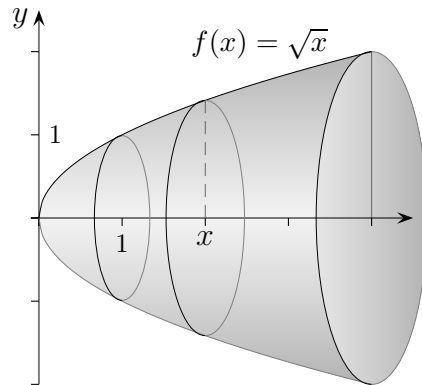


Rotationsvolumen



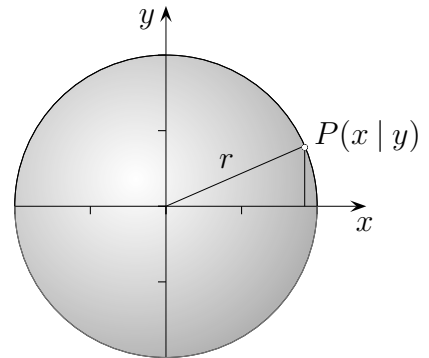
Um das Volumen eines Rotationskörpers zu berechnen,
ist der Inhalt der Querschnittsfläche an der Stelle x zu bestimmen.

Es ist: $Q(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, da die Fläche des Kreises mit dem Radius r $A = \pi r^2$ beträgt.

Daher gilt:

$$V = \int_a^b Q(x) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Die Kugel

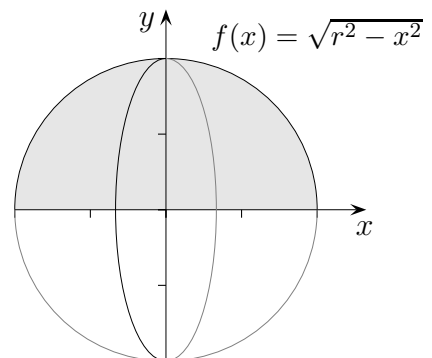


Für einen Punkt $P(x | y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt:
 $x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).

Nach y aufgelöst, ergibt sich: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

d.h. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3}r^3 \end{aligned}$$



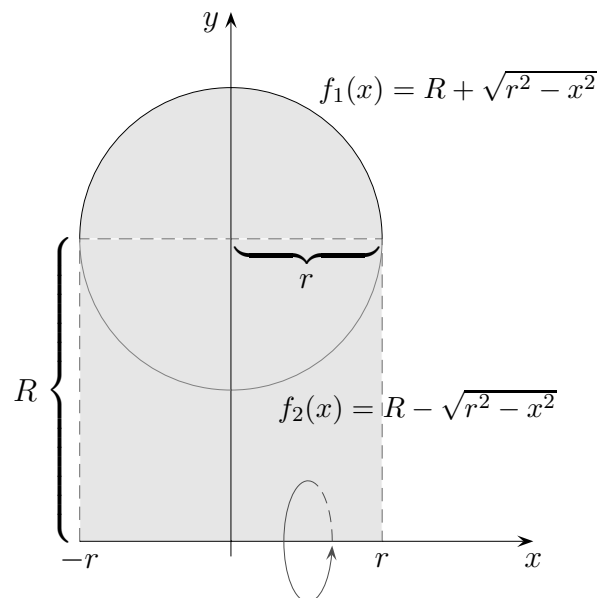
Der Torus

Durch die Gleichung $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 | R)$ und dem Radius r gegeben. Durch Rotation dieses Kreises um die x -Achse entsteht ein Körper von der Form eines Rettungsringes, ein sog. Torus. Diesen Rotationskörper können wir als Differenz zweier Rotationskörper auffassen, die durch Rotation von Flächenstücken entstehen, die im Intervall $[-r, r]$ von der x -Achse und dem oberen und unteren Halbkreis mit den Gleichungen

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

begrenzt werden.

$$\begin{aligned} V_{\text{Torus}} &= \pi \int_{-r}^r (f_1(x))^2 dx - \pi \int_{-r}^r (f_2(x))^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r [(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2] dx \end{aligned}$$



Durch Einsetzen der Funktionsterme und Zusammenfassen ergibt sich

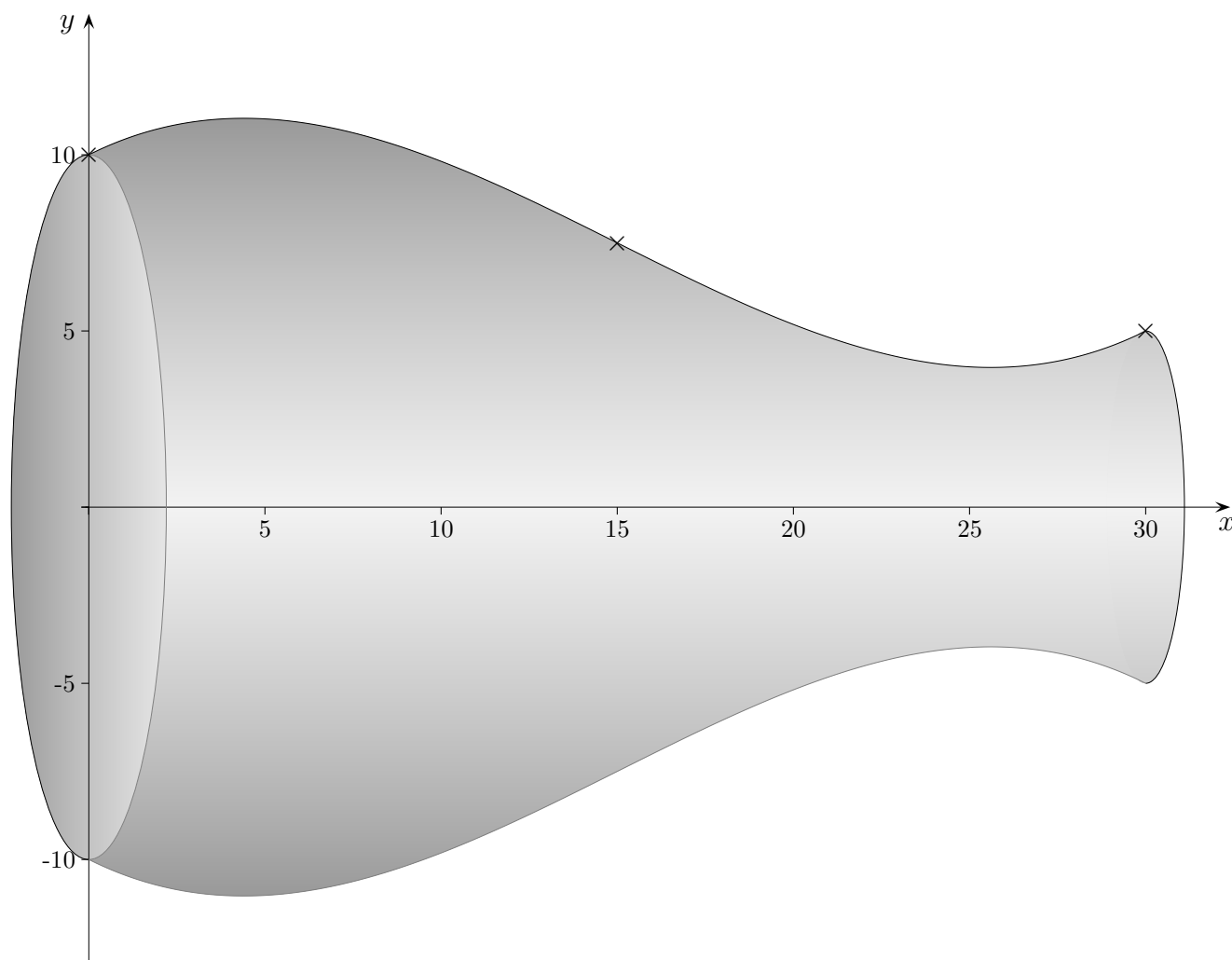
$$V_{\text{Torus}} = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Das Integral kann als Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius r interpretiert werden. Infolgedessen gilt

$$V_{\text{Torus}} = 4\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2$$

Die Volumenformel ist ein Spezialfall der *Guldinschen Regel*, nach der das Volumen eines Rotationskörpers gleich dem Produkt des Inhalts der rotierenden Fläche mit der Wegstrecke ist, die der Schwerpunkt des Flächenstücks bei der Rotation zurücklegt (P. Guldin, 1577 - 1643).

Vase GTR

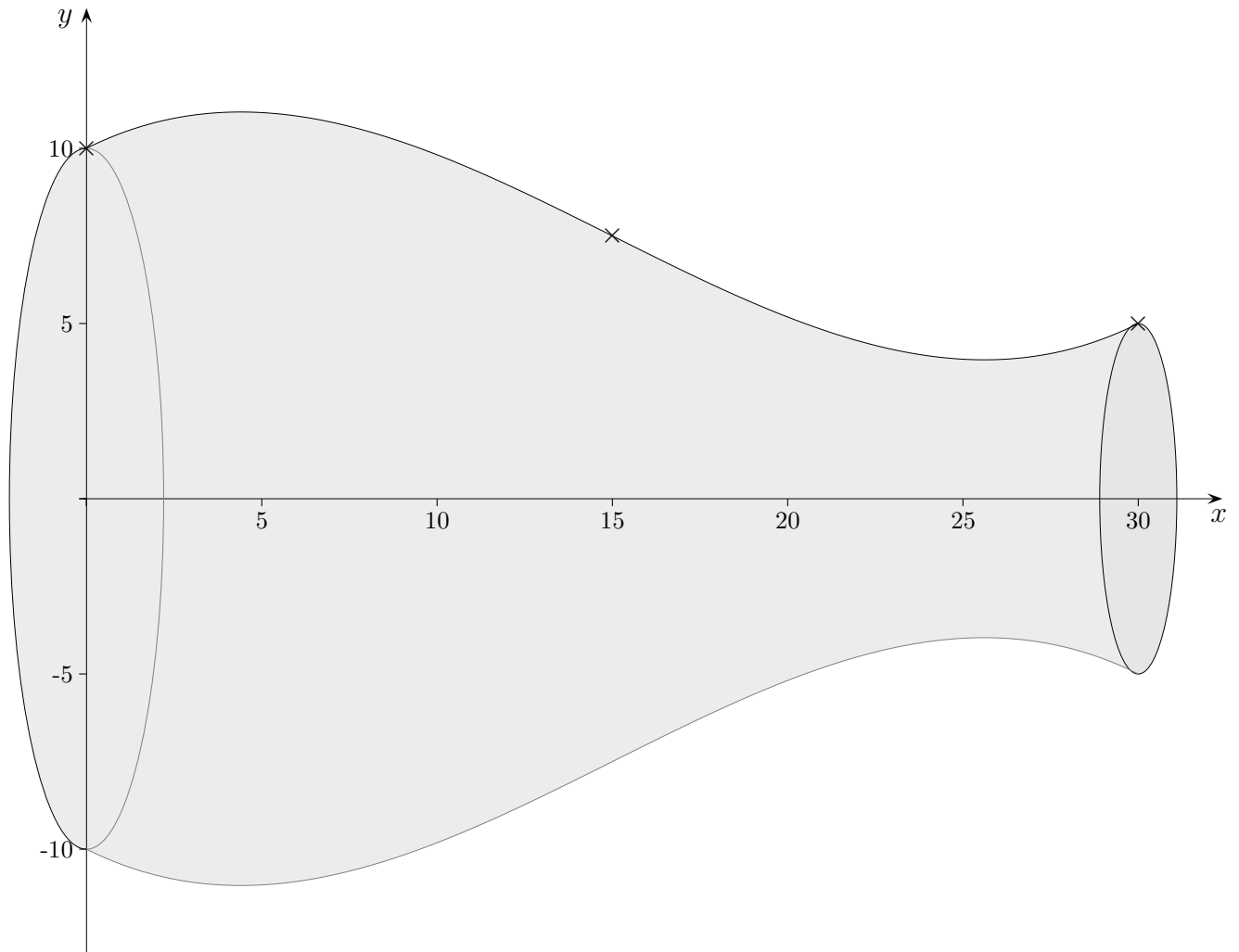


Der Graph verläuft durch $A(0 | 10)$ und $B(30 | 5)$ (in cm).

An der Stelle $x = 15$ liegt ein Wendepunkt mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ vor.

Ermittle das Volumen der Vase.

Vase GTR



1. Der Graph verläuft durch $A(0 \mid 10)$, d.h. $f(0) = 10$ (in cm).
2. Der Graph verläuft durch $B(30 \mid 5)$, d.h. $f(30) = 5$.
3. Der Graph hat an der Stelle $x = 15$ die Steigung $-\frac{1}{2}$, d.h. $f'(15) = -\frac{1}{2}$.
4. Der Graph hat an der Stelle $x = 15$ einen Wendepunkt, d.h. $f''(15) = 0$.

Das ergibt für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ das Gleichungssystem:

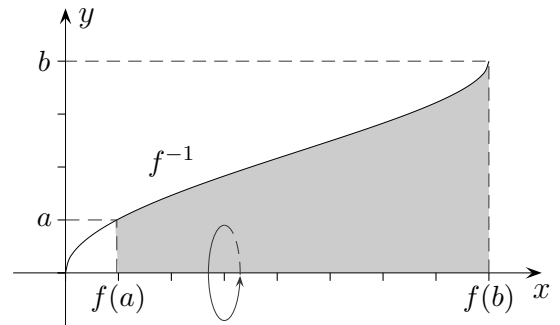
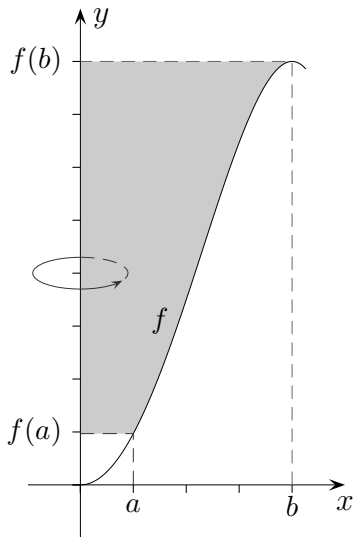
$$\begin{aligned} d &= 10 \\ 27000a + 900b + 30c + d &= 5 \\ 675a + 30b + c &= -\frac{1}{2} \\ 90a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{675}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{2}x + 10$

Flächeninhalt: $A = 225 \text{ cm}^2$

Volumen: $V = 5991,466 \text{ cm}^3$

Volumen bei Rotation um die y -Achse



Erläutere die Formeln, so dass sie plausibel erscheinen.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Volumenelement.

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2 dy$$

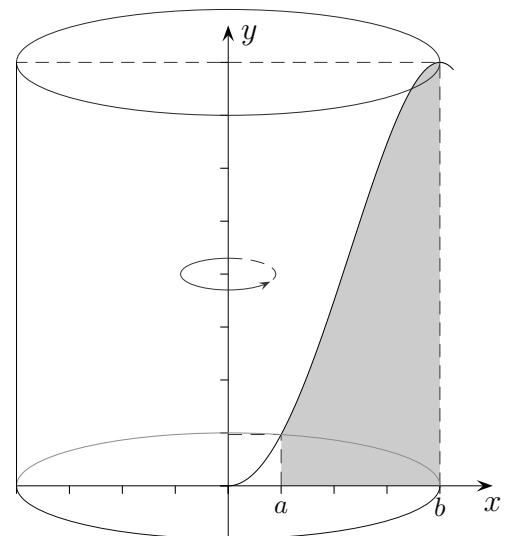
$$V_y = \pi \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx$$

$$V_{\text{Scheibe}} = \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Schalenmethode

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

$$V_{\text{Hohlzylinder}} = 2\pi x \cdot f(x) dx$$



Beispiele

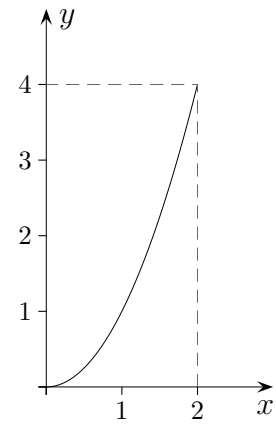
1. $f(x) = x^2, \quad \mathbb{D} = [0, 2]$

$$V_x = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \frac{32\pi}{5}$$

$$V_y = \pi \int_0^4 [f^{-1}(y)]^2 dy = 8\pi$$

$$V_y = \pi \int_0^2 x^2 \cdot f'(x) dx = 8\pi$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x) dx = 8\pi$$



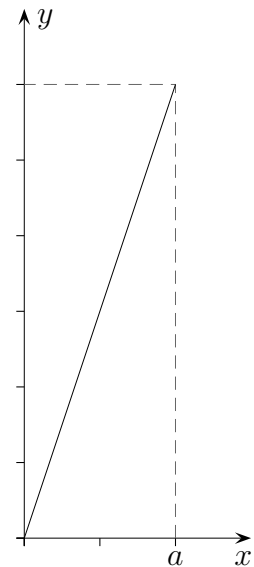
2. $f(x) = 3x, \quad \mathbb{D} = [0, a]$

$$V_x = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx = 3\pi a^3$$

$$V_y = \pi \int_0^{3a} [f^{-1}(y)]^2 dy = \pi a^3$$

$$V_y = \pi \int_0^a x^2 \cdot f'(x) dx = \pi a^3$$

$$V = 2\pi \int_0^a x \cdot f(x) dx = 2\pi a^3$$

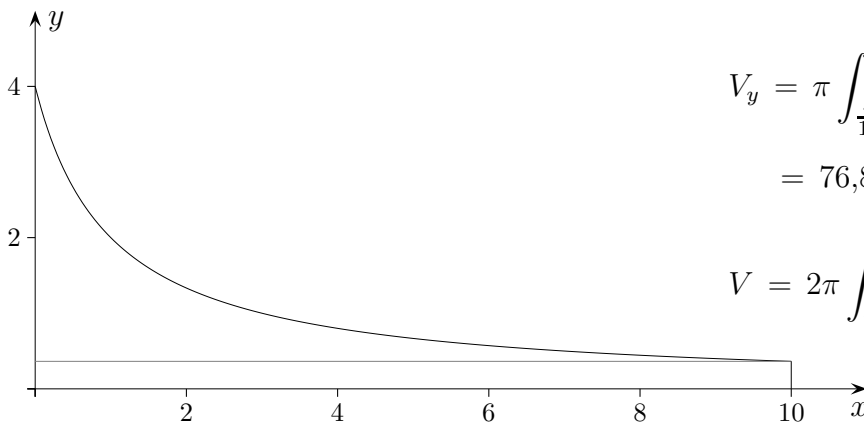


3. $f(x) = \frac{4}{x+1}, \quad \mathbb{D} = [0, 10] \quad (\text{GTR})$

$$V_x = \pi \int_0^{10} [f(x)]^2 dx = 45,70$$

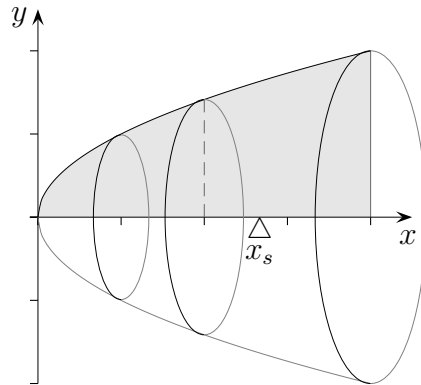
$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_{\frac{4}{11}}^4 [f^{-1}(y)]^2 dy + V_{\text{Zylinder}} \\ &= 76,82 + 114,24 = 191,06 \end{aligned}$$

$$V = 2\pi \int_0^{10} x \cdot f(x) dx = 191,06$$

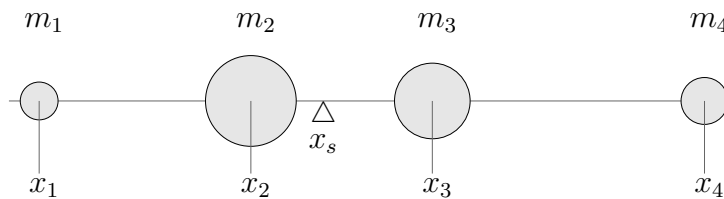


Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Bei Rotation um die x -Achse und bei homogener Massenverteilung liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers wegen der Symmetrie auf der x -Achse.



Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(x_s - x_1)m_1 + (x_s - x_2)m_2 = (x_3 - x_s)m_3 + (x_4 - x_s)m_4$$

Auf den Rotationskörper übertragen bedeutet dies:

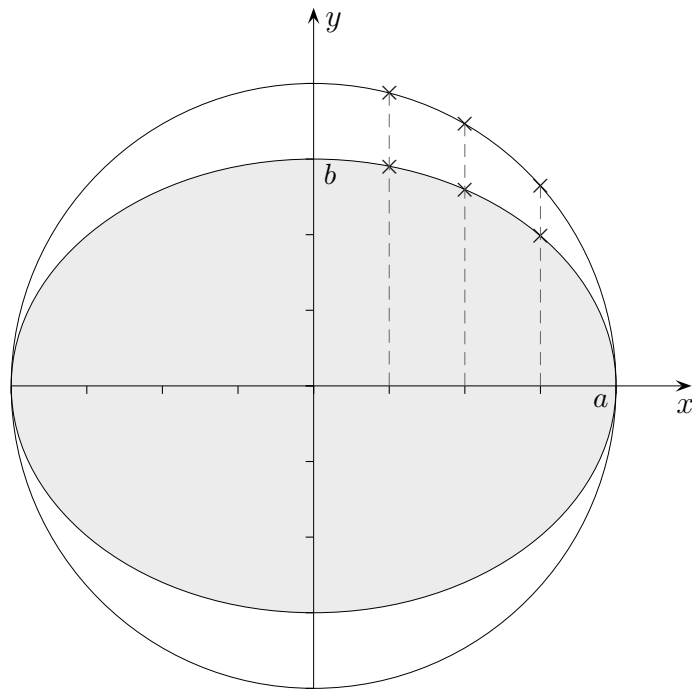
$$\sum_{x < x_s} (x_s - x) \pi [f(x)]^2 \Delta x = \sum_{x_s < x} (x - x_s) \pi [f(x)]^2 \Delta x$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{\sum x \pi [f(x)]^2 \Delta x}{\sum \pi [f(x)]^2 \Delta x} \quad (\text{Klammern auflösen, zusammenfassen})$$

und damit

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx}{V}$$

Ellipsengleichung



Die Ellipse ist ein gestauchter Kreis.

Aus der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

erhalten wir die Funktionsgleichung für den oberen/unteren Halbkreis:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Die y -Werte werden nun mit $\frac{b}{a}$ multipliziert.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir die Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Rotation der Ellipsenfläche um die x -Achse erzeugt ein Ellipsoid.

Zeige, dass dessen Volumen $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$ beträgt.