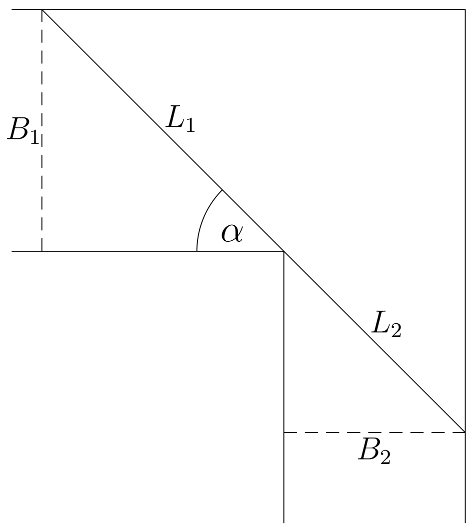
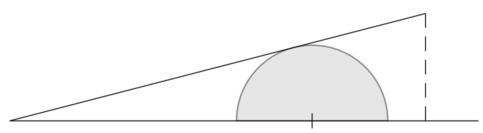
Extremwertaufgaben II

1. Beim Transport langer Stäbe ist eine rechtwinklige Abzweigung die kritische Stelle ($B_1 = 8\,m,\ B_2 = 6\,m$). Wie lang darf ein Stab maximal sein, wenn wir vereinfachend eine Stabbreite 0 annehmen und die Stäbe am Boden transportiert werden?

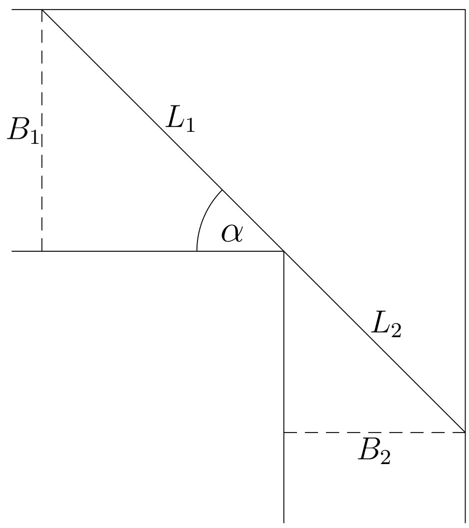


2. Über eine Halbröhre (Halbkreis als Querschnittsfläche) soll ein Brett so geschoben werden, dass es mit dem einen Ende stets noch Kontakt mit dem Erdboden hat (Brettlänge $L = 5\,m$, Radius $R = 1\,m$).
   Wie weit reicht das Brett in horizontaler Richtung über den Mittelpunkt des Halbkreises hinaus?



Extremwertaufgaben II

1. Beim Transport langer Stäbe ist eine rechtwinklige Abzweigung die kritische Stelle $(B_1 = 8\,m,\ B_2 = 6\,m)$. Wie lang darf ein Stab maximal sein, wenn wir vereinfachend eine Stabbreite 0 annehmen und die Stäbe am Boden transportiert werden?



Lösung:

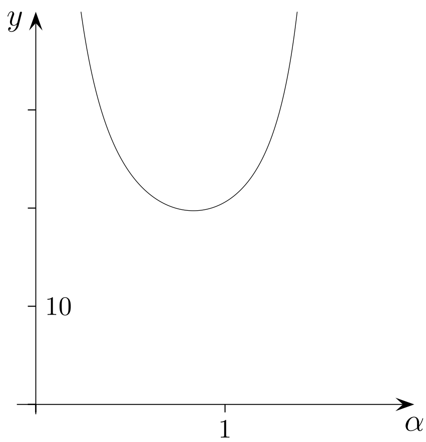
$$B_1 = L_1 \cdot \sin\alpha$$
$$B_2 = L_2 \cdot \cos\alpha$$

$$L(\alpha) = \frac{B_1}{\sin\alpha} + \frac{B_2}{\cos\alpha}$$

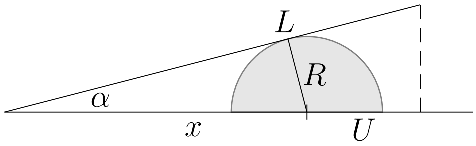
$\alpha = 0{,}833, \quad L = 19{,}73\,m$

in Maple:

$plot(L(x),\ x = 0\,..\,Pi/2,\ y = 0\,..\,40,\ numpoints = 500);$
$L1 := unapply(\,diff(L(x),\ x),\ x\,);$
$x0 := fsolve(L1(x) = 0,\ x = 0\,..\,Pi/2);$
$L(x0);$



2. Über eine Halbröhre (Halbkreis als Querschnittsfläche) soll ein Brett so geschoben werden, dass es mit dem einen Ende stets noch Kontakt mit dem Erdboden hat (Brettlänge $L = 5\,m$, Radius $R = 1\,m$).
   Wie weit reicht das Brett in horizontaler Richtung über den Mittelpunkt des Halbkreises hinaus?



Lösung:

$$\cos\alpha = \frac{x+U}{L}$$

$$U = L\cdot\cos\alpha - x$$

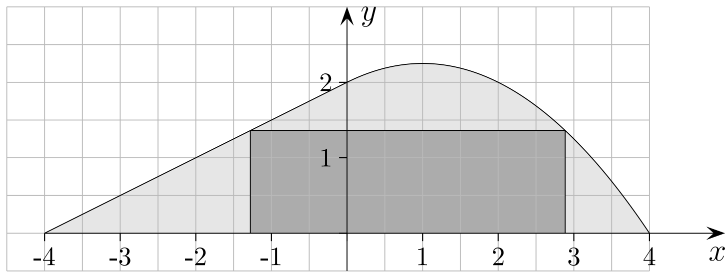
$$\sin\alpha = \frac{R}{x}$$

$$x = \frac{R}{\sin\alpha}$$

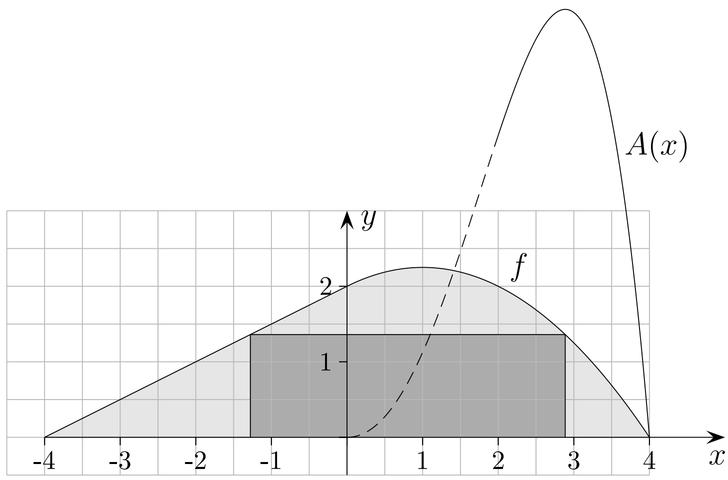
$$U(\alpha) \;=\; L\cdot\cos\alpha - \frac{R}{\sin\alpha}$$

$$\alpha = 33{,}4^\circ, \quad U = 2{,}358\,m$$

3. In das hellgraue Flächenstück soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben werden. Im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ ist die obere Begrenzungslinie geradlinig, im Bereich $0 \leq x \leq 4$ parabelförmig. An der Stelle $x = 0$ liegt kein Knick vor. Ermittle A. Es darf angenommen werden, dass die rechte untere Ecke des Rechtecks auf der x-Achse zwischen 2 und 4 liegt.



3. In das hellgraue Flächenstück soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben werden. Im Bereich $-4 \leq x \leq 0$ ist die obere Begrenzungslinie geradlinig, im Bereich $0 \leq x \leq 4$ parabelförmig. An der Stelle $x = 0$ liegt kein Knick vor. Ermittle A. Es darf angenommen werden, dass die rechte untere Ecke des Rechtecks auf der x-Achse zwischen 2 und 4 liegt.



$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

$y = \frac{1}{2}x + 2$

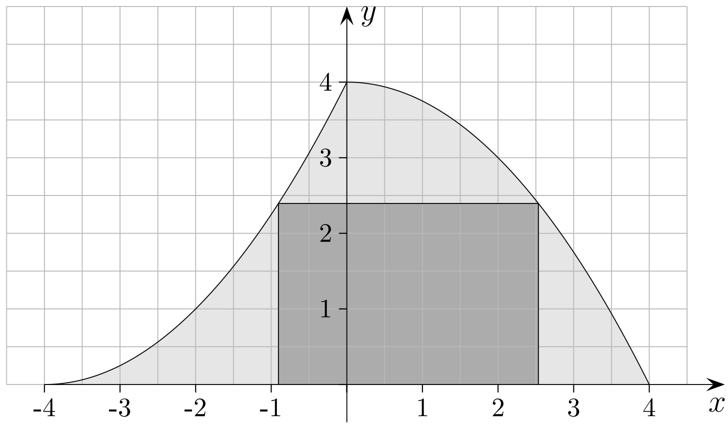
$x = -4 + 2y$

$A(x) = (x - (-4 + 2f(x))) \cdot f(x)$

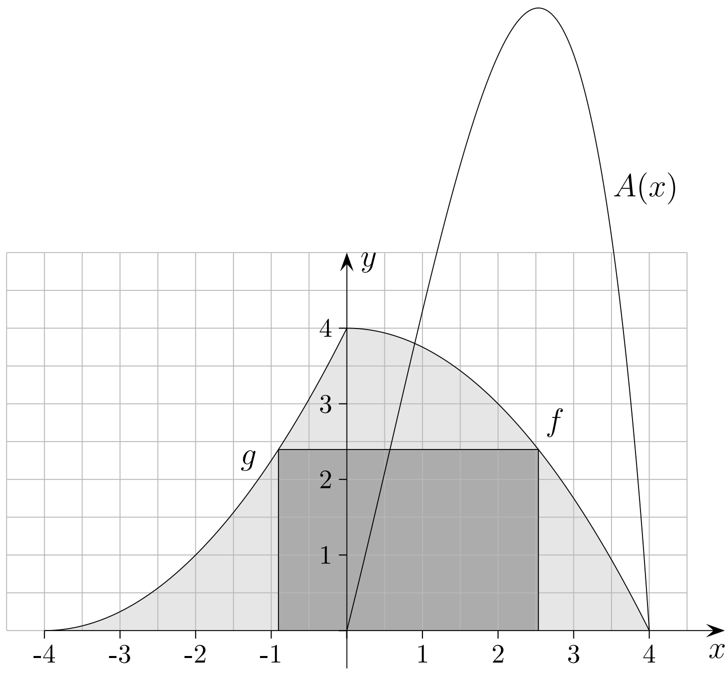
$x_{\text{max}} = 2{,}886$

$A_{\text{max}} = 5{,}667$

In das hellgraue Flächenstück wird ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Die oberen Begrenzungslinien sind parabelförmig. Ermittle A.



In das hellgraue Flächenstück wird ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A einbeschrieben. Die oberen Begrenzungslinien sind parabelförmig. Ermittle A.



$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

$g(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2$

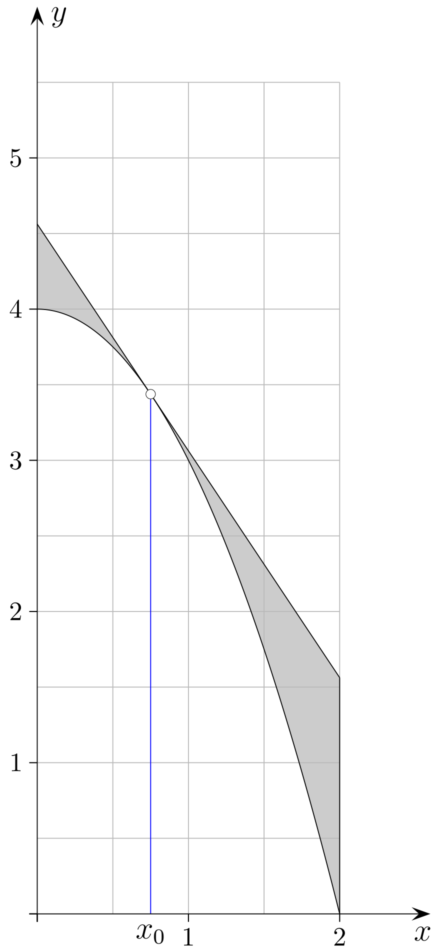
$x = 2\sqrt{y} - 4$

$A(x) = (x - (2\sqrt{f(x)} - 4)) \cdot f(x)$

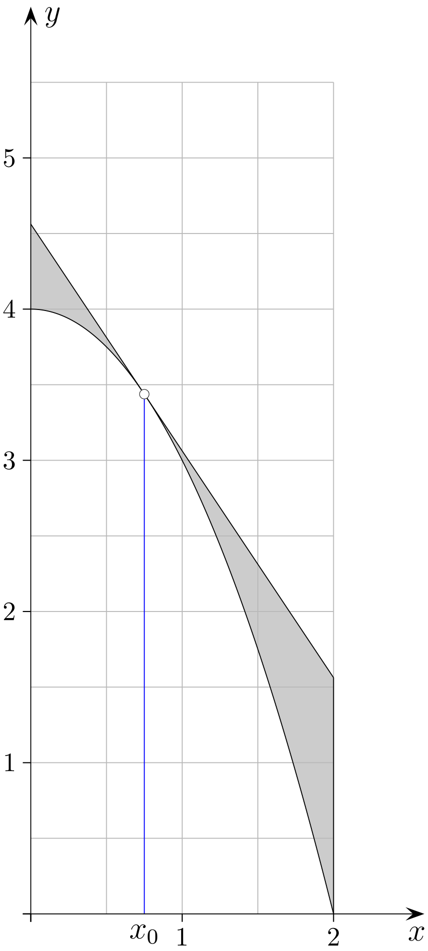
$x = 2{,}534$

$A = 8{,}235$

Für welches x_0 ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ und der Tangente an der Stelle x_0 im Bereich $0 \leq x \leq 2$ minimal?



Für welches x_0 ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ und der Tangente an der Stelle x_0 im Bereich $0 \leq x \leq 2$ minimal?



$t_{x_0} = -2x_0(x - x_0) + 4 - x_0^2$

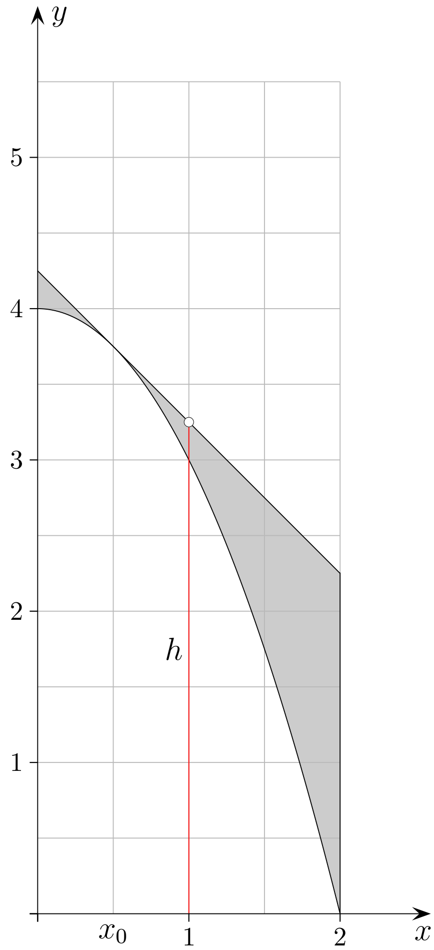
$t_{x_0} - f(x) = -2x_0 x + x_0^2 + x^2$

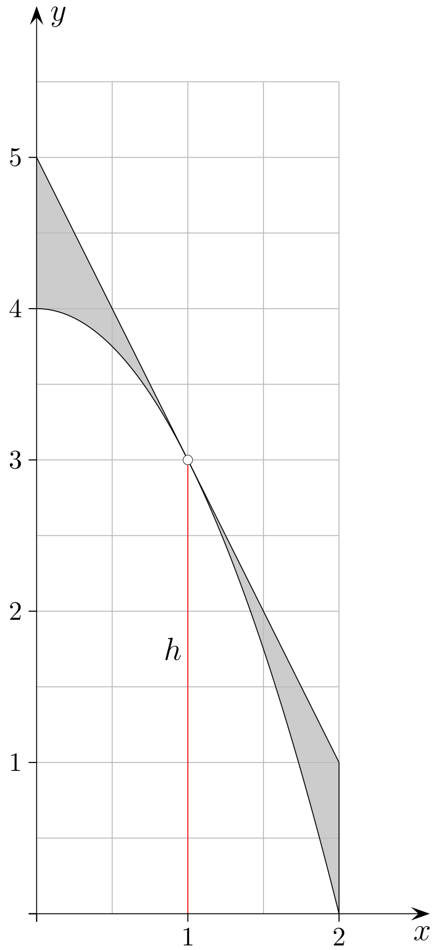
$A(x_0) = \displaystyle\int_0^2 (t_{x_0} - f(x))\, dx = \ldots$

$A'(x_0) = 4x_0 - 4$

$x_0 = 1$

Das Ergebnis kann auch ohne Differenzialrechnung ermittelt werden.
Die Tangenten begrenzen im Bereich $0 \leq x \leq 2$ Trapezflächen, deren Minimum gesucht ist, da der zu subtrahierende Wert $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ konstant ist.

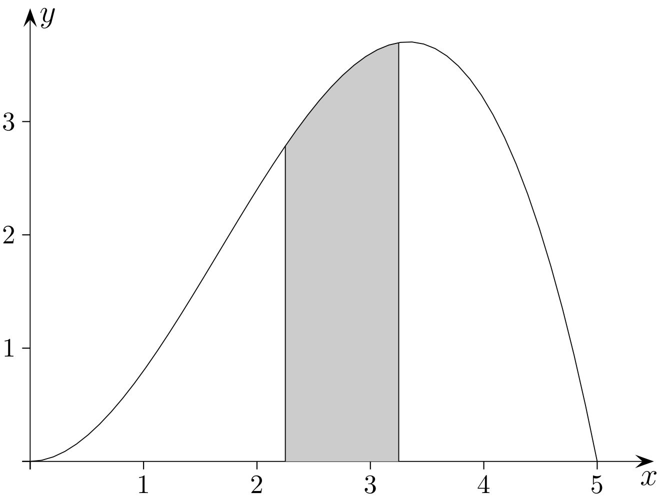




Die Trapezfläche wird mit $A = 2 \cdot h$ berechnet (h Mittellinie).
$h = 3$ ist minimal.

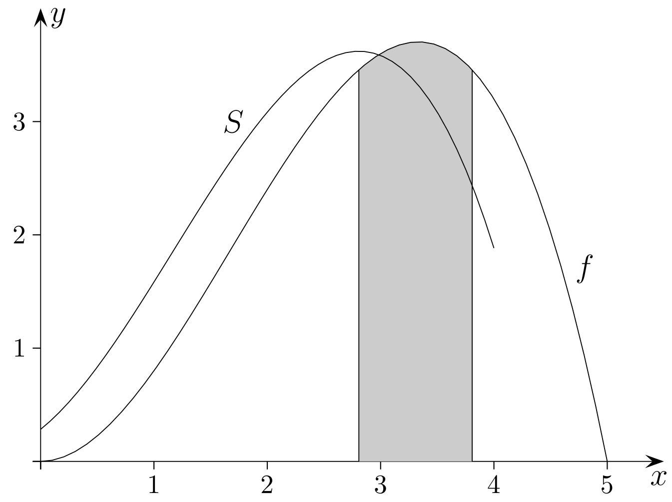
Ausblick:
Das Ergebnis (Stelle des Minimums in der Bereichsmitte) gilt für jeden Bereich $a \leq x \leq b$ und überdies sogar für jede rechtsgekrümmte (linksgekrümmte) Funktion, deren Graph daher unterhalb (oberhalb) der Tangentenschar verläuft.

Streifen-Aufgabe



Welcher Streifen unter der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2(5-x)$ hat im Bereich $0 \le x \le 5$ maximalen Flächeninhalt?

Streifen-Aufgabe



Welcher Streifen unter der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2(5-x)$ hat im Bereich $0 \leq x \leq 5$ maximalen Flächeninhalt?

Maximum der Funktion $S(x) = \int\limits_{x}^{x+1} f(t)\,dt$ an der Stelle $x_1 = 2{,}808$ (linke Streifengrenze)

Zeige mit der Funktion S, dass für ein Maximum die Funktionswerte von linker und rechter Streifengrenze übereinstimmen.

$$S(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt$$

Zeige mit der Funktion S, dass für ein Maximum die Funktionswerte von linker und rechter Streifengrenze übereinstimmen.

$$S(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt = F(x+1) - F(x)$$

$$S'(x_E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_E + 1) - f(x_E) = 0$$