Rotationsvolumen Ausstellungshalle

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche (siehe Zeichnung) im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden. Im Bereich $[0, 10]$ soll die Begrenzung geradlinig sein, sodass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y-Achse geplant.

a) Zeigen Sie, dass die Höhe der Ausstellungshalle $10\,m$ beträgt.

b) Ermitteln Sie eine Funktion, die das Profil auf dem Intervall $[-15, -10]$ beschreibt.

Berechnen Sie

c) die Länge der gestrichelten Mantellinie,

d) das Hallen-Volumen,

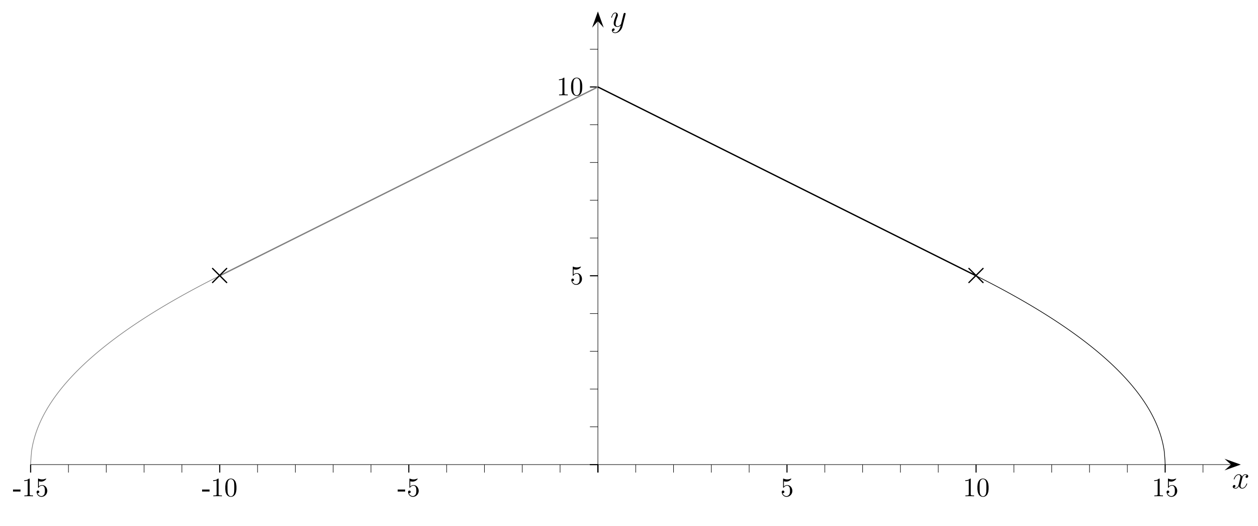
e) die Größe der Hallenwandfläche.

Bogenlänge: $s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$

Für zur x-Achse drehsymmetrische Körper gilt:

Volumen: $V = \pi \displaystyle\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$

Oberfläche: $A = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$



Ausstellungshalle   Ergebnisse

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche (siehe Zeichnung) im Intervall [10, 15] durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden. Im Bereich [0, 10] soll die Begrenzung geradlinig sein, sodass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y-Achse geplant.

a) Zeigen Sie, dass die Höhe der Ausstellungshalle $10\,m$ beträgt. $\quad y = -\frac{1}{2}x + 10$

b) Ermitteln Sie eine Funktion, die das Profil auf dem Intervall $[-15, -10]$ beschreibt. $\quad f^*(x) = \sqrt{75 + 5x}$

Berechnen Sie

c) die Länge der gestrichelten Mantellinie, $\quad 7{,}395 + 11{,}180 = 18{,}575\ (m)$

beachte: $f'(15)$ existiert nicht.

d) das Hallen-Volumen, $\quad 2827{,}433 + 523{,}704 = 3351{,}137\ (m^3)$

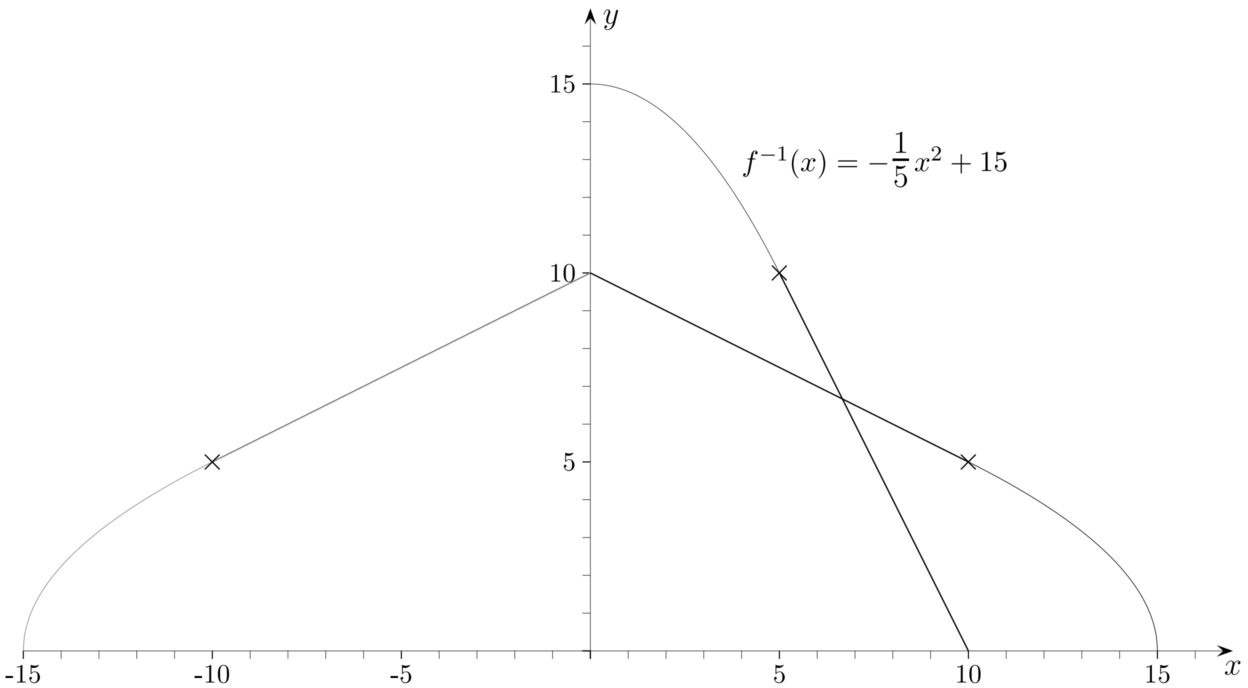
e) die Größe der Hallenwandfläche. $\quad 601{,}692 + 351{,}241 = 952{,}933\ (m^2)$

Bogenlänge: $\quad s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$

Für zur x-Achse drehsymmetrische Körper gilt:
(beachte auch die Formeln für den Kegel)

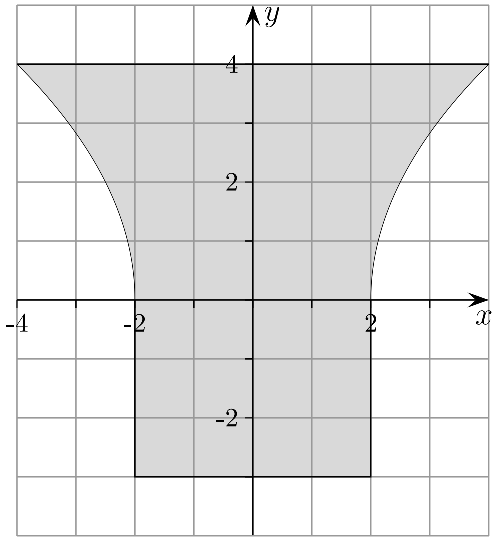
Volumen: $\quad V = \pi \displaystyle\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$

Oberfläche: $\quad A = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$



Rotationskörper Aufgaben

1. In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y-Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt. Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch die Funktion $f(x) = a\sqrt{x+b}$ beschrieben.



   a) Ermitteln Sie a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält.

   b) Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylindrischen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird.

   c) Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$.

2. Durch Rotation der Geraden $g(x) = -kx + 1$ $(k > 0)$ um die x-Achse auf dem Intervall $\left[0;\, 3\right]$ entsteht ein Körper, der je nach Wahl von k aus einem oder zwei zusammenhängenden Teilen besteht.

   a) Welche Rotationskörper können in Abhängigkeit von k entstehen?

   b) Welcher der Rotationskörper hat das kleinste Volumen?

3. Für jedes k $(k > 0)$ ist die Funktion $f_k(x) = (k - x)\sqrt{x}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 1$ ein Punkt mit waagerechter Tangente vorliegt.

   Durch Rotation der Kurve f_3 um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper.

   Ab hier sei $k = 3$.

   b) Berechnen Sie die größte ebene Schnittfläche senkrecht zur Drehachse.

   c) Berechnen Sie die Fläche eines ebenen Schnitts längs der Drehachse (die Drehachse liegt in der Schnittfläche).

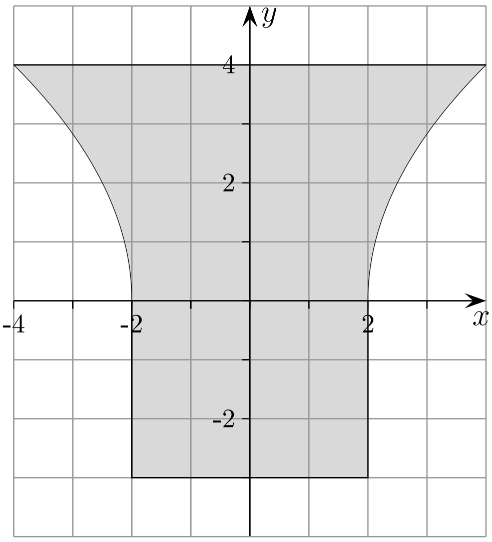
   d) Eine zur Drehachse senkrechte Schnittfläche durch $x = a$ halbiert das Volumen des Körpers. Geben Sie eine Gleichung (ohne Integralzeichen) für a an.

1. In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer bzgl. der y-Achse rotationssymmetrischen Vase dargestellt. Der im 1. Quadranten liegende rechte Rand wird durch die Funktion $f(x) = a\sqrt{x+b}$ beschrieben.

   a) Ermitteln Sie a und b so, dass man den dargestellten Graphen erhält. siehe c)

   b) Begründen Sie, dass mit Hilfe dieser Wurzelfunktion der Übergang zum zylindrischen Teil der Vase ohne Knick, wie es in der Abbildung dargestellt ist, beschrieben wird. $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \infty$

   c) Berechnen Sie das Volumen der Vase für $a = 2\sqrt{2}$ und $b = -2$. 131,53 VE



2. Durch Rotation der Geraden $g(x) = -kx + 1$ $(k > 0)$ um die x-Achse auf dem Intervall $\left[0;\ 3\right]$ entsteht ein Körper, der je nach Wahl von k aus einem oder zwei zusammenhängenden Teilen besteht.

   a) Welche Rotationskörper können in Abhängigkeit von k entstehen? $k < \frac{1}{3}$ Kegelstumpf
   $k = \frac{1}{3}$ Kegel
   $k > \frac{1}{3}$ Doppelkegel

   b) Welcher der Rotationskörper hat das kleinste Volumen?
   $V(x) = \pi \int_0^3 (-kx+1)^2\, dx \quad k_{\min} = \frac{1}{2}$

3. Für jedes k $(k > 0)$ ist die Funktion $f_k(x) = (k - x)\sqrt{x}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_k und wählen Sie das k so, dass an der Stelle $x = 1$ ein Punkt mit waagerechter Tangente vorliegt. $k = 3$

   Durch Rotation der Kurve f_3 um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper.

   Ab hier sei $k = 3$.

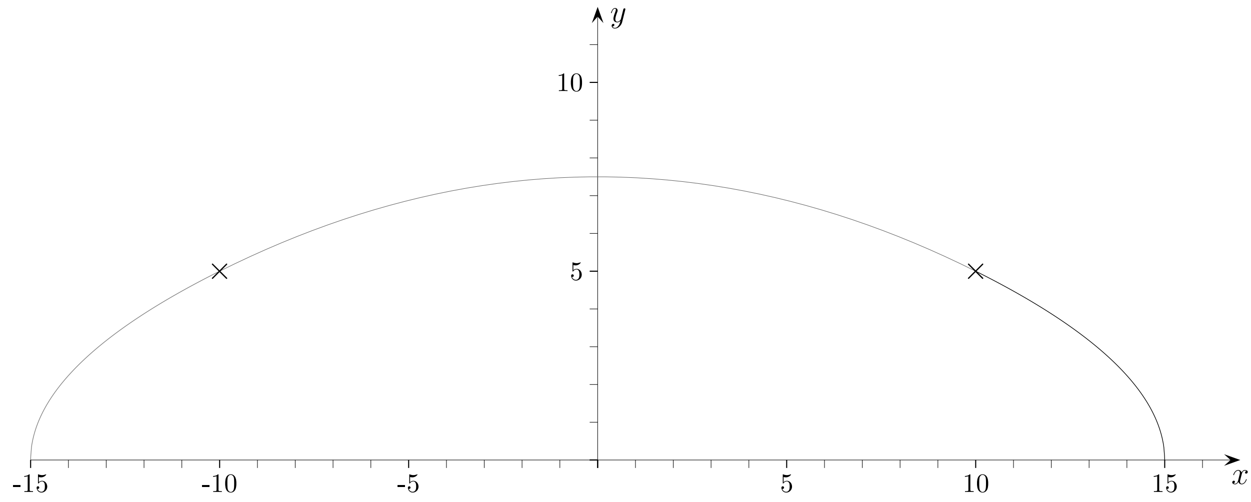
   b) Berechnen Sie die größte ebene Schnittfläche senkrecht zur Drehachse. 4π FE

   c) Berechnen Sie die Fläche eines ebenen Schnitts längs der Drehachse (die Drehachse liegt in der Schnittfläche). $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ FE

   d) Eine zur Drehachse senkrechte Schnittfläche durch $x = a$ halbiert das Volumen des Körpers. Geben Sie eine Gleichung (ohne Integralzeichen) für a an.
   $\frac{1}{2} \cdot \frac{27}{4}\pi = \pi(\frac{1}{4}a^4 - 2a^3 + \frac{9}{2}a^2)$

Ausstellungshalle   2. Aufgabe

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden, im Bereich $[0, 10]$ durch $g(x) = -ax^2 + b$, so dass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y-Achse geplant.

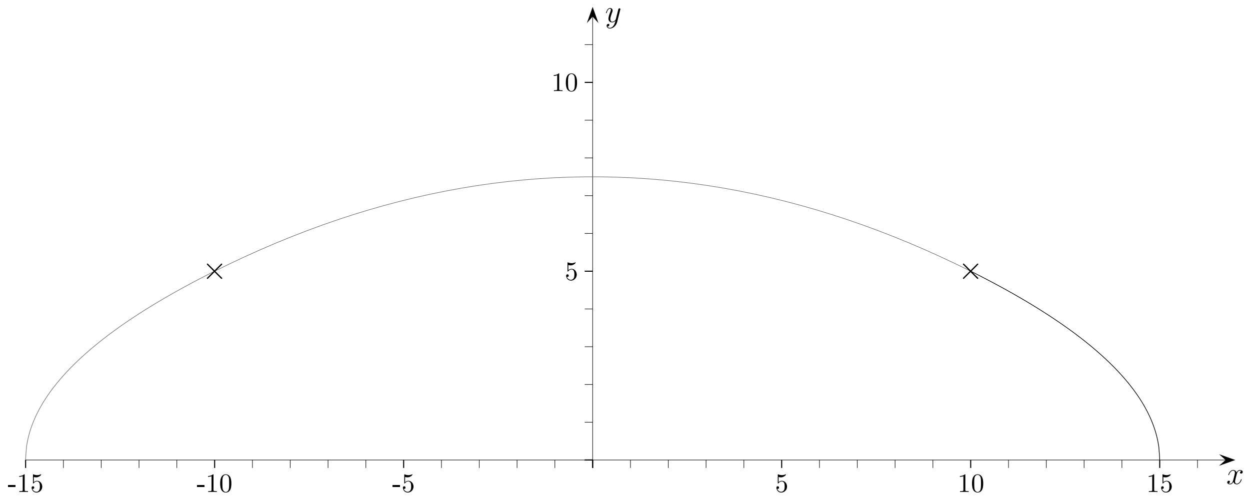


a) Bestimmen Sie a umd b.

b) Berechnen Sie das Volumen.

Ausstellungshalle 2. Aufgabe

In einem Entwurf für eine Ausstellungshalle soll das Profil der Querschnittsfläche im Intervall $[10, 15]$ durch die Funktion $f(x) = \sqrt{75 - 5x}$ beschrieben werden, im Bereich $[0, 10]$ durch $g(x) = -ax^2 + b$, so dass an der Stelle $x = 10$ kein Knick auftritt. Die Halle wird rotationssymmetrisch zur y-Achse geplant.



a) Bestimmen Sie a umd b.

b) Berechnen Sie das Volumen.

Ergebnisse:

a) $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{15}{2}$

b) $V = \pi \int_0^5 \left(15 - \frac{x^2}{5}\right)^2 dx + \pi \int_5^{7,5} \left(300 - 40x\right) dx = 3220{,}132\ VE$ oder

$V = 2\pi \int_0^{10} x\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{15}{2}\right) dx + 2\pi \int_{10}^{15} x\sqrt{75 - 5x}\, dx = 3220{,}132\ VE$ Schalenmethode