

Aufgaben Analysis

1. Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = -\frac{k}{3}x^3 + 2k^2x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Untersuchen Sie die Graphen von f_k auf Symmetrie, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und $f_{\frac{1}{2}}$ in dasselbe Koordinatensystem.
 - Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte k_1 und k_2 gibt, so dass sich die zugehörigen Graphen im Ursprung rechtwinklig schneiden.
 - Bestimmen Sie die Stellen x der lokalen Extrema, an denen die Funktionswerte von $f_1(x)$ und $f_{\frac{1}{2}}(x)$ maximalen Abstand haben. (Notwendige Bedingung genügt.)
2. Das Höhenwachstum (in m) einer Pflanze ist gegeben durch $f(x) = \frac{3}{1 + e^{5-x}}$, $x \geq 0$.
- Untersuchen Sie die Funktion, auch auf Monotonie und Krümmung. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{3e^{5-x}}{(1 + e^{5-x})^2}$)
 - Errechnen Sie die Zeit (x Zeit in Jahren), die eine Pflanze benötigt, um eine Höhe von $1 m$ zu erreichen.
 - Skizzieren Sie die Graphen von f' .
 - Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f' mit der positiven x -Achse einschließt.

Lösungen:

1. a) Symmetrie: Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da
 $f(-x) = -f(x)$. Es liegen nur ungerade Exponenten vor.

Nullstellen: $N_1(0 | 0)$, $N_{2/3}(\pm\sqrt{6k} | 0)$,

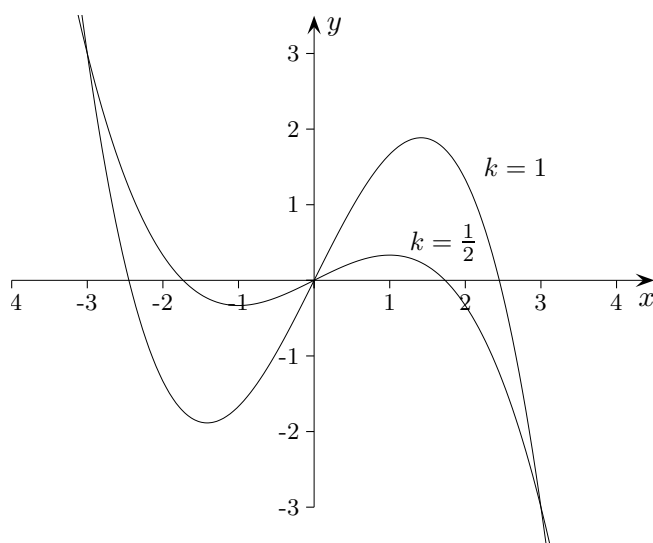
Extrema: $Min(-\sqrt{2k} | -\frac{4}{3}k^2\sqrt{2k})$, $Max(\sqrt{2k} | \frac{4}{3}k^2\sqrt{2k})$

$$f'_k(x) = -kx^2 + 2k^2, \quad f''_k(x) = -2kx$$

Wendepunkt: $W(0 | 0)$

- b) $f'_{k_1}(0) = 2k_1^2$, $f'_{k_2}(0) = 2k_2^2$, $2k_1^2 \cdot 2k_2^2 = -1$, für keine Parameterwerte erfüllbar,

- c) $d(x) = f_1(x) - f_{\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$, notw. Bedingung: $d'(x) = 0$, $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$



2. a) Nullstellen: keine

Extrema: keine, stets gilt: $f'(x) > 0$, f monoton steigend

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

Wendepunkte: $f''(x) = \frac{-3e^{5-x} + 3e^{2(5-x)}}{(1 + e^{5-x})^3}$

Krümmung: f für $x < 5$ linksgekrümmt, f für $x > 5$ rechtsgekrümmt, $W(5 | \frac{3}{2})$

- b) $x = 4,3$ Jahre

- c) siehe Graph

- d) $\int_0^\infty f'(x) dx = \left[\frac{3}{1 + e^{5-x}} \right]_0^\infty = 3 - \frac{3}{1 + e^5}$

