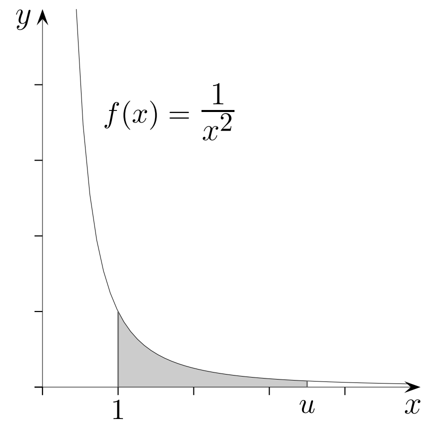
Uneigentliche Integrale

Bei den bisherigen Flächenberechnungen haben wir vorausgesetzt, dass der Integrationsbereich endlich ist.

Uneigentliche Integrale 1. Art

Betrachten wir eine Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Die linke Grenze sei $x = 1$, nach rechts sei die Fläche unbegrenzt, das Flächenstück erstreckt sich ins Unendliche.



Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von 1 bis u:

$$\int_1^u f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = -\frac{1}{u} + 1$$

Lassen wir die obere Grenze u gegen ∞ streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 1.

Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

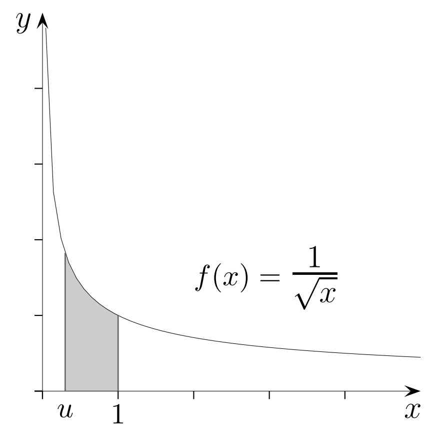
Der Grenzwert muss natürlich nicht existieren, dann existiert das uneigentliche Integral nicht.

Uneigentliche Integrale 2. Art

Betrachten wir nun die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in den Grenzen von 0 bis 1. An der linken Grenze ist die Funktion nicht definiert, es liegt ein Pol (Unendlichkeitsstelle) vor.

Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von u bis 1:

$$\int_u^1 f(x)\,dx = \left[2\cdot\sqrt{x}\right]_u^1 = 2 - 2\cdot\sqrt{u} \qquad \text{beachte: } \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$



Lassen wir die linke Grenze u gegen 0 streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 2.

Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to a} \int_u^b f(x)\,dx$$

, falls $x = a$ nicht zum Definitionsbereich gehört.

Berechne: a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

Lösungen:

1. a) 1

b) *existiert nicht*