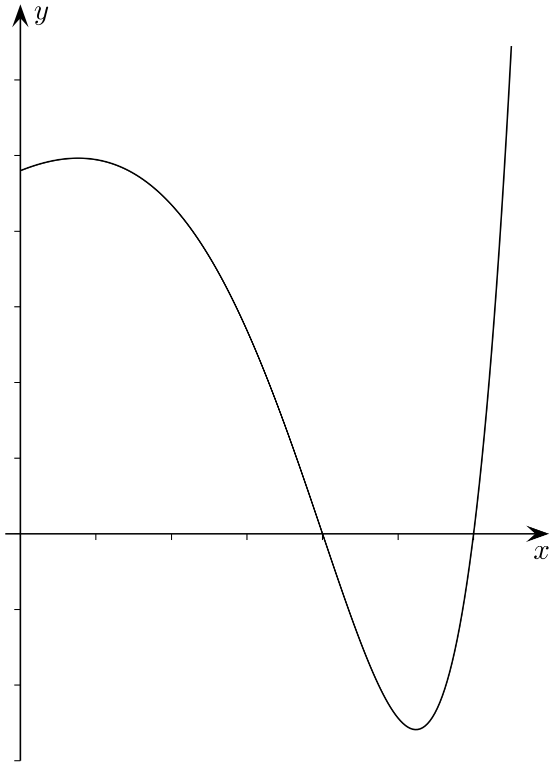
Zu- und Abfluss   Stausee



Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt.
Die Zulaufratenfunktion ist gegeben durch $f(x) = (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$,
$0 \leq x \leq 6{,}5,\ x$ in Tagen, $f(x)$ in $1000\,m^3$ pro Tag.
Eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

a) Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt.
Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.

b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulaufrate im betrachteten Intervall maximal ist.

c) Welche Aussagen sind über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt $x = 5$ möglich?

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulaufrate am stärksten ändert.

e) Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet.

f) In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert. Zum Zeitpunkt $x = 0$ befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee. Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$. Dabei wird x wieder in Tagen angegeben und $w(x)$ in 10000 Bakterien pro Tag. Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

Stausee Ergebnisse

a) $x = 4$, $x = 6$, ...

b) Wegen $f(0) = 24 < 24{,}826 < 32{,}238 = f(6{,}5)$ nimmt f sein absolutes Maximum auf dem Rand des Definitionsbereichs an, nämlich bei $x = 6{,}5$.

c) Wegen $f(5) = -12{,}182$ nimmt die Wassermenge zum Zeitpunkt $x = 5$ stark ab. Wäre die Zulaufrate einen ganzen Tag lang so niedrig wie zum Zeitpunkt $x = 5$, würden $12182\,m^3$ Wasser ablaufen.

d) Aus $f'(0) = 2$, $f'(4) = -14{,}778$ und $f'(6{,}5) = 93{,}490$ ist ersichtlich, dass sich die Zulaufrate zum Zeitpunkt $x = 6{,}5$ am stärksten ändert.

e) Die Menge zufließenden Wassers wird repräsentiert durch die Flächen oberhalb der x-Achse, die Menge abfließenden Wassers durch die Fläche unterhalb der x-Achse. Da letztere ersichtlich wesentlich kleiner ist als die Fläche, die für den Zulauf im Intervall $[0, 4]$ steht, wird die Anfangswassermenge nicht wieder erreicht.

f) 702500 Bakterien

Eimer

Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt.
Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust.
Die Wassermenge f_k (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit x (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot \left(e - e^{-x}\right), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit $x = 0$ nicht leer.)

a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für $x \in \mathbb{R}$ (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar.
Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharkurven.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_k eine DGL vom Typ $f'(x) = af(x) + b$ erfüllen.
Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben.

c) Wie groß ist der konstante Zufluss?
Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird?

d) Bestimmen Sie k für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter.

e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von k abhängig?

f) Ermitteln Sie für f_k die Tangenten an der Stelle $x = 0$.
Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt?

Eimer

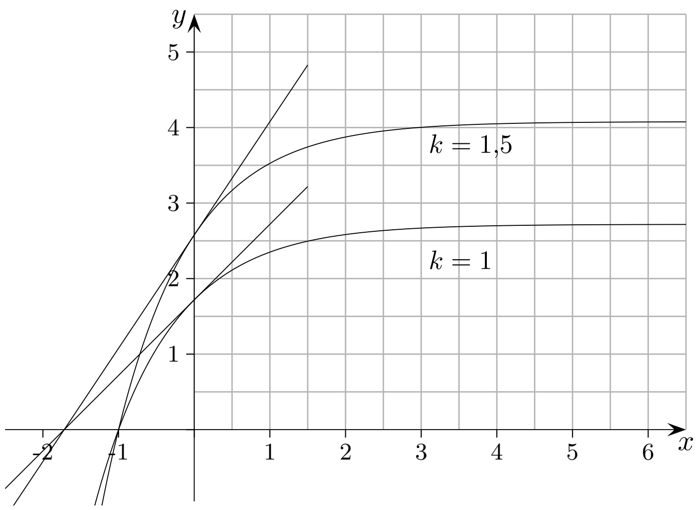
Ein Eimer, der am Boden ein Loch hat, wird durch einen konstanten Zufluss befüllt.
Mit zunehmender Füllung steigt der Wasserdruck am Boden und damit auch der Wasserverlust.
Die Wassermenge f_k (in Liter) im Eimer kann als Funktion der Zeit x (in Stunden) folgendermaßen beschreiben werden:

$$f_k(x) = k \cdot (e - e^{-x}), \quad k > 0$$

(Die Modellierung mit einem einzigen Parameter ist sehr verengt. Der Eimer ist zur Zeit $x = 0$ nicht leer.)

a) Untersuchen Sie die Funktionsschar für $x \in \mathbb{R}$ (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptote) und skizzieren Sie zwei Vertreter der Schar.
Kommentieren Sie auch die geometrische Beziehung der Scharkurven.

Nullstelle $x = -1$, Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0 \mid k(e-1))$
keine Extrema und Wendepunkte
Asymptote $y = k \cdot e$
Die Graphen gehen durch Streckung in y-Achsenrichtung auseinander hervor.



b) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_k eine DGL vom Typ $f'(x) = af(x) + b$ erfüllen.
Begründen Sie, dass die Funktionen jeweils beschränktes Wachstum beschreiben. $a = -1, \ b = ke$

c) Wie groß ist der konstante Zufluss? $f'(-1) = b = ke$
$x = -1$ ist der (gedachte) Zeitpunkt, zu dem der Eimer noch leer war.

Was passiert langfristig, falls der Zulauf halbiert wird? Füllmenge halbiert sich.

d) Bestimmen Sie k für eine Anfangsmenge im Eimer von 6 Liter. $k = 3{,}5$

e) Berechnen Sie für eine beliebige Anfangsmenge den Zeitpunkt, in der die Hälfte der Anfangsmenge hinzugekommen ist. Ist der Zeitpunkt von k abhängig? $f_k(x) = 1{,}5 \cdot f_k(0), \ \ x = 1{,}96$ Stunden

f) Ermitteln Sie für f_k die Tangenten an der Stelle $x = 0$. $y = kx + k(e-1)$
Haben diese Tangenten einen gemeinsamen Punkt? $P(1 - e \mid 0)$

Zu- und Abfluss

Die DGL des beschränkten Wachstums $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$
lässt sich leicht umformen zu: $f'(x) = -kf(x) + k \cdot G$

Werden undichte Behälter befüllt, so setzt sich die Änderung (des Flüssigkeitsvolumes, der Füllhöhe) aus einem zum Bestand proportionalen Anteil $-kf(x)$ und einer konstanten Zuflussrate $k \cdot G$ zusammen. Sie ergibt sich auch als Steigung in der Nullstelle von f (siehe umgeformte DGL), dem Zeitpunkt, an dem der Behälter noch leer war.
Der Flüssigkeitsverlust $-kf(x)$ ist aufgrund des Drucks proportional zur Füllhöhe bzw. zum Volumen. Verliert ein Behälter z. B. 5 % pro (kleiner) Zeiteinheit seines Volumes, bzw. der Füllhöhe, so ist $k \approx 0{,}05$.

Derartige Überlegungen können stets bei Vorgängen angestellt werden, bei denen sich exponentieller Zuwachs/bzw. Abnahme und linearer Zuwachs/bzw. Abnahme additiv überlagern, z. B. bei der regelmäßigen Medikamenteneinnahme oder der Fischzucht mit jährlichem Abfischen.

Die Lösungsfunktion der DGL des beschränkten Wachstums lautet (bekanntlich) $f(x) = G - ae^{-kx}$.
Zufluss-Abfluss-Vorgänge werden mit der DGL $f'(x) = -kf(x) + b$ beschrieben.

Die Konstante k ist ersichtlich unabhängig von b.
Für $b = 0$ beschreibt $g'(x) = -kg(x)$ einen exponentiellen Abnahmeprozess, nämlich $g(x) = g(0)e^{-kx}$.
Der diskrete Übergang von $g(x)$ zu $g(x+1)$ kann in Prozent (unabhängig von x) bezogen auf die Zeiteinheit angegeben werden.

$$\frac{p}{100} = \frac{g(x) - g(x+1)}{g(x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x+1) = (1 - \frac{p}{100})g(x)$$

Der Zusammenhang lautet: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$

Beispiel:
Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt $2\,mg$. Der Wirkstoff wird täglich zu 40 % abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits $1\,mg$ des Wirkstoffs im Blut.

Zu- und Abfluss

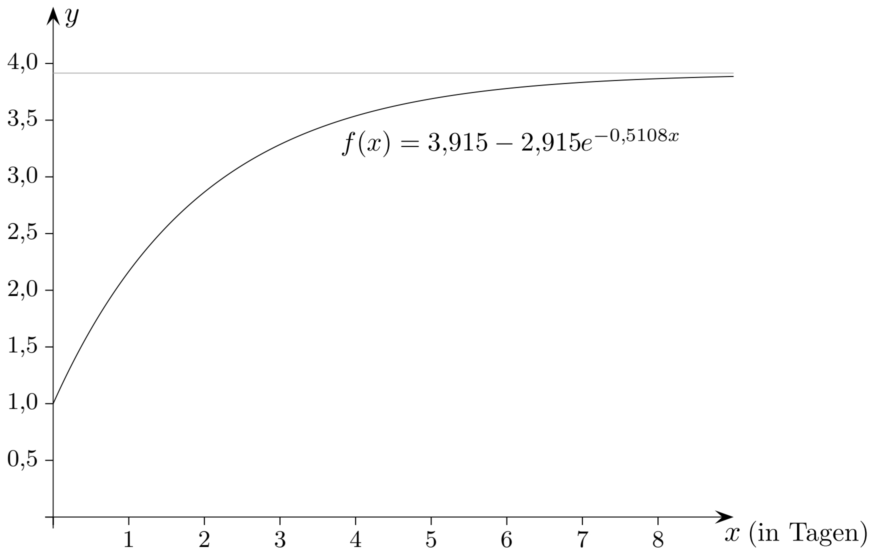
Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt $2\,mg$. Der Wirkstoff wird täglich zu $40\,\%$ abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits $1\,mg$ des Wirkstoffs im Blut.

$$f'(x) = -k \cdot f(x) + m \qquad k = -\ln(0{,}6) = 0{,}5108; \qquad m = 2$$

$$f'(x) = k \cdot \left(\frac{m}{k} - f(x) \right) \qquad \text{Grenze} \quad G = \frac{m}{k} = 3{,}915$$

$$f(x) = G - a\, e^{-kx} \qquad a = 2{,}915$$

$$f(x) = G - \big(G - f(0) \big)\, e^{-kx}$$



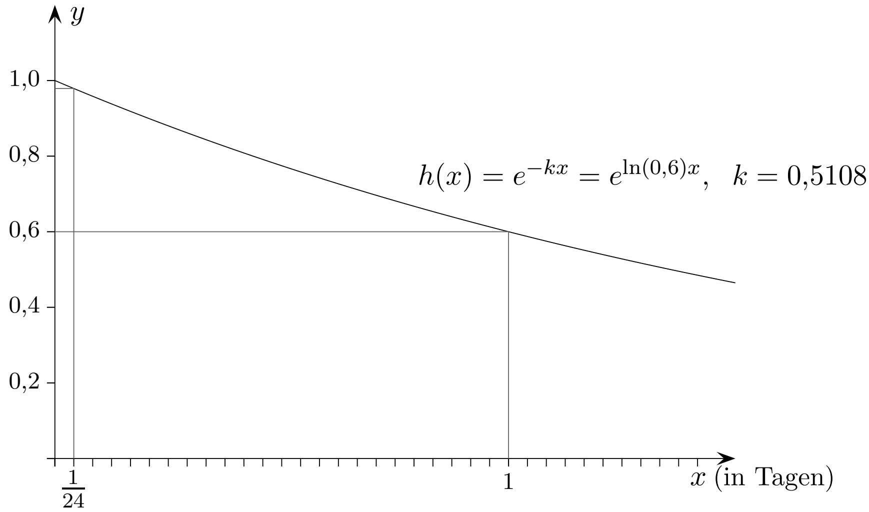
Bei einem Medikamentenabbau, der nur wenige Tage anhält, sollte die Zeiteinheit soweit verkleinert werden, z. B. auf Stunden, dass k eine anschauliche Bedeutung gewinnt.

Zuwachs/Abnahme

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt $2\,mg$. Der Wirkstoff wird täglich zu $40\,\%$ abgebaut. Zu Beginn der Beobachtung ist bereits $1\,mg$ des Wirkstoffs im Blut.

$$f(x) = 3{,}915 - 2{,}915e^{-0{,}5108x}, \qquad x \text{ in Tagen}$$

Wieviel Prozent werden stündlich abgebaut?



Antwort: $\quad 1 - h(\frac{1}{24}) = 0{,}02106 = 2{,}1\,\%$

Die Funktion g, die die Wirkstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit (nun in Stunden) beschreibt, lautet:

$$g(x) = 3{,}915 - 2{,}915e^{-0{,}021x}, \qquad x \text{ in Stunden}$$

$$g(x) = f(\tfrac{1}{24}x)$$

zugehörige DGL:

$$g'(x) = -k^* \cdot g(x) + m^* \qquad k^* = \frac{-\ln(0{,}6)}{24} = \ln(1 - 0{,}021) = 0{,}021; \qquad m^* = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$g'(x) = k^* \cdot \left(\frac{m^*}{k^*} - g(x)\right) \qquad \text{Grenze} \quad G = \frac{m^*}{k^*} = 3{,}915$$

Ähnliches

Die tägliche Dosis eines Wirkstoffs (wird vom Blut aufgenommen) beträgt $2\,mg$.
Der Wirkstoff wird täglich zu $40\,\%$ abgebaut.

$f'(x) = -kf(x) + b$

$40\,\%$ bedeuten hier <u>nicht</u>:

$$40\,\% = \frac{f(x) + b - f(x+1)}{f(x)}$$

Man kann sich fragen, ob es überhaupt eine differenzierbare Funktion g gibt, die

$$40\,\% = \frac{g(x) + b - g(x+1)}{g(x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x+1) = g(x) + b - 40\,\%\, g(x)$$

erfüllt. Der Bestand wird jährlich um b vergrößert und am Ende des Jahres um $40\,\%$ von $g(x)$ (Bestand am Anfang des Jahres) verringert. Der Neuzugang b (vielleicht Jungtiere) bleibt 1 Jahr verschont.

Es verwundert, aber das Einsetzen bestätigt:

$$g(x) = G - a \cdot e^{-kx}, \quad k = -\ln(0{,}6), \quad G = \frac{b}{40\,\%}, \text{ (einziger Unterschied!)}$$

$g(0) = A$ liefert $a = G - A$.
Die zugehörige DGL ist: $g'(x) = -k\,g(x) + kG$.

Bei Zu- und Abfluss-Vorgängen ist die Änderungsrate des Abflusses aufgrund der physikalischen Gegebenheiten nur vom Bestand abhängig.
Die Funktion g erfüllt diese Eigenschaft nicht, da sie zu $G = \frac{b}{k}$ führen würde.