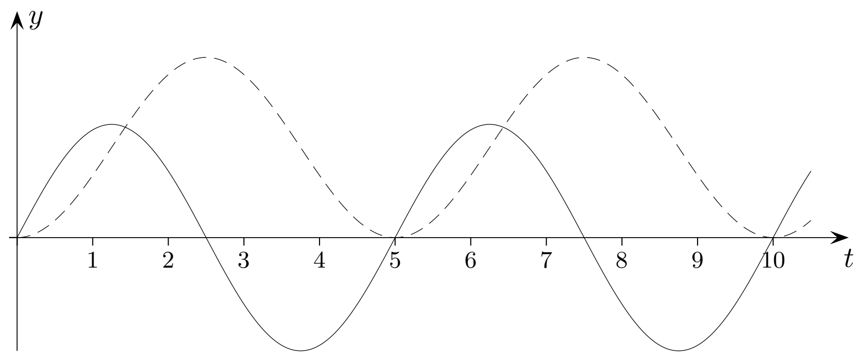
Trigonometrische Funktionen   Luftvolumen

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi t)$ modelliert werden, $f(t)$ in Litern pro Sekunde, Zeit t in Sekunden. Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$?
Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi} \cdot \left[1 - \cos(\frac{2\pi}{5}\,t)\right]$ gilt.



b) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.
Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?
Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

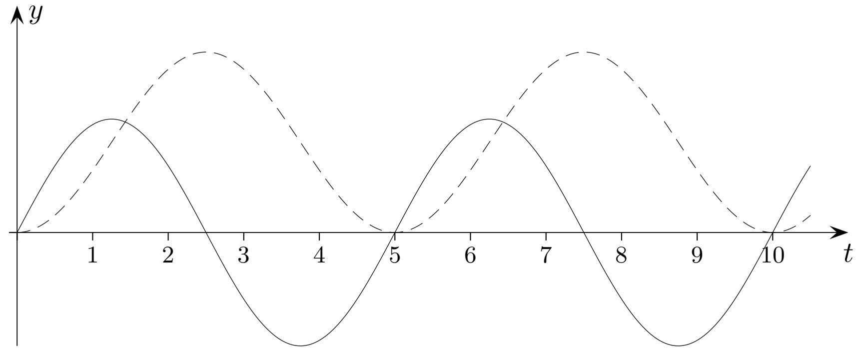
c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?
Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

Luftvolumen   Lösungshinweise

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi t)$ modelliert werden, $f(t)$ in Litern pro Sekunde, Zeit t in Sekunden. Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$? Luftvolumen

Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi} \cdot \left[1 - \cos(\frac{2\pi}{5}t)\right]$ gilt. $F'(t) = f(t)$



b) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.
Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?

Graph gestrichelt

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge. $F(2{,}5) = 0{,}8$

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

$1{,}25 + n \cdot 2{,}5, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$

beachte die Symmetrie

c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

[0; 2,5]	$\frac{1}{2{,}5} \cdot F(2{,}5) = 0{,}3$
[2,5; 5]	$-0{,}3$
[0; 5]	0

Für die letzten beiden Intervalle ist das Ergebnis unmittelbar zu erkennen.

Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0; 2,5], [2,5; 5] und [0; 5]?

[0; 2,5]	$\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2{,}5} F(t)\,dt = 0{,}4$
[2,5; 5]	$0{,}4$
[0; 5]	$0{,}4$

Für die letzten beiden Intervalle ist das Ergebnis unmittelbar zu erkennen.

Schwimmtraining Baden-Württemberg 2004

Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert.
Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v(t) = 0{,}4 \cdot \sin(12t) + 1{,}5$$

beschreiben lässt (Zeit t in s, Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s).

a) Bestimmen Sie die Periodendauer.

b) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?

c) Skizzieren Sie den Graphen von $v(t)$.

d) Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?

e) Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?

Ergebnisse:

a) $T = 0{,}52\ [s]$

b) $[1{,}1; 1{,}9]$

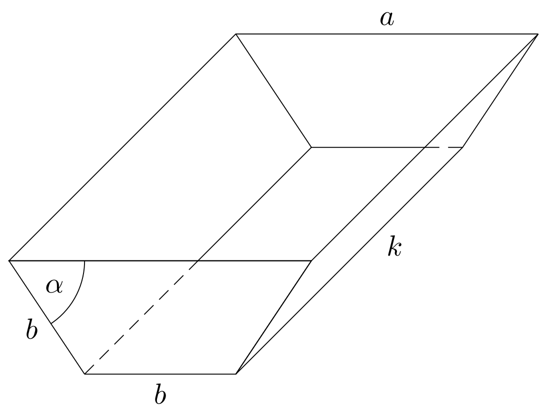
c)

d) $t = \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{6}, \quad n = 1, 2, \ldots$

e) $s = 39{,}27\ [m]$.

Blumentrog

Eine Firma stellt (oben offene) prismaförmige Blumentröge der Länge k und der Breite b mit trapezförmigem symmetrischem Querschnitt her.



a) Weisen Sie nach, dass sich der Flächeninhalt der Querschnittsfläche durch die Funktion $A(\alpha) = b^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$ darstellen lässt.

b) Für welches α hat ein Trog mit quadratischer Pflanzfläche und der Breite $b = 0{,}5\,m$ maximales Volumen?

c) Für welche Werte von α benötigt man zum vollständigen Befüllen eines Troges mit quadratischer Pflanzfläche und $b = 0{,}5\,m$ mindestens vier Säcke Blumenerde von je 80 Liter Inhalt?

b) $k = a = b \cdot (1 + 2\cos\alpha)$
$V(\alpha) = A(\alpha) \cdot k = 0{,}5^3 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot (1 + 2\cos\alpha)$
$\alpha = 45°$ (GTR)

c) $V(\alpha) \geq 0{,}32 \ [m^2]$
$30{,}2° \leq \alpha \leq 60{,}9°$ (GTR)

Sonnenscheindauer

In Freiburg im Breisgau, der wärmsten Stadt in Deutschland, scheint die Sonne im März ca. 100 Stunden; zwei Monate später sind es ca. 200 Stunden. Die Sonnenscheindauer des Monats soll in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten, $t = 0$ im April) modellhaft durch eine Funktion

$$S(t) = a + b \cdot \sin(\tfrac{\pi}{6}t),\ a, b \in \mathbb{R}\ (S(t) \text{ in Stunden}) \text{ mit } t \in [0; 12]$$

beschrieben werden.

a) Ermitteln Sie die beiden Parameter a und b.

b) Bestimmen Sie die Sonnenscheindauer für den September.

c) Berechnen Sie mit dem GTR und algebraisch die Extrempunkte von S im angegebenen Intervall.

a) $a = 150$ und $b = 100$

b) $S(5) = 200$

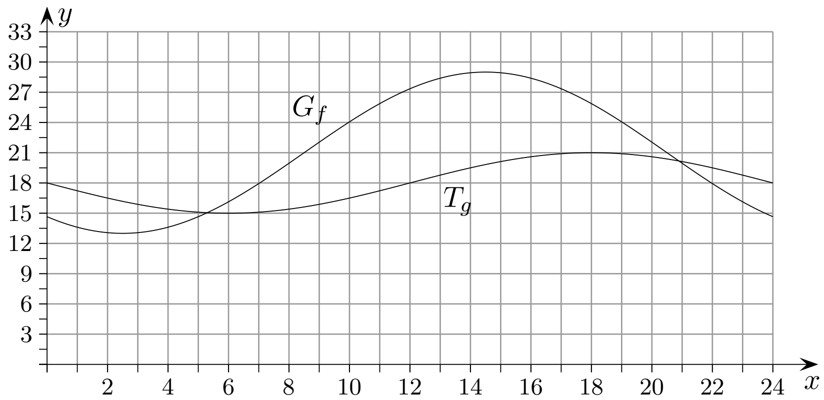
c) $Max(3 \mid 250)$, $Min(9 \mid 50)$

Temperaturverlauf Baden-Württemberg 2008

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch die Funktion

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right] + 21, \quad 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in $°C$).
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf T_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.
Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens $22°C$?
Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?
Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf T_g wiedergibt.
Beschreiben Sie, wie T_g aus dem Graphen der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.
Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe G_f und T_g an.
Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch die Funktion

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right] + ax + b, \quad 24 \leq x \leq 48$$

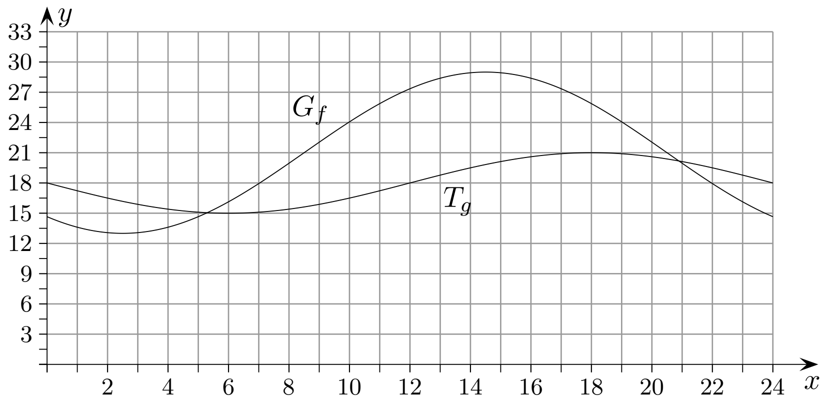
beschrieben werden kann (x in Stunden, $f(x)$ in $°C$).
Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b.
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

Temperaturverlauf Baden-Württemberg 2008

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch die Funktion

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right] + 21, \quad 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in °C).
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf T_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.

min 2:30 Uhr, max 14:30 Uhr

Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22°C?

$8{,}98 + (24 - 20{,}02) = 13$

Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten? $x = 8{,}5$

Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr. 25,04°C

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf T_g wiedergibt.

$g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$

Periode beträgt 24 $\Longrightarrow$ $b = \frac{\pi}{12}$

$g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 12)\right] + 18$

Beschreiben Sie, wie T_g aus dem Graphen der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.

1.) Streckung mit dem Faktor $a = 3$ in y-Richtung

2.) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x-Richtung

3.) Verschiebung um 18 nach oben

4.) Verschiebung um 12 nach rechts

Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe G_f und T_g an. Die Temperaturänderung im Freien macht sich im Haus zeitversetzt bemerkbar.

Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?

$d(x) = | f(x) - g(x) |$

$x = 13{,}1$

13:06 Uhr

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch die Funktion

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] + ax + b, \quad 24 \le x \le 48$$

beschrieben werden kann (x in Stunden, $f(x)$ in $°C$).
Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b.

$$h(24) = f(24) \implies -1{,}587 + 24a + b = 21$$
$$h'(24) = f'(24) \implies -0{,}319 + a = 0$$
$$a = 0{,}32$$
$$b = 14{,}9$$

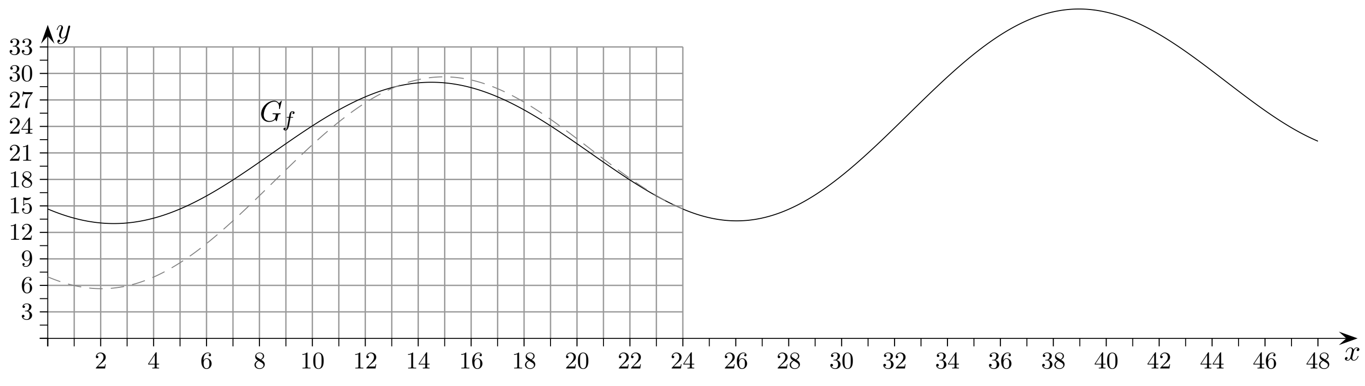
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

Die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag beträgt:

$$D = \frac{1}{24}\int_{24}^{48}\left(10 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] + ax + b\right)dx$$

h hat die Periode $p = 24 \implies \frac{1}{24}\int_{24}^{48}\left(10 \cdot \sin\left[\tfrac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right]\right)dx = 0$

$$D = \frac{1}{24}\int_{24}^{48}(ax+b)\,dx$$



Die Grafik dient dem Verständnis.