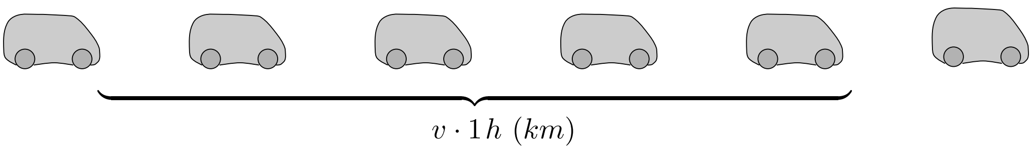
Verkehrsfluss

In einem mathematischen Modell wollen wir den Zusammenhang von Verkehrsdichte $D(v)$ (Anzahl der Autos, die pro Stunde eine Zählstelle passieren), Geschwindigkeit v und Sicherheitsabstand untersuchen. Hierzu sind vereinfachende Annahmen erforderlich:
Alle Autos haben dieselbe Länge L, fahren mit gleicher Geschwindigkeit und halten denselben Sicherheitsabstand $a(v) = bv^2 + sv$ (Brems- und Reaktionsweg, abhängig von v) ein.



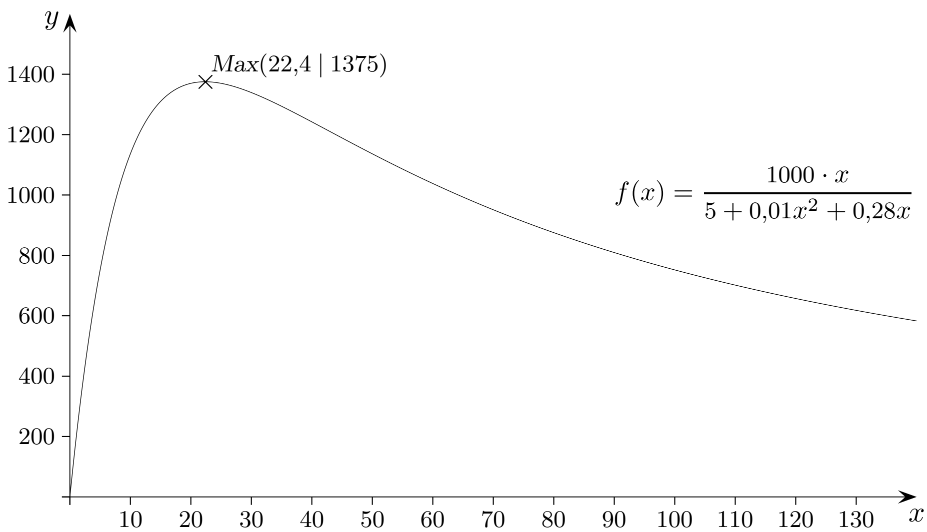
Um den funktionalen Zusammenhang aufzudecken, betrachten wir eine Momentaufnahme des Verkehrsflusses auf einer Strecke der Länge $v \cdot 1h$ (km), in Metern: $1000 \cdot v \cdot 1h$.

Auf dieser Strecke beträgt die Anzahl der Autos dann $\dfrac{1000 \cdot v \cdot 1h}{L + a(v)}$.

Eine Autokolonne dieser Größe passiert pro Stunde jede Zählstelle.

Die Verkehrsdichtefunktion lautet daher: $D(v) = \dfrac{1000 \cdot v}{L + a(v)}$

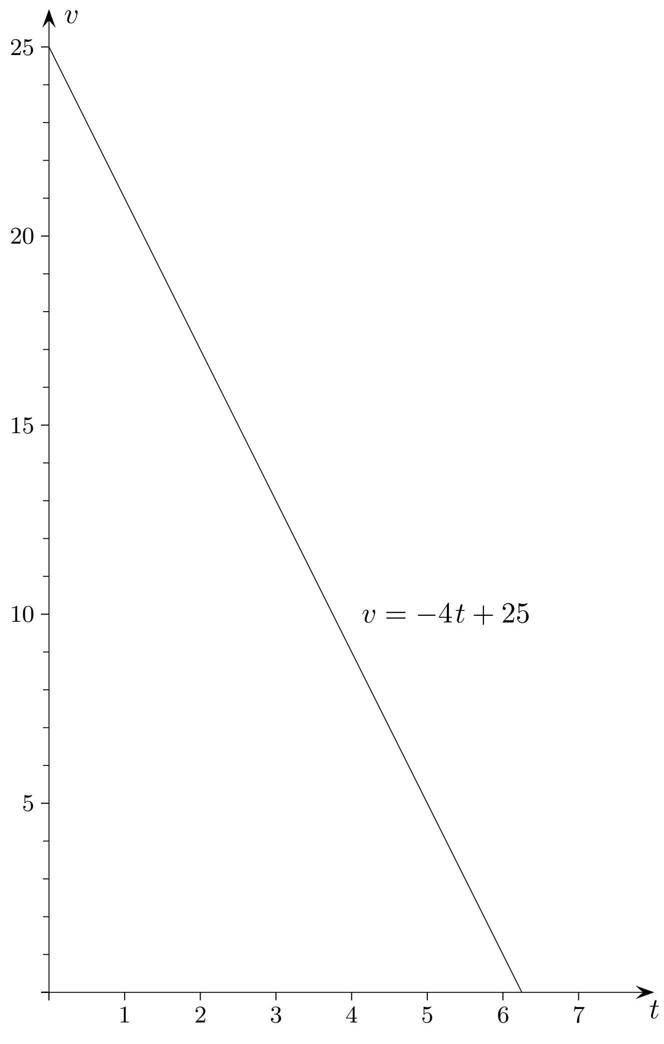
oder in vertrauterer Schreibweise: $f(x) = \dfrac{1000 \cdot x}{L + bx^2 + sx}$



Der Reaktionsweg für eine Sekunde (Geschwindigkeit $x\,\dfrac{km}{h}$) beträgt $x \cdot 0{,}28\,m$.
Eine lineare Verringerung der Geschwindigkeit um $4\dfrac{m}{sek}$ je Sekunde ergibt den Bremsweg $x^2 \cdot 0{,}01\,m$.
Für die Verkehrsdichtefunktion gilt: $Max\left(\sqrt{\frac{L}{b}} \mid \frac{1000}{2\sqrt{Lb}+s}\right)$. Die Ortskurve der Extrema (L variabel) lautet: $y = \frac{1000}{2bx+s}$

Bremsweg

Ein Auto mit der Geschwindigkeit $v = 90\,\frac{km}{h}$ $(= 25\,\frac{m}{sek})$ wird so abgebremst, dass die Geschwindigkeit um $4\frac{m}{sek}$ je Sekunde linear verringert wird. Wie lange dauert es, bis das Fahrzeug steht und wie lang ist der Bremsweg?



Bremszeit: 6,25 sek
Bremsweg: 78,125 m (siehe momentane Änderungsrate)

Sinken eines Steins

1. Ein Stein, der ins Wasser fällt, erreicht nach t Sekunden die Tiefe (in m)

   $$s(t) = \frac{4}{4+t^2} + 0{,}8t - 1\,.$$

   a) Mit welcher Geschwindigkeit tritt der Stein ins Wasser ein?
   Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit minimal?
   Gegen welchen Wert strebt sie?

   b) Zu welchem Zeitpunkt sinkt der Stein mit der größtmöglichen Beschleunigung?

   c) Stellen Sie die Eintauchtiefe, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung graphisch in Abhängigkeit von der Zeit dar und erläutern Sie die Beziehungen zwischen den Graphen.

a) $s'(t) = -\dfrac{8t}{(4+t^2)^2} + 0{,}8$

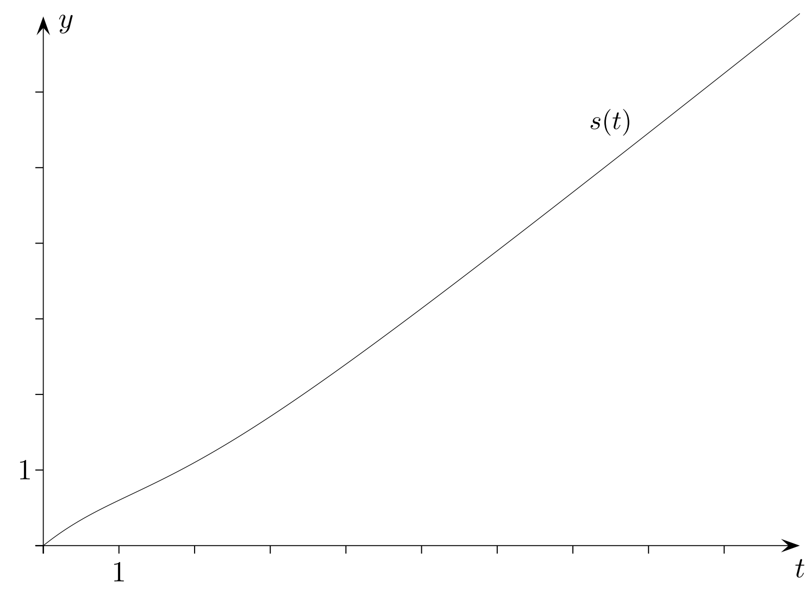
$s''(t) = \dfrac{24t^2 - 32}{(4+t^2)^3}$

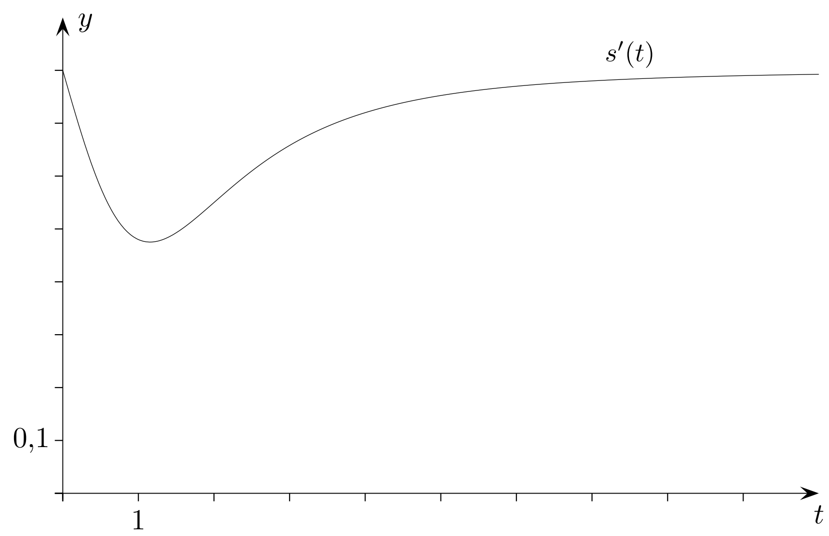
Geschwindigkeit für $t = 0$:
$s'(0) = 0{,}8$

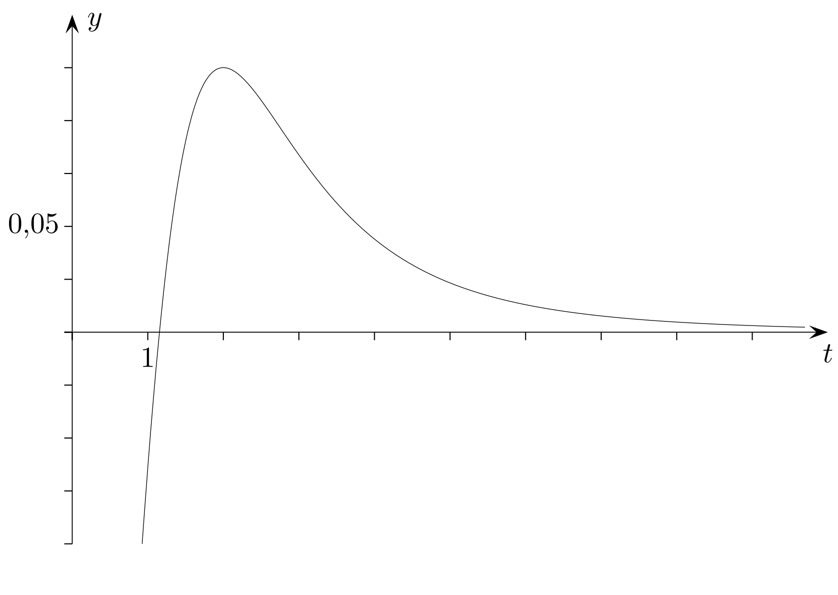
minimale Geschwindigkeit
zur Zeit $t = 1{,}15$

$s'(t) \longrightarrow 0{,}8$

b) maximale Beschleunigung
zur Zeit $t = 2$







Wasserkraftwerk

Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen Wasserdurchfluss in m^3 pro Minute kann die Stromabgabe an den Energiebedarf der Gemeinde angepasst werden. Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch den Funktionsterm

$$w(t) = 60 \cdot \frac{t + 360}{2t + 180}$$

beschrieben. Dabei bedeutet t die Zeit in Minuten von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr, das heißt $D_w = [0; 360]$. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.

a) Berechnen Sie den Wasserdurchfluss um 13:00 Uhr und um 15:00 Uhr.

b) Ermitteln Sie, um welche Uhrzeit im betrachteten Zeitraum der Wasserdurchfluss und damit die Stromerzeugung des Elektrizitätswerkes am größten ist.

c) Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} w(t)\,dt$ gibt die in der Zeit von t_1 bis t_2 durchgeflossene Wassermenge an.

Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von w auch in der Form

$$w(t) = 60 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{135}{t + 90}\right)$$

schreiben lässt und berechnen Sie $W(t) = \int w(t)\,dt$.

d) Entnehmen Sie einer Grafik die Uhrzeit, zu der etwa die Hälfte der Wassermenge durchgeströmt ist, die von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr durchgeflossen ist. Überprüfen Sie Ihre Annahme durch Rechnung und kommentieren Sie das Ergebnis.

Ergebnisse ohne Einheiten:

a) 84
60

b) $t = 0$

c) $W(t) = 30t + 8100 \ln(t + 90)$

d) 11918,22
141,8

Fichte

Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_k mit dem Graph C_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{8}{2x^2 + k}, \; x \in \mathbb{D}_{f_k}.$$

(1) Untersuchen Sie C_k auf Symmetrie.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_{f_k}$ in Abhängigkeit von k an.
Skizzieren Sie (grob, ohne Einheiten) typische Graphen C_k.

(2) Untersuchen Sie <u>ohne</u> Rechnung, ob es mehrere Möglichkeiten für b ($b \in \mathbb{R}$) gibt, so dass $g_b(x) = 2 - bx^2$ die Kurve C_{-12} berührt. Ermitteln Sie <u>eine</u> Berührstelle.

[<u>ohne</u> Nachweis darf benutzt werden: $f_k'(x) = -\dfrac{32x}{(2x^2 + k)^2}$]

(3) Ermitteln Sie die Wendestellen in Abhängigkeit von k (algebraischer Nachweis erforderlich).

Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Fichte, die zu Beginn der Beobachtung $1\,m$ hoch ist, wird durch die Funktion g modelliert:

$$g(x) = \frac{400}{525 + (x - 28)^2} \qquad (x \text{ in Jahren, } g(x) \text{ in } \tfrac{m}{\text{Jahr}}).$$

Wann beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit $0{,}5\,m$ pro Jahr
und wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal?
Wie hoch ist die Fichte nach 10 Jahren?
Welche Endhöhe erwarten Sie ungefähr nach diesem Modell?
Nach diesem Modell gibt es Zeiträume von einem Jahr, in denen die Fichte um genau einen halben Meter wächst. Bestimmen Sie diese Zeiträume.