e-Funktionen Aufgaben

Die Fichte ist in Nordeuropa und den Gebirgen Mitteleuropas beheimatet. Durch Aufforsten wurde sie jedoch auch im übrigen Europa weit verbreitet. Fichten können je nach Standort Höhen zwischen 30 m und 50 m und Durchmesser bis zu 120 cm erreichen.

1. Der Brusthöhendurchmesser (gemessen in 1,3 m Höhe) als Funktion der Zeit werde durch die Funktion
$$d(x) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}05(x-60)}}, \quad x \geq 0$$
beschrieben (d in Meter, x in Jahre).

   a) Untersuche $d(x)$ auf Symmetrie, Wendepunkte und Asymptoten. Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 100$.

   b) Welches Alter hat eine Fichte mit 0,4 m Durchmesser?

   c) Ermittle die Umkehrfunktion $d^{-1}(x)$.

2. Die Höhe einer Fichte werde angenähert durch die Funktion
$$h(x) = a(1 + \arctan\frac{x-b}{c})$$
beschrieben.

   a) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes S, in dem die Steigung des Graphen maximal ist. *Ergebnis:* $S(b \mid a)$

   b) Bestimme die Konstanten a, b und c so, dass die Fichte eine maximale Höhe von 51,4 m erreicht und im Alter von 31 Jahren mit 1,0 m pro Jahr das größte Längenwachstum besitzt. *Ergebnis:* $a = 20,\ b = 31,\ c = 20$

   c) Wie lange dauert es, bis die Fichte 45 m hoch ist?

3. Das jährliche Längenwachstum w (in m) einer Fichte werde näherungsweise durch die Funktion
$$w(x) = \frac{500}{625 + (x - 38{,}75)^2}$$
beschrieben.

   a) Zeige, dass der Graph zu der Geraden $x = 38{,}75$ achsensymmetrisch ist und genau ein Maximum besitzt.

   b) In welchem Alter wächst der Baum um 0,5 m im Jahr?

   c) Bestimme die Endhöhe dieser Fichte.

Die Fichte Lösungshinweise

Die Fichte ist in Nordeuropa und den Gebirgen Mitteleuropas beheimatet. Durch Aufforsten wurde sie jedoch auch im übrigen Europa weit verbreitet. Fichten können je nach Standort Höhen zwischen 30 m und 50 m und Durchmesser bis zu 120 cm erreichen.

1. Der Brusthöhendurchmesser (gemessen in 1,3 m Höhe) als Funktion der Zeit werde durch die Funktion

$$d(x) = \frac{1}{1+e^{-0{,}05(x-60)}}, \quad x \geq 0$$

beschrieben (d in Meter, x in Jahre).

a) Untersuche $d(x)$ auf Symmetrie, Wendepunkte und Asymptoten. Zeichne den Graphen der Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 100$.

b) Welches Alter hat eine Fichte mit 0,4 m Durchmesser? — 52,0 Jahre

c) Ermittle die Umkehrfunktion $d^{-1}(x)$. — $d^{-1}(x) = -20\ln\frac{1-x}{x} + 60$

2. Die Höhe einer Fichte werde angenähert durch die Funktion

$$h(x) = a(1 + \arctan\frac{x-b}{c})$$

beschrieben.

a) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes S, in dem die Steigung des Graphen maximal ist. *Ergebnis:* $S(b \mid a)$

$$h'(x) = \frac{ac}{c^2+(x-b)^2}$$

b) Bestimme die Konstanten a, b und c so, dass die Fichte eine maximale Höhe von 51,4 m erreicht und im Alter von 31 Jahren mit 1,0 m pro Jahr das größte Längenwachstum besitzt.

$b = 31$ siehe 2a)

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = a(1+\tfrac{\pi}{2}) = 51{,}4 \quad \Longrightarrow \quad a = 20$$

$$h'(31) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 20$$

c) Wie lange dauert es, bis die Fichte 45 m hoch ist? — 91,2 Jahre

3. Das jährliche Längenwachstum w (in m) einer Fichte werde näherungsweise durch die Funktion

$$w(x) = \frac{500}{625+(x-38{,}75)^2}$$

beschrieben.

a) Zeige, dass der Graph zu der Geraden $x = 38{,}75$ achsensymmetrisch ist und genau ein Maximum besitzt. — unmittelbar einsichtig

b) In welchem Alter wächst der Baum um 0,5 m im Jahr? — 19,4 und 58,1 Jahre

c) Bestimme die Endhöhe dieser Fichte.

$$\int_0^\infty w(x)\,dx = \Big[h(x)\Big]_0^\infty = 51{,}4$$

beachte: ein Vergleich mit 2a) liefert $b = 38{,}75$ $c = 25$ $a = 20$ $(ac = 500)$

$$h(0) = 0{,}04 \approx 0 \qquad \lim_{x\to\infty} h(x) = 20(1+\tfrac{\pi}{2}) = 51{,}4$$

Wachstum von Fichten

Fichten stellen in Deutschland mit über 40 % der Gesamtwaldfläche die wichtigste Holzart dar.
In einer Region wurden folgende Durchschnittswerte gemessen (bei älteren Fichten in 1,30 m Höhe):

Alter des Baumes (in Jahren)	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Durchmesser (in m)	0,05	0,10	0,22	0,33	0,54	0,75	0,83	0,91	0,95

a) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten in dieser Region kann durch eine Funktion d mit

$$d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}04(t-80)}}$$

näherungsweise beschrieben werden. Skizzieren Sie die gemessenen Durchschnittswerte sowie den Graphen von d in ein gemeinsames Koordinatensystem. Ermitteln Sie, in welchem Jahr die Funktion d das stärkste Dickenwachstum beschreibt und bestimmen Sie dieses maximale Dickenwachstum.

b) Nennen Sie Annahmen, die logistischem Wachstum zu Grunde liegen. Stellen Sie die Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten auf unter der Annahme, dass logistisches Wachstum vorliegt. Zeigen Sie, dass d diese Differentialgleichung löst.

c) Oft kennen Forstleute das Alter eines Baumes nicht. Der Umfang ist meist einfacher zu messen als der Durchmesser. Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion d eine weitere Funktion, die das Alter einer Fichte in Abhängigkeit von ihrem Umfang näherungsweise beschreibt.

d) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten soll durch eine Funktion anderen Typs als im Aufgabenteil a) approximiert werden. Beschreiben Sie mindestens zwei unterschiedliche Lösungsansätze in Kurzform und führen Sie einen aus. Beurteilen Sie die Qualität Ihrer Approximation im Vergleich mit der Approximation durch die Funktion d.

Lösungsvariante 1:
ganzrationale Funktion $d_1(t)$

Lösungsvariante 2:

$$d_2(t) = \begin{cases} a_1 \cdot e^{a_2 \cdot t} & \text{für} \quad 0 \leq t < 80 \\ 1 - b_1 \cdot e^{b_2 \cdot t} & \text{für} \quad 80 \leq t \leq 160 \end{cases}$$

Lösungsvariante 3: (CAS)

$$d_3(t) = a + k \cdot \arctan \frac{t-b}{c}$$

Wachstum von Fichten   Lösungshinweise

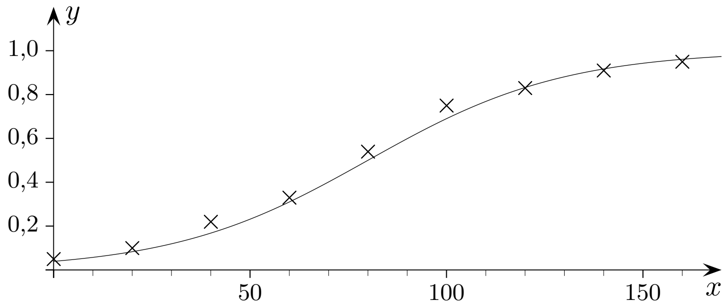
Fichten stellen in Deutschland mit über 40 % der Gesamtwaldfläche die wichtigste Holzart dar.
In einer Region wurden folgende Durchschnittswerte gemessen (bei älteren Fichten in 1,30 m Höhe):

Alter des Baumes (in Jahren)	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Durchmesser (in m)	0,05	0,10	0,22	0,33	0,54	0,75	0,83	0,91	0,95

a) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten in dieser Region kann durch eine Funktion d mit

$$d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}04(t-80)}}$$

näherungsweise beschrieben werden. Skizzieren Sie die gemessenen Durchschnittswerte sowie den Graphen von d in ein gemeinsames Koordinatensystem. Ermitteln Sie, in welchem Jahr die Funktion d das stärkste Dickenwachstum beschreibt und bestimmen Sie dieses maximale Dickenwachstum.



Der maximale Wert von $d'(t)$ wird an der Stelle $t = 80$ zu 0,01 ermittelt.

b) Nennen Sie Annahmen, die logistischem Wachstum zu Grunde liegen. Stellen Sie die Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten auf unter der Annahme, dass logistisches Wachstum vorliegt. Zeigen Sie, dass d diese Differentialgleichung löst.

$$d'(t) = c \cdot d(t) \cdot \left[S - d(t)\right]$$
$$S = \lim_{t\to\infty} d(t) = 1, \quad c = 0{,}04$$

c) Oft kennen Forstleute das Alter eines Baumes nicht. Der Umfang ist meist einfacher zu messen als der Durchmesser. Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion d eine weitere Funktion, die das Alter einer Fichte in Abhängigkeit von ihrem Umfang näherungsweise beschreibt.

$$u(t) = \pi \cdot d(t) \quad \Longrightarrow \quad t(u) = 80 - 25 \cdot \ln \frac{\pi - u}{u}, \quad u > 0$$

d) Die zeitliche Entwicklung der Dicke der Fichten soll durch eine Funktion anderen Typs als im Aufgabenteil a) approximiert werden. Beschreiben Sie mindestens zwei unterschiedliche Lösungsansätze in Kurzform und führen Sie einen aus. Beurteilen Sie die Qualität Ihrer Approximation im Vergleich mit der Approximation durch die Funktion d.

Lösungsvariante 1: z.B. $d_1(t) = -5{,}03 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 + 1{,}14 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 1{,}87 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0{,}05$

Lösungsvariante 2: Stetigkeit, Differenzierbarkeit an der Übergangsstelle

$$d_2(t) = \begin{cases} a_1 \cdot e^{a_2 \cdot t} & \text{für } 0 \le t < 80 \\ 1 - b_1 \cdot e^{b_2 \cdot t} & \text{für } 80 \le t \le 160 \end{cases} \qquad d_2(t) = \begin{cases} 0{,}05 \cdot e^{0{,}0297 \cdot t} & \text{für } 0 \le t < 80 \\ 1 - 7{,}43 \cdot e^{-0{,}0348 \cdot t} & \text{für } 80 \le t \le 160 \end{cases}$$

Lösungsvariante 3: (CAS) a, b ersichtlich, betrachte $P(0 \mid 0,05)$ und $d_3'(80)$, manuelle Anpassung

$$d_3(t) = a + k \cdot \arctan \frac{t-b}{c} \qquad d_3(t) = 0{,}5 + 0{,}38 \cdot \arctan \frac{t-80}{31{,}8}$$

Bakterien-Aufgabe

Ein Biologe versucht, das Wachstum von Bakterien durch die Differentialgleichung

$$f'(x) = (k - bx) \cdot f(x)\,, \qquad f(0) = 2, \quad k > 0,\ b > 0,\ D = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

zu erfassen, wobei b wesentlich kleiner als k gewählt werden soll (x ist die Zeit in Tagen, $f(x)$ der Bestand in Tausendern).

a) Vergleichen Sie dieses Wachstum mit dem exponentiellen Wachstum und stellen Sie begründete Vermutungen über den Verlauf des Graphen von f <u>anhand der DGL</u> an.
Lösen Sie die Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie k und b für die Funktion $f(x) = 2\,e^{kx - \frac{1}{2}bx^2}$ so, dass der Bestand nach 10 Tagen 2 Einheiten und nach insgesamt 25 Tagen 0,307 Einheiten beträgt.

c) Für die Modellierung wird nun die Funktion $f_k(x) = 2\,e^{kx - \frac{1}{200}x^2}$ zugrundegelegt.
Berechnen Sie algebraisch für $k = \frac{1}{5}$ die x-Koordinaten des Extremums und der Wendepunkte.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen und bringen Sie ihn in Beziehung zum Exponenten der e-Funktion.

Bakterien-Aufgabe Lösungshinweise

a) Für das exponentielle Wachstum gilt $f'(x) = k \cdot f(x)$.
In diesem Fall wird die Wachstumskonstante k um eine Größe vermindert, die proportional zur Zeit x ist.
Der Graph von f wird aufgrund der positiven Steigung zunächst ansteigen, für $k - bx = 0$ sein Maximum erreichen und dann monoton fallend sein.

Die DGL wird durch Trennen der Variablen gelöst, Ergebnis: $f(x) = 2\,e^{kx - \frac{1}{2}\,bx^2}$.

b) Die Parameter k und b werden mit einem Gleichungssystem $f(10) = 2,\ f(25) = 0{,}307$ ermittelt, das durch Logarithmieren vereinfacht wird, $k = 0{,}05$ und $b = 0{,}01$ (gerundet).

c) Notw. Bedingung für ein Extremum:
(Für eine Variation der Fragestellung erfolgt die Berechnung für allgemeines k)

$f'(x) = 0\,,\ f'(x) = 2\,(k - \frac{1}{100}\,x) \cdot e^{kx - \frac{1}{200}x^2} \quad \Longrightarrow \quad x_e = 100\,k.$

Wegen des monotonen Steigens und Fallens des Graphen liegt ein Maximum vor.

Notw. Bedingung für Wendepunkte:

$f''(x) = 0\,,\ f''(x) = -\frac{1}{50}\,e^{kx - \frac{1}{200}x^2} + 2\,(k - \frac{1}{100}\,x)^2 \cdot e^{kx - \frac{1}{200}x^2}$

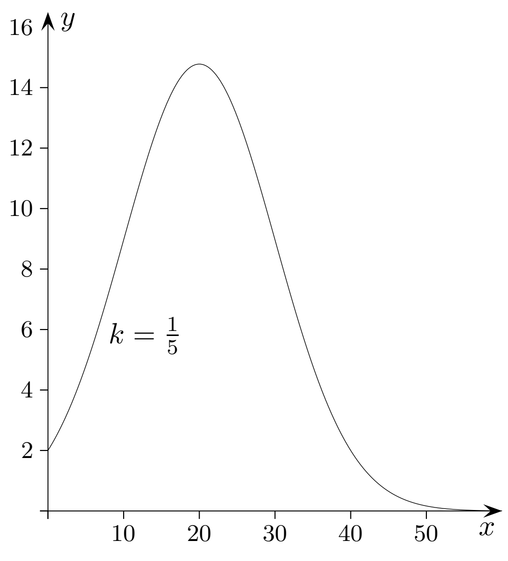
vereinfacht: $f''(x) = (-\frac{1}{50} + 2k^2 - \frac{1}{25}kx + \frac{1}{5000}\,x^2) \cdot e^{kx - \frac{1}{200}x^2}$

$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{50} + 2k^2 - \frac{1}{25}kx + \frac{1}{5000}\,x^2 = 0$

$\Longrightarrow \quad x_1 = 100\,k + 10,\ x_2 = 100\,k - 10$, falls x_2 im Definitionsbereich liegt.

Da die Parabel oberhalb und unterhalb der x-Achse verläuft (Vorzeichenwechsel!), liegen Wendepunkte $x_1,\ x_2$ (falls im Definitionsbereich) vor.

Betrachte hierzu die quadratische Funktion (Parabel) im Exponenten, insbesondere deren Nullstellen.

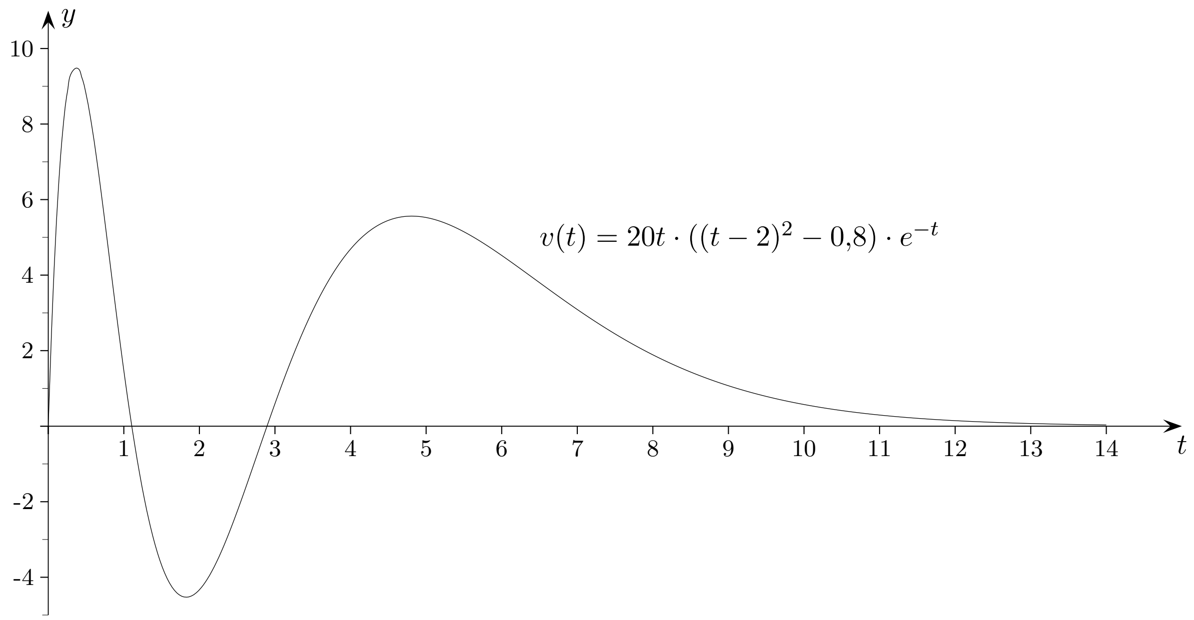


Wasserpumpe

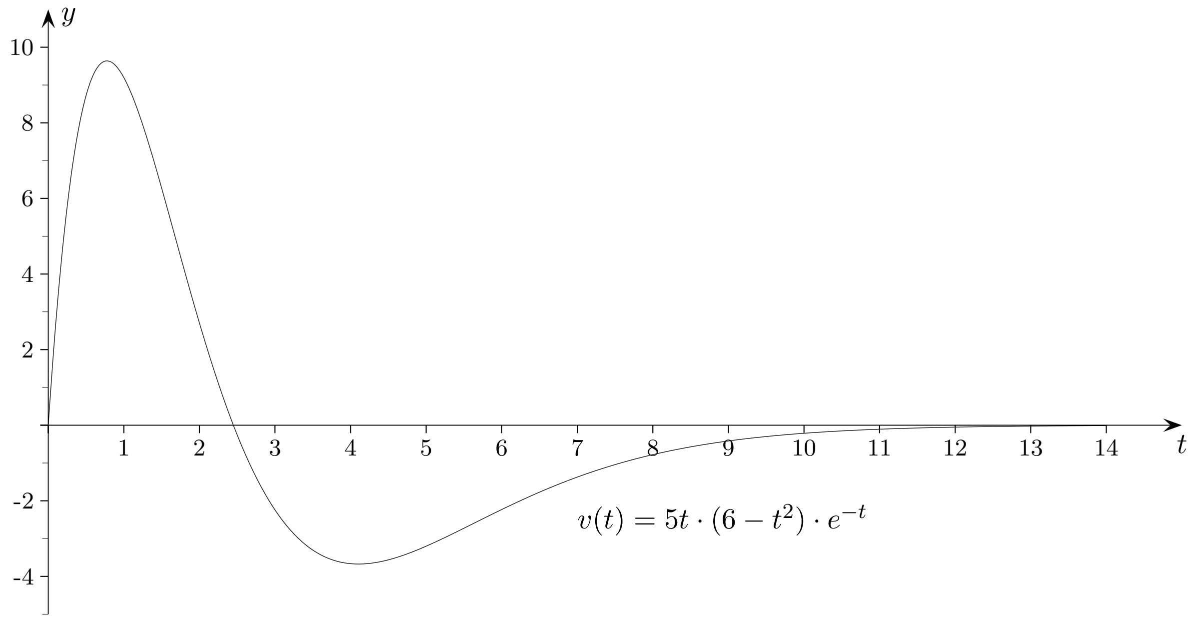
In einem Wasserbecken, das sowohl eine Zufluss- als auch eine Abflussmöglichkeit besitzt, befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt kein Wasser. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Wasservolumen im Becken, wobei die Änderungsrate des Volumens durch $v(t)$, $t \geq 0$, beschrieben wird. (t in Stunden, $v(t)$ in m^3 pro Stunde).

Skizziere den Graphen, der die Wassermenge im Becken in Abhängigkeit von der Zeit erfasst.
Mit welchem Wasservolumen im Becken ist langfristig zu rechnen?

a)

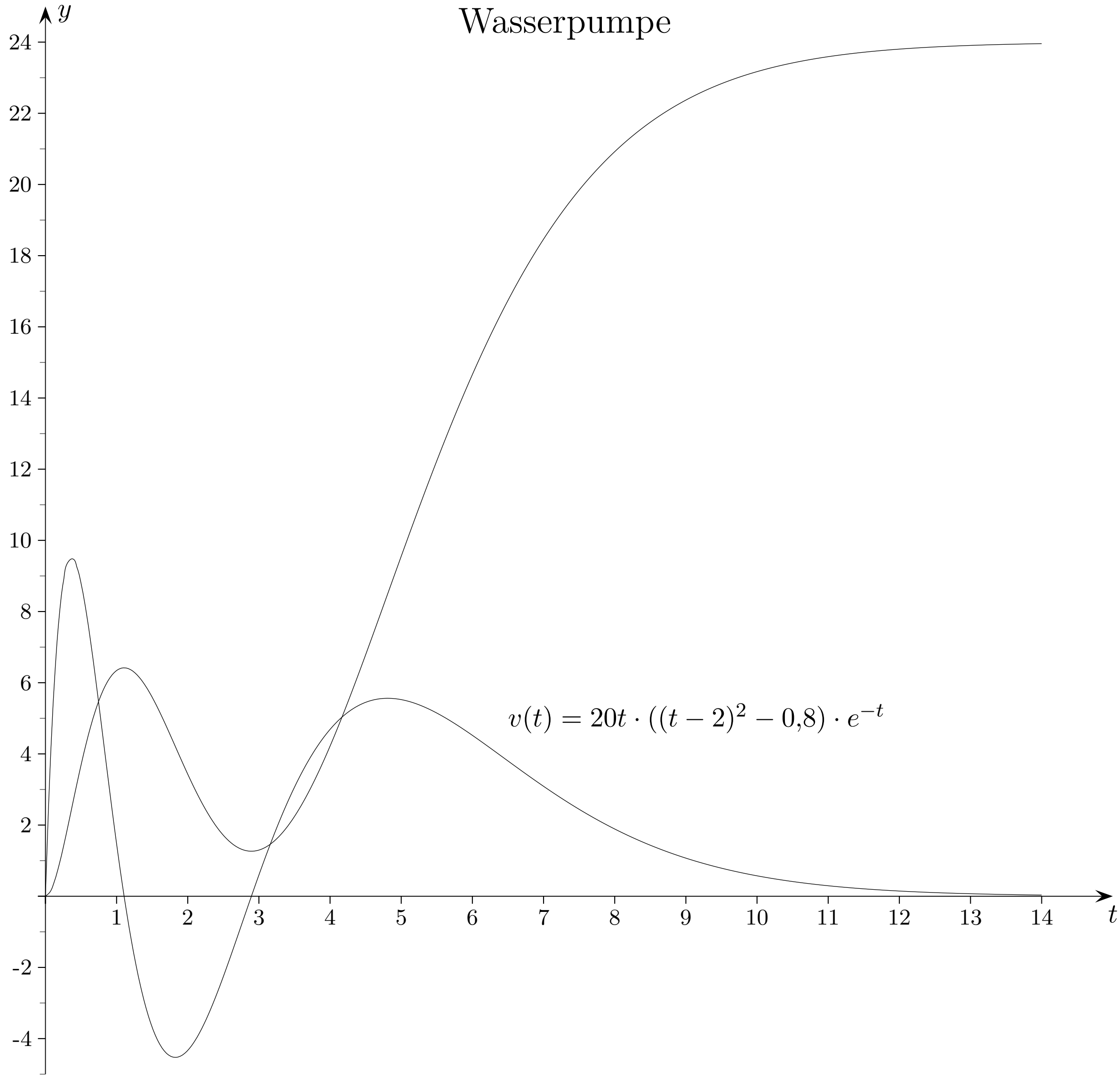


b)



Wasserpumpe

a)



b)