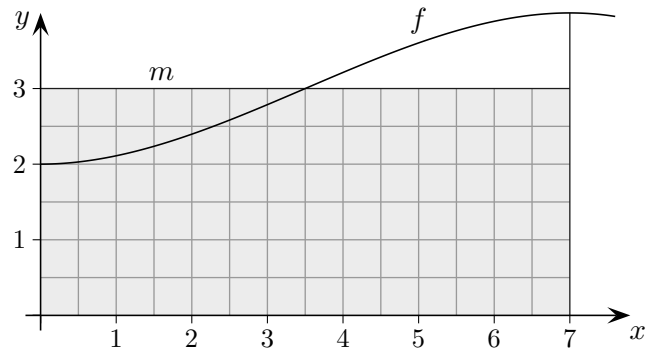
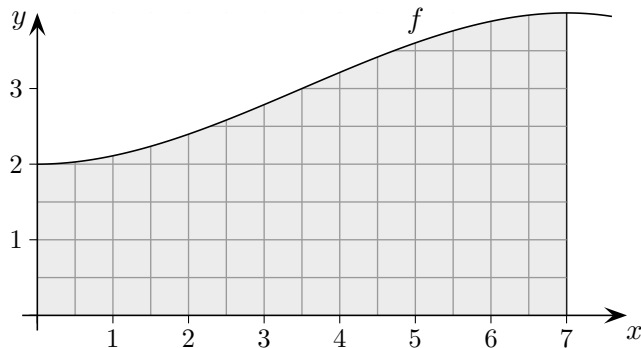


# Mittlerer Funktionswert



Für den mittleren Funktionswert  $m$  der Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  soll gelten (Definition):

$$m \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$$
$$\implies m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ , d. h.  $F'(x) = f(x)$ , dann gilt:

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad (\text{Sekantensteigung})$$

Für mittlere Änderungsraten ist dieser Zusammenhang bedeutsam.

Sei also  $f(t)$  eine Funktion, die den zeitlichen Verlauf einer Änderungsrate (z. B. einer Wachstumsgeschwindigkeit) beschreibt (hierfür ist auch  $f'$  eine häufig verwendete Bezeichnung).

Die mittlere Änderungsrate des Bestandes  $F$  auf einem Intervall (mittlerer Funktionswert von  $f$ ) ist dann einfach die Sekantensteigung  $m$  von  $F$ .

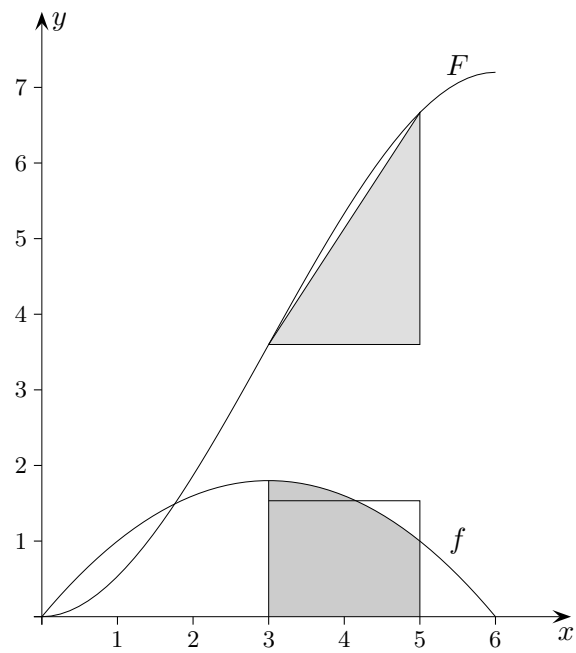
Sei zur Zeit  $t = a$  der Bestand  $F$  null ( $F(a) = 0$ ), so gilt

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad \text{beachte: } F'(t) = f(t)$$

Allgemeiner gilt mit einem Bestand  $F(a)$  zum Zeitpunkt  $t = a$

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(x) dx$$

## Durchschnittliche Änderungsrate $m$

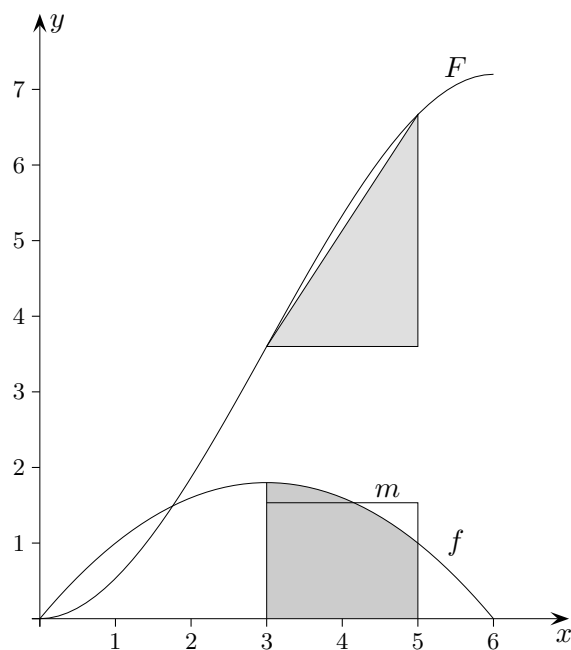


$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x - 6)$$

$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

Erläutere die Grafik und ermittle  $m$ .

## Durchschnittliche Änderungsrate $m$



$$f(x) = -\frac{1}{5}x(x-6)$$

$$F(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2$$

$$m = 1,533$$

Für die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate  $m$  auf dem Intervall  $[a, b]$  gilt:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Rechtecksinhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen.

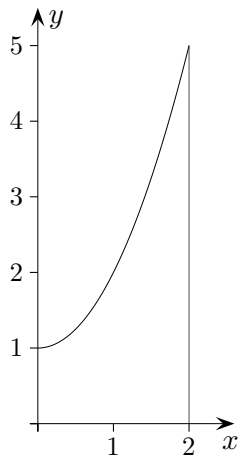
$$= \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Sekantensteigung von  $F$  (Bestandsfunktion),  $F' = f$

Je nachdem, was gegeben ist ( $f$  oder  $F$ ), wird man den einen oder anderen Weg bevorzugen, um die durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von  $F$  zu berechnen.

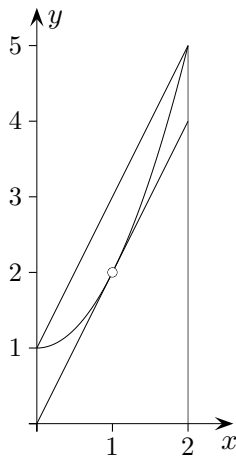
# Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von  $f(x) = x^2 + 1$  gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von  $f$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 2$ ?



## Mittlerer Funktionswert

An welcher Stelle ist die momentane Änderungsrate von  $f(x) = x^2 + 1$  gleich der durchschnittlichen Änderungsrate von  $f$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 2$ ?



Die durchschnittliche Änderungsrate von  $f$  zwischen  $x = 0$  und  $x = 2$  beträgt  $m = 2$  (Sekantensteigung).  $m = 2$  ist (natürlich) auch der mittlere Funktionswert von  $f'(x) = 2x$  auf dem Intervall  $[0; 2]$ . Die gesuchte Stelle ist  $x = 1$  ( $f'(x) = m$ ).

Die Sekantensteigung tritt an einer Zwischenstelle als Tangentensteigung auf. Das ist die Aussage des Mittelwertsatzes.