Regel von l´Hospital

franz. Mathematiker (1661-1704)
Verfasser des Lehrbuchs der Differentialrechnung:
Analyse des infiniment petits

Die Regel von l´Hospital vereinfacht in vielen Fällen die Grenzwertberechnungen.

Betrachten wir das Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = ?$ Hier liegt der Fall $\dfrac{0}{0}$ vor.

Nach der Regel von l´Hospital kann der Grenzwert bestimmt werden, indem man Zähler und Nenner getrennt ableitet. Beachte: Dies hat nichts mit der Quotientenregel zu tun!

Also: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x}{1} = 2e^0 = 2$

Mit Hilfe der Regel von l´Hospital lassen sich Grenzwerte für die Fälle $\dfrac{0}{0}$ und $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ mit $x \to \infty$, $x \to -\infty$ oder $x \to a$ ermitteln.

Die Regel kann wiederholt angewandt werden, falls der Fall $\dfrac{0}{0}$, bzw. $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$, erhalten bleibt.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Wir können den Satz von l´Hospital für den Fall $\dfrac{0}{0}$ und $x \to 0$ einsehen.

Für die beiden Funktionen f und g gelte, dass sie durch den Ursprung verlaufen. Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad \text{, falls} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existiert.}$$

Begründung: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(0)\,x}{g'(0)\,x} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ f und g werden durch ihre Tangenten im Ursprung approximiert.

Der Fall $0 \cdot \infty$ kann manchmal auf einen der genannten Fälle zurückgeführt werden.

Strenggenommen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$ nicht, da ein Grenzwert eine reelle Zahl ist. Diese Schreibweise beinhaltet, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ für $x \to \infty$ unbegrenzt wächst.

1. Bestimme die Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \cdot \ln x$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5x^3 - 4x^2}{2x^5 + 8x^3}$

1. Lösungen

a) 0 *b)* 0

c) 0 *d)* $-\infty$

l´Hospital Weitere Untersuchungen

1. $\dfrac{\infty}{\infty}$ für $x \to 0$

Diesen Fall führen wir auf Bekanntes zurück. Die Existenz der Grenzwerte wird vorausgesetzt.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(g(x))^2}\, g'(x)}{-\frac{1}{(f(x))^2}\, f'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textit{(warum?)}$$

2. $\dfrac{0}{0}$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ für $x \to \infty$

(leichte) Aufgabe