

Trigonometrische Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen werden auf Gleichungen der Form

$$\sin x = c \quad (\text{nur lösbar für: } -1 \leq c \leq 1)$$

$$\sin ax = c$$

$$\sin(ax + b) = c$$

zurückgeführt (Entsprechendes für \cos , \tan), und zwar durch:

- 1) Ausklammern, Anwenden der Faktorregel: $f(x) \cdot g(x) = 0 \iff f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$
- 2) Lösen einer quadratischen Gleichung nach Ersetzung
- 3) Verwenden einer Beziehung

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

d) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- 4) Lösungen einer Gleichung wie z.B. $x \cdot \sin(x) = 1$, $[0; 2\pi]$ werden mit dem GTR ermittelt.

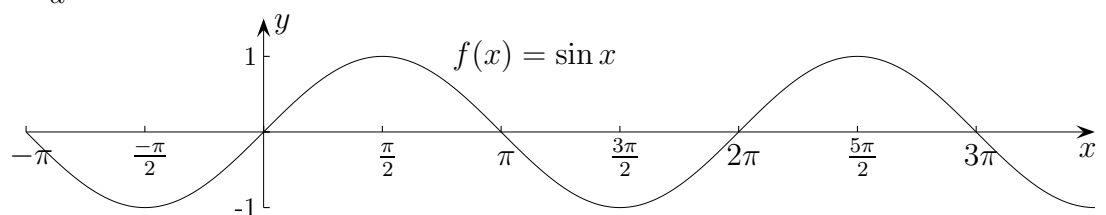
$$x_1 = 1,114$$

$$x_2 = 2,773$$

1. $\sin ax = 0$

$$ax = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{Nullstellen}$$

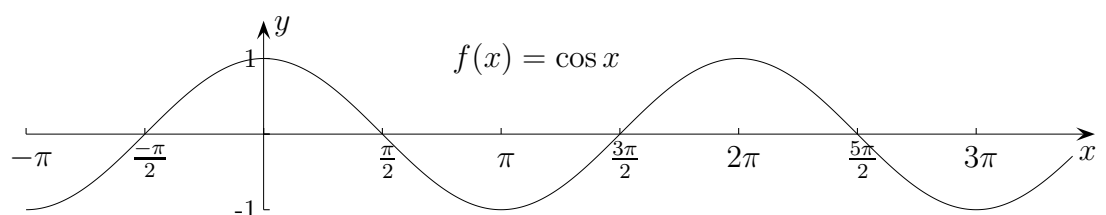
$$x = k \cdot \frac{\pi}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



2. $\cos ax = 0$

$$ax = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2a} + k \cdot \frac{\pi}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



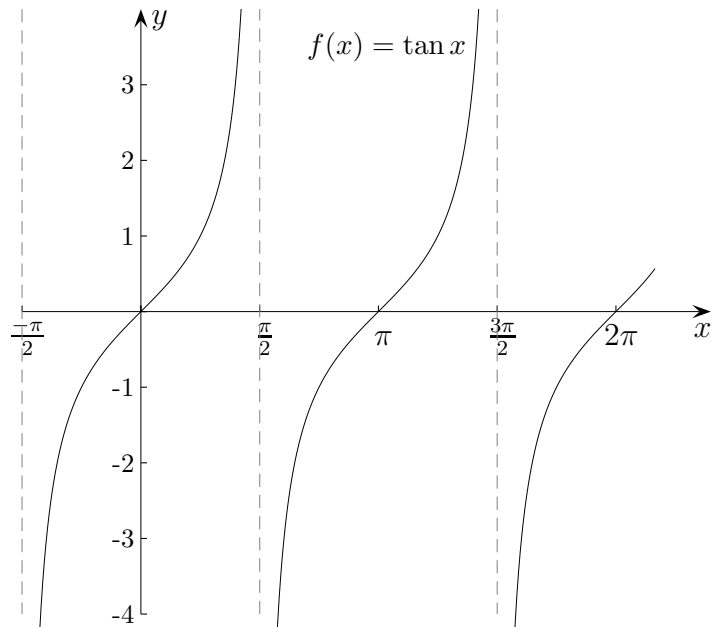
Trigonometrische Gleichungen Fortsetzung

3. $\sin x + k \cdot \cos x = 0$ $k \neq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

$$\tan x = -k$$

$$x_1 = \arctan(-k)$$

$$x_2 = x_1 + \pi$$



4. $2 \sin 2x - \cos x = 0$ $[0; 2\pi]$

$$\dots$$

$$\cos x = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$1 - 4 \sin x = 0$$

$$x_3 = 0,253 \quad x_4 = 2,889$$

5. $\sin x + \cos 2x = 0$ $[0; 2\pi]$

$$\dots$$

$$-2(\sin x)^2 + \sin x + 1 = 0$$

$$\dots$$

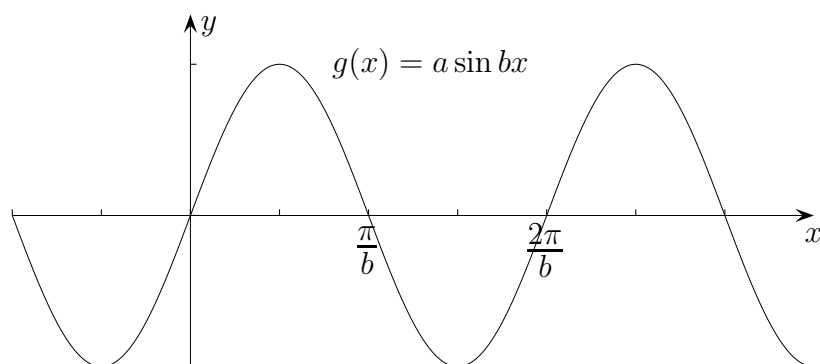
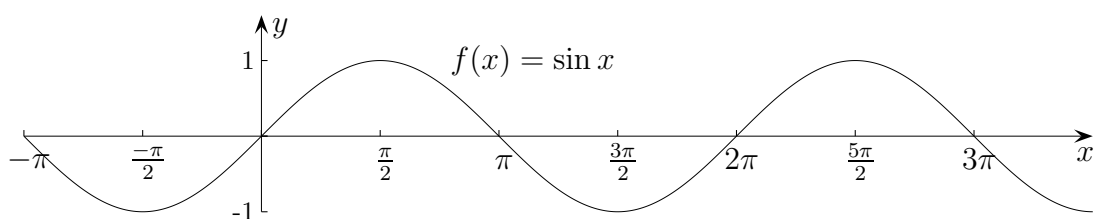
$$\sin x = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 3,665 \quad x_3 = 5,760$$

Extrema von $g(x) = a \sin bx$



Der Graph von g ist gegenüber dem Graph von f längs der x -Achse gestaucht, die Periode ist nun $\frac{2\pi}{b}$.

Den Maximumstellen von f

$$x_{max} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

entsprechen daher die Maximumstellen von g

$$x_{max} = \frac{\pi}{2b} + k \cdot \frac{2\pi}{b}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Den Minimumstellen von f

$$x_{min} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

entsprechen die Minimumstellen von g

$$x_{min} = \frac{3}{2b}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{b}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zeige für g : $Max\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} \mid a\right)$, k gerade

$Min\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} \mid -a\right)$, k ungerade

Extrema der Funktion $f(x) = 3 \sin(2x - 2) + 1$

Die Periode lautet: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Der Graph ist im Vergleich zum Sinusgraph um 1 nach rechts verschoben, $2x - 2 = 2(x - 1)$.

Daraus ergeben sich unmittelbar die x -Koordinaten:

$$x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die y -Koordinaten ergeben sich aus der Amplitude und der Verschiebung in y -Richtung.

$$y_{\max} = 4$$

$$y_{\min} = -2$$

Oder

Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$,

d. h. $6 \cos(2x - 2) = 0$

$$\cos(2x - 2) = 0$$

$$2x - 2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siehe Graph der Cosinus-Funktion

$$x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Steigungswechsel $+/-$, daher Maximum

$$2x - 2 = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

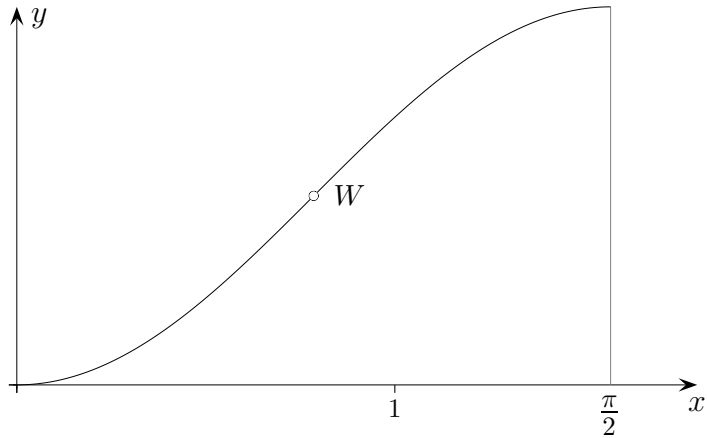
$$x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 1 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Steigungswechsel $-/+$, daher Minimum

Punktsymmetrie

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Zeige, dass der Graph punktsymmetrisch ist zu W .



$$W\left(\frac{\pi}{4} \mid 0,5\right)$$

Verschiebung in den Ursprung: $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 0,5$

$g(x) = -g(-x)$, beachte: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos x = \cos(-x)$

alternativ:

begründe: $0,5 - f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 0,5$, beachte: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$