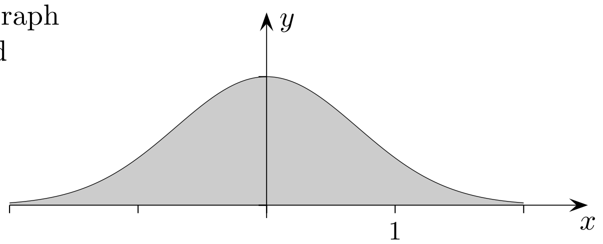
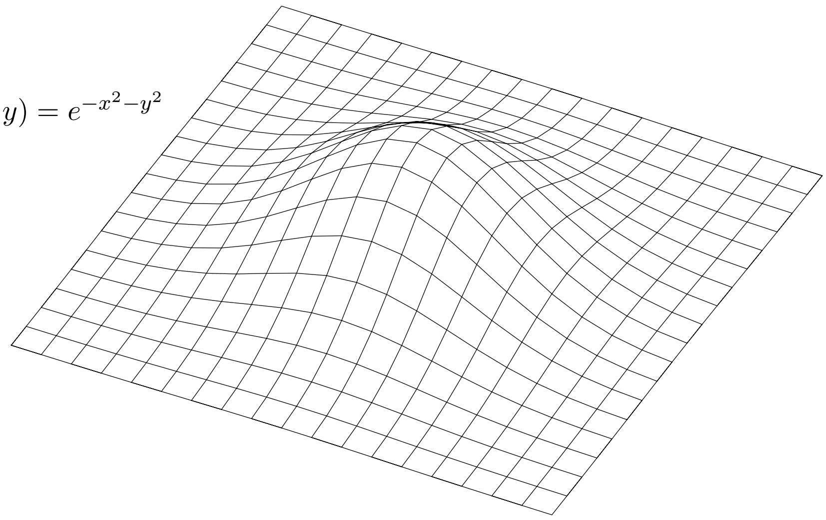
Integral einer e-Funktion $\quad A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \quad \left(= \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx\right)$

Um den Flächeninhalt auszurechnen, lassen wir den Graph der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ um die y-Achse rotieren und versuchen, das Volumen:

$V = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ auszurechnen.



$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

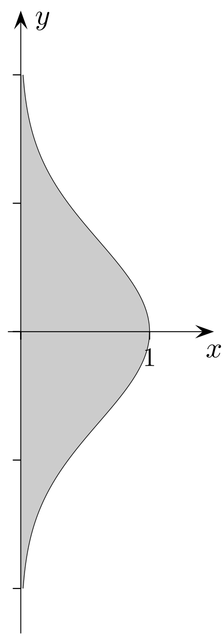


$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy$$

mit $\quad e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{A}\,dy$$

$$V = A\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy}_{A} = A^2$$



Das Volumen kann nun auf eine 2. Art bestimmt werden, indem wir die Umkehrfunktion von $f(x) = e^{-x^2}$ für $x > 0$ um die x-Achse rotieren lassen.

Die Umkehrfunktion lautet: $f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln x}$

$$V = \pi\int_0^1 (-\ln x)\,dx = \pi\,\Big[-x\cdot\ln x + x\Big]_0^1 = \pi$$

beachte: $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x) = 0$

Aus $A^2 = \pi$ folgt $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Mit der Schalenmethode erhalten wir ebenfalls $V = 2\pi\displaystyle\int_0^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = 2\pi\Big[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^{\infty} = \pi$