\ x_{3/4} = \pm\frac{1}{2}\pi,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen:

$\sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}\pi,\ x_3 = \frac{4}{3}\pi,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse und zu allen Parallelen,
deren Abstand ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Trigonometrische Funktionen

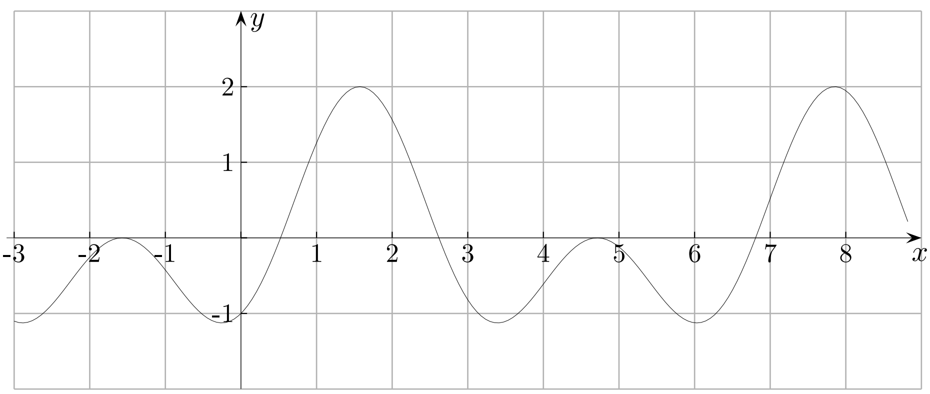
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x) - \cos(2x),\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Periode, die Null- und die Extremstellen von f.
Welche Symmetrien weist der Graph von f auf?

Es gilt:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$



Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:
$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
Zwischenlösungen:
$\sin(x) = -1$ und $\sin(x) = \frac{1}{2}$
$x_1 = \frac{1}{6}\pi,\ x_2 = \frac{5}{6}\pi,\ x_3 = \frac{3}{2}\pi,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Extremstellen, notw. Bed.:
$\cos(x) \cdot (1 + 4\sin(x)) = 0$
$x_1 = \frac{1}{2}\pi,\ x_2 = \frac{3}{2}\pi,\ x_3 = 3{,}394,\ x_4 = 6{,}031,$ sowie plus alle ganzzahligen Vielfachen der Periode.

Symmetrie:
Der Graph ist achsensymmetrisch zu allen Parallelen zur y-Achse,
deren Abstand $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ plus einem ganzzahligen Vielfachen der Periode beträgt.

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (\frac{t^2}{2} + 1) \cdot \cos(tx),\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}$.

   Sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_t in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.
   Für welches t ist $A(t)$ minimal?

2. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin(\frac{t\pi}{2} \cdot x),\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Zeichnen Sie die Graphen für $t = 1$ und $t = 2$.
   Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x-Achse bilden.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für $t = 2$ und allgemeines t.
   Untersuchen Sie, ob es Werte von t gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist.

   c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster x-Koordinate.

3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel) g berührt den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ in $O(0 \mid 0)$ und $A(\pi \mid 0)$?

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g.

   c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von f und g im Bereich $0 \leq x \leq \pi$?

Trigonometrische Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (\frac{t^2}{2} + 1) \cdot \cos(tx),\ \ t \in \mathbb{R}^+,\ \ x \in \mathbb{R}$.

   Sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_t in den Grenzen von 0 bis zur 1. (rechts liegenden) Nullstelle.

   Für welches t ist $A(t)$ minimal? $\quad x_N = \frac{\pi}{2t},\quad A(t) = \frac{t^2+2}{2t},\quad t_{\min} = \sqrt{2}$

2. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t^2 + 1) \cdot \sin(\frac{t\pi}{2} \cdot x),\ \ t \in \mathbb{R}^+,\ \ x \in \mathbb{R}$.

   a) Zeichnen Sie die Graphen für $t = 1$ und $t = 2$.
   Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den beide Graphen in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x-Achse bilden. $\quad \alpha_1 = 14{,}0°;\quad \alpha_2 = 21{,}3°$

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen für $t = 2$ und allgemeines t. $\quad A_2 = \frac{10}{\pi},\quad A_t = \frac{4(t^2+1)}{\pi t}$

   Untersuchen Sie, ob es Werte von t gibt, für die diese Fläche am kleinsten ist. $\quad t_{\min} = 1$

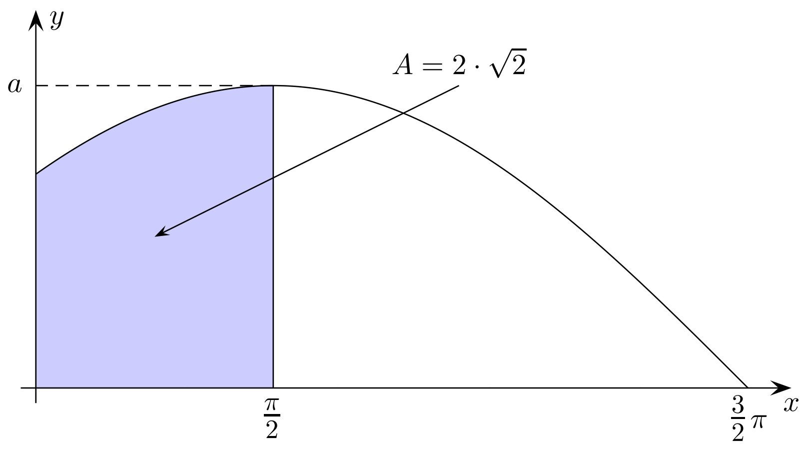
   c) Ermitteln Sie die Ortslinie der Hochpunkte im 1. Quadranten mit kleinster x-Koordinate.
   $Max(\frac{1}{t} \mid t^2 + 1),\ \ h(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

3. a) Welche quadratische Funktion (Parabel) g berührt den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ in $O(0 \mid 0)$ und $A(\pi \mid 0)$? $\quad g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + x$

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g.
   $A = 2 - \frac{\pi^2}{6} = 0{,}355$

   c) Wie groß ist die maximale Differenz der Funktionswerte von f und g im Bereich $0 \leq x \leq \pi$?
   $d_{\max} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Rückwärtsrechnen



Zu sehen ist der Graph von $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$.
Bestimme a, b und c.

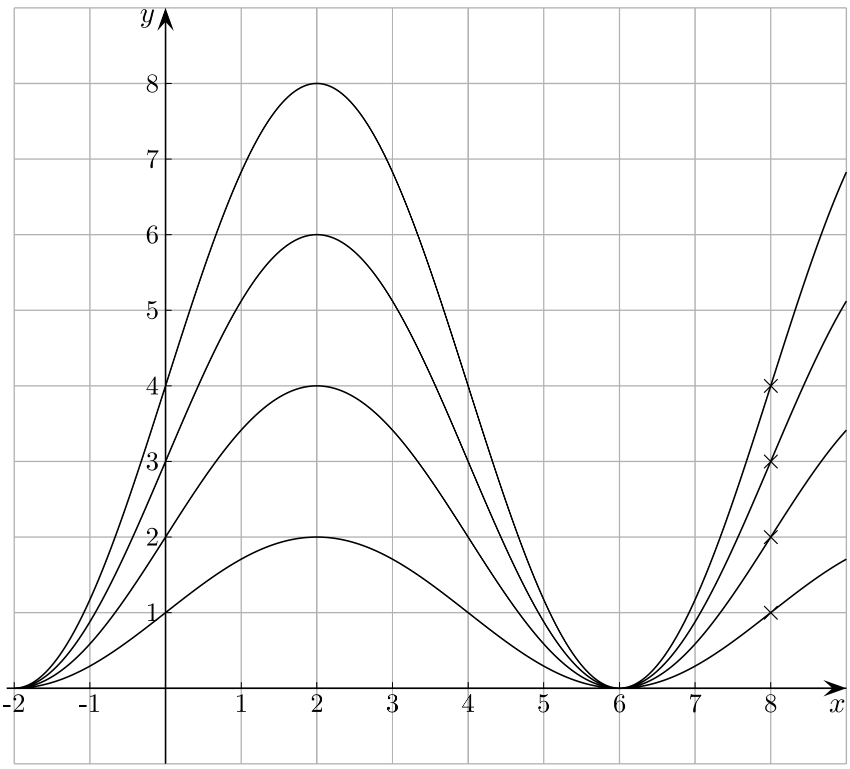
Periodenlänge $4\pi \implies b = \frac{1}{2}$

Verschiebung "$\longrightarrow$" um $\frac{\pi}{2} \implies c = -\frac{\pi}{4}$

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 2 \cdot \sqrt{2} \implies a = 2$

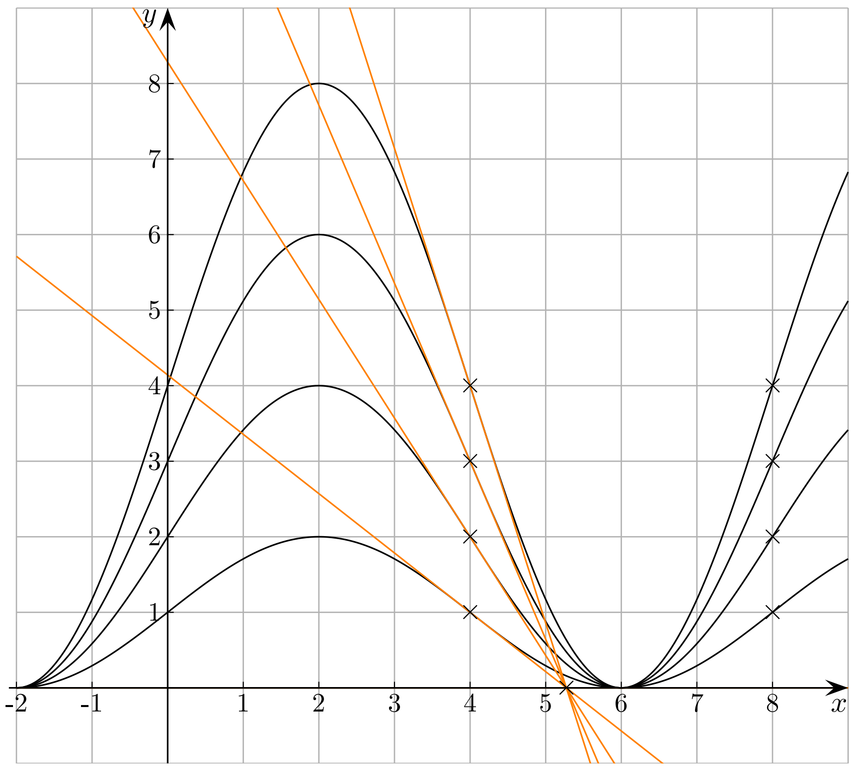
Funktionenschar

Von einer Funktionenschar f_k sind die Graphen von f_1, f_2, f_3 und f_4 abgebildet.
Gib einen möglichen Funktionsterm f_k an.
Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten $P_k(4\,|\,\ldots)$ von f_k einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.



Funktionenschar

Von einer Funktionenschar f_k sind die Graphen von f_1, f_2, f_3 und f_4 abgebildet.
Gib einen möglichen Funktionsterm f_k an.
Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Punkten $P_k(4\,|\,\dots)$ von f_k einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.



$f_k(x) = k + k \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x)$

Tangenten $\quad y = -\frac{1}{4}k\pi(x-4) + k \quad$ oder $\quad y = k(-\frac{\pi}{4}x + \pi + 1)$

Schnittstelle $\quad x_s = \frac{4(\pi+1)}{\pi}$

Funktionenschar

Gegeben sind die beiden Funktionenscharen $f_a(x) = \frac{a}{4}\sin(x)$ und $g_a(x) = \sqrt{3} - \frac{3}{a}\sin(x)$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Es sind Graphen für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ abgebildet. Ordnen Sie sie zu.

b) Wie lauten die Extrempunkte von g_a?

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von g_a in Abhängigkeit von a.

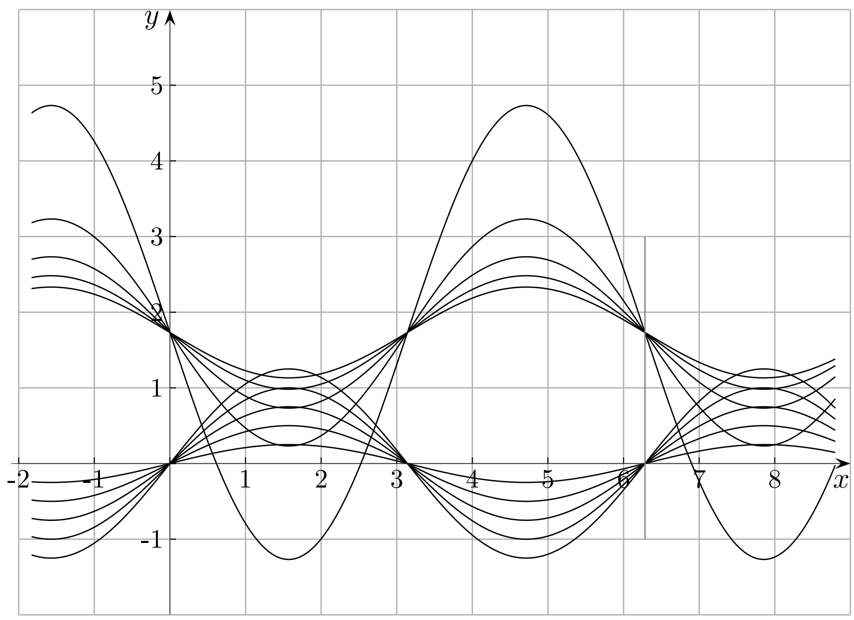
d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von g_2 aus dem Graph von f_4 hervor?

e) Für welche Werte von a schneiden sich die Graphen von f_a und g_a an der Stelle $x = \frac{1}{3}\pi$?

f) Für welche Werte von a berühren sich die Graphen?

g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für $a = 2$ einschließen.

h) Sei $a = 2$. Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.



Funktionenschar Ergebnisse

a) Es sind Graphen für $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ abgebildet. Ordnen Sie sie zu. ...

b) Wie lauten die Extrempunkte von g_a?
$\text{Min}\left(\frac{1}{2}\pi \mid \sqrt{3} - \frac{3}{a}\right)$, $\text{Max}\left(\frac{3}{2}\pi \mid \sqrt{3} + \frac{3}{a}\right)$

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von g_a in Abhängigkeit von a.
2 Nullstellen für $a < \sqrt{3}$, 1 Nullstelle für $a = \sqrt{3}$, keine Nullstelle für $a > \sqrt{3}$

d) Durch welche Abbildungen geht der Graph von g_2 aus dem Graph von $h(x) = \sin(x)$ hervor?
Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = 1{,}5$,
Spiegelung an der x-Achse,
Verschiebung in y-Richtung um $\sqrt{3}$

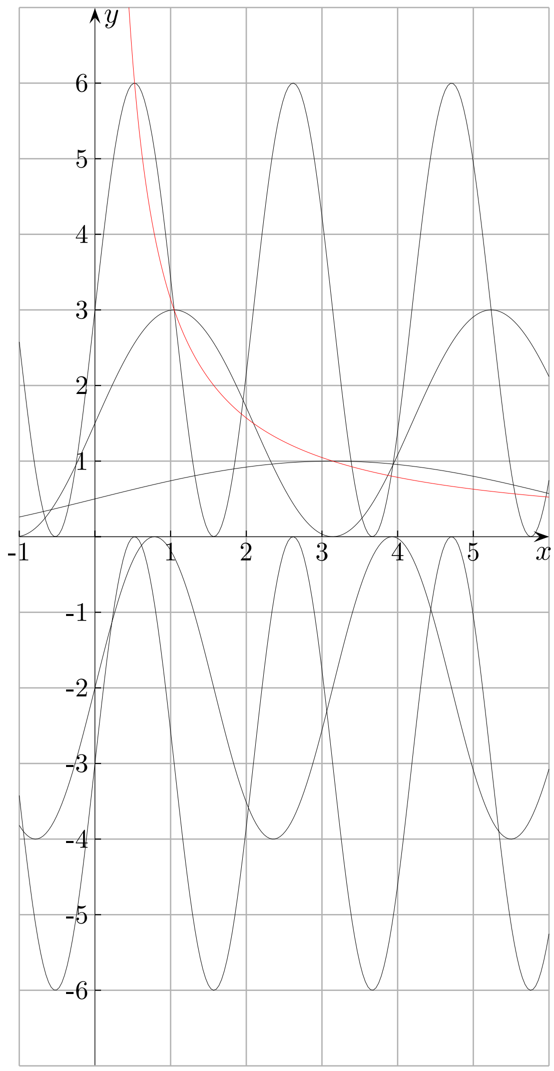
e) Für welche Werte von a schneiden sich die Graphen von f_a und g_a an der Stelle $x = \frac{1}{3}\pi$?
$a^2 - 8a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 2,\ a_2 = 6$

f) Für welche Werte von a berühren sich die Graphen?
$f_a(\frac{1}{2}\pi) = g_a(\frac{1}{2}\pi)$ (Extremstellen!)
$a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{1/2} = 2\sqrt{3}$

g) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen für $a = 2$ einschließen.
$$A = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} [\,f_2(x) - g_2(x)\,]\,dx = 0{,}186$$

h) Sei $a = 2$. Die Tangenten in den Schnittpunkten der beiden Graphen bilden ein Drachenviereck. Ermitteln Sie seinen Inhalt.
$S_1\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$, $S_2\left(\frac{2}{3}\pi \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$
Tangentengleichungen in S_1:
$y = 0{,}25x + 0{,}1712$
$y = -0{,}75x + 1{,}2184$
an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$: $y_1 = 0{,}5639$, $y_2 = 0{,}0403$
Diagonallängen $e = 1{,}0472$, $f = 0{,}5236$ (vertikal)
$A = 0{,}274$

Funktionenschar

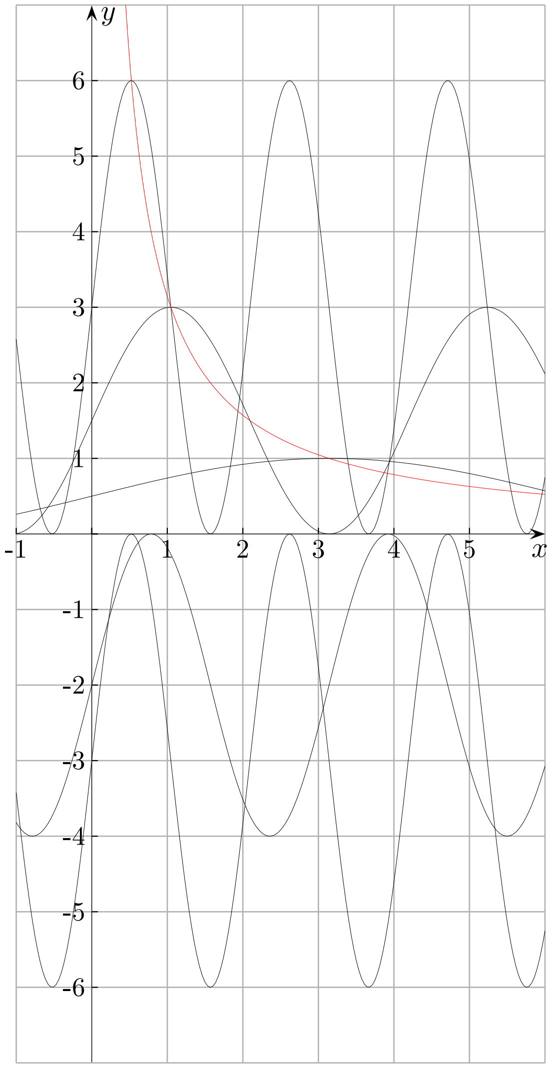


a) Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$ für $k \neq 0$.
Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen.

b) Für positive Werte des Parameters k liegen die 1. Hochpunkte rechts von der y-Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung.

c) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen.
Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für k auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Funktionenschar



a) Zu sehen sind verschiedene Graphen der Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot (1 + \sin(kx))$ für $k \neq 0$.
Ermitteln Sie begründet die Parameter für die dargestellten Graphen. Beachte: $f_k(0) = k$

b) Für positive Werte des Parameters k liegen die 1. Hochpunkte rechts von der y-Achse auf einer Ortslinie. Ermitteln Sie deren Gleichung. $Max(\frac{\pi}{2k} \mid 2k),\ g(x) = \frac{\pi}{x}$

c) Zeichnen Sie die Graphen für $k = 1$ und $k = 2$. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen. $k = 1$: $x_1 = \frac{3}{2}\pi,\ x_2 = \frac{7}{2}\pi$

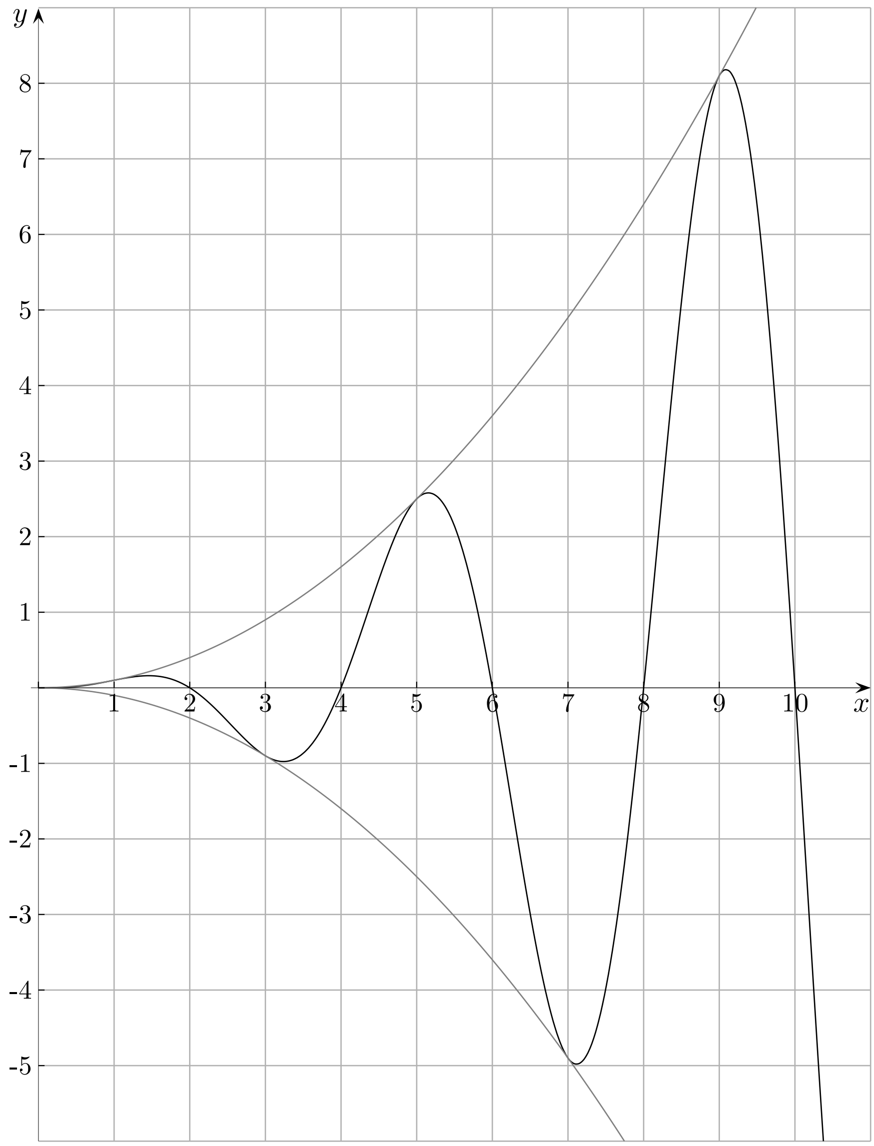
$k = 2$: $x_1 = \frac{3}{4}\pi,\ x_2 = \frac{7}{4}\pi, \quad A = 2\pi$

Stellen Sie eine Vermutung für den Flächeninhalt für allgemeine Werte für k auf. Machen Sie diese plausibel. Beweisen Sie Ihre Vermutung. A ist unabhängig von k.

Beachte: Steckung/Stauchung in x- und y-Achsenrichtung

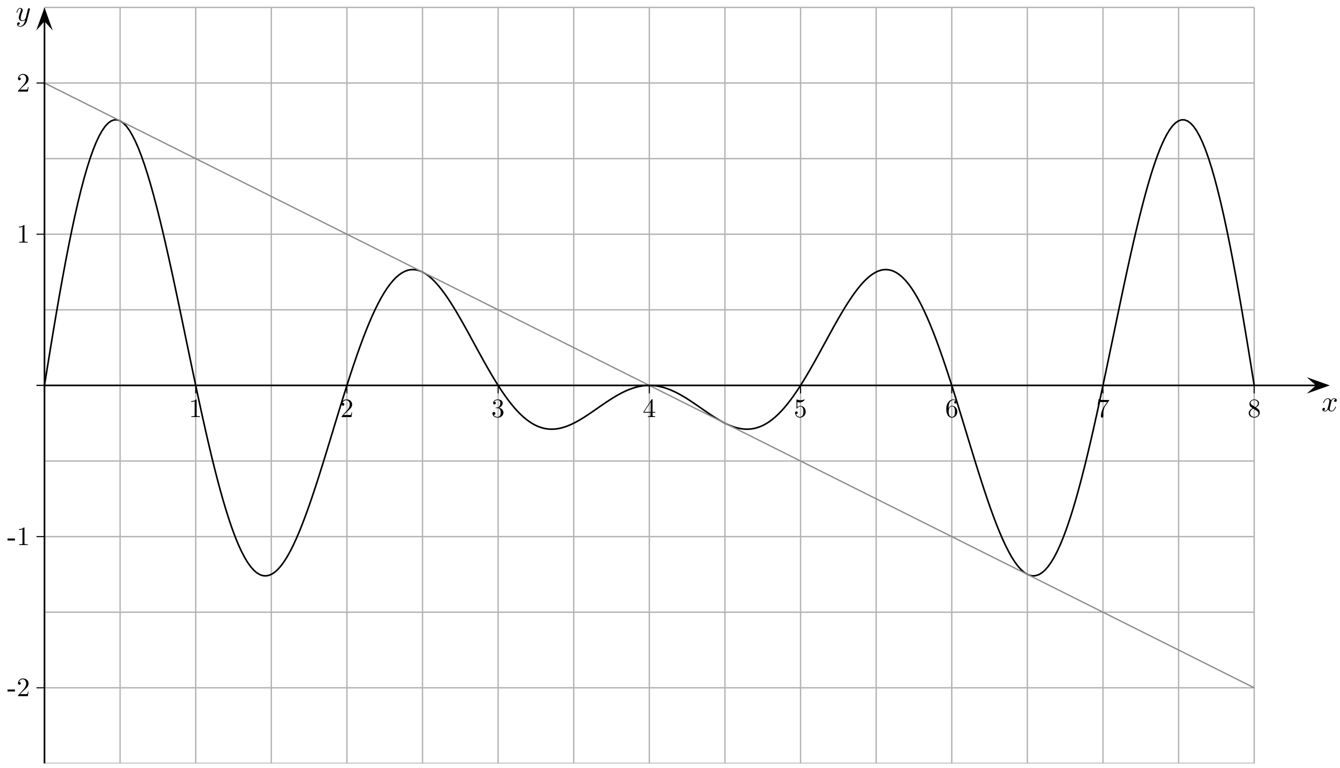
Funktion $f(x) = ax^2 \cdot \sin(bx)$

Die mit einer quadratischen Funktion multiplizierte Sinusfunktion ist vom angegebenen Typ,
$P(5 \mid 2{,}5)$ liegt auf ihrem Graphen.
Ermitteln Sie a und b
und sodann die Stellen mit waagerechter Tangente im Bereich $4 \leq x \leq 4$.



Sinus-Funktion

Ermitteln Sie den Funktionsterm.

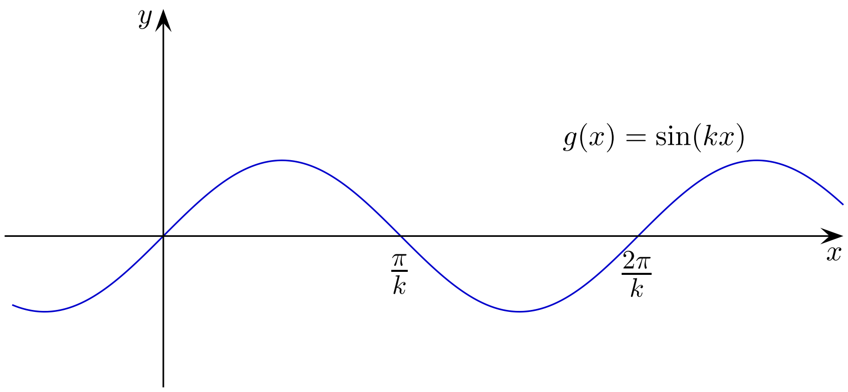


1. Wie lautet die 3. Nullstelle von $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x + 2) \cdot \sin(kx)$ für $x \geq 0$ vom Ursprung aus betrachtet?

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x)$.
   Zeigen Sie $f''(x) + f(x) = -2\sin(x)$ und berechnen Sie $\int f(x)\,dx$.

Funktionenschar

Wie lautet die 3. Nullstelle von $f_k(x) = (-\frac{1}{2}x+2)\cdot\sin(kx)$ für $x \geq 0$ vom Ursprung aus betrachtet?



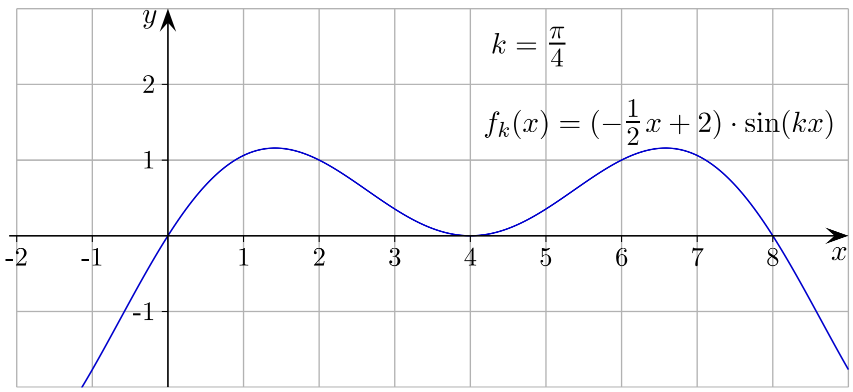
Es sind 4 Fälle zu unterscheiden:

$4 < \frac{\pi}{k} \iff k < \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{\pi}{k}$

$\frac{\pi}{k} < 4 \leq \frac{2\pi}{k} \iff \frac{\pi}{4} < k \leq \frac{\pi}{2}, \quad x_N = 4$

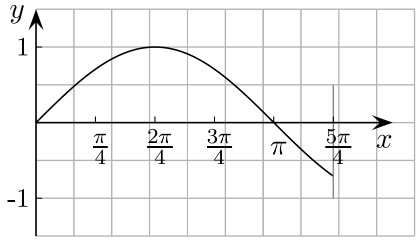
$4 = \frac{\pi}{k} \iff k = \frac{\pi}{4}, \quad x_N = \frac{2\pi}{k} = 8$

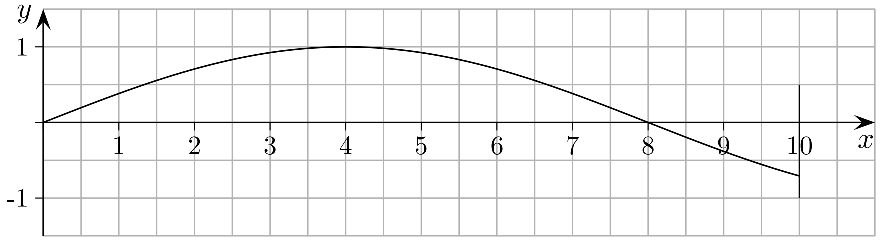
$\frac{2\pi}{k} < 4 \iff \frac{\pi}{2} < k, \quad x_N = \frac{2\pi}{k}$

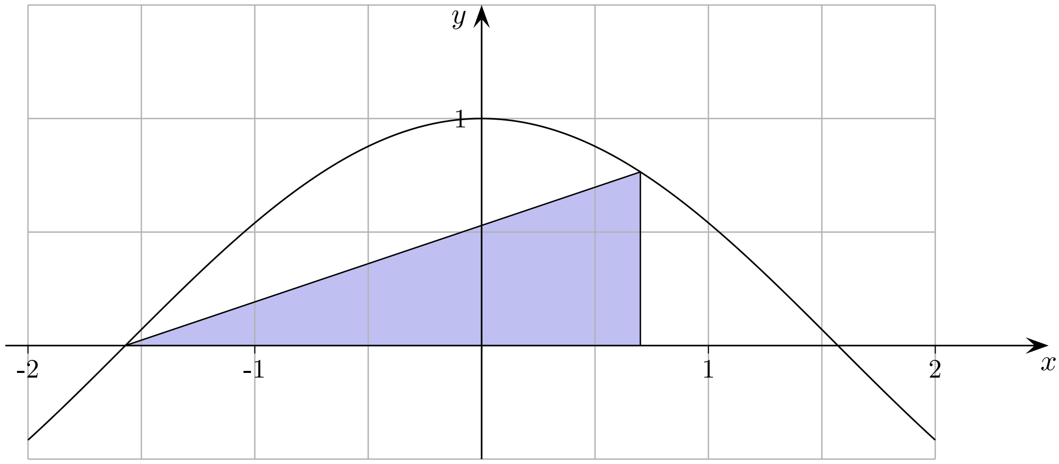


Streckung

Der untere Graph geht durch Streckung in x-Richtung aus dem oberen Sinus-Graph hervor.
Ermitteln Sie den Funktionsterm des unteren Graphen.







Gegeben ist der Graph von $f(x) = \cos(x)$.
Ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks.