

Merkhilfe Grundwissen

1. Umkreis eines Dreiecks

Inkreis

2. gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

3. $x^2 + px + q = 0$ pq -Formel

$$x_{1/2} = ?$$

4. Zinseszinsformel

$$K_n = ?$$

5. Kreisumfang

$$U = ?$$

-fläche

$$A = ?$$

Kugelvolumen

$$V_{\text{Kugel}} = ?$$

-oberfläche

$$O_{\text{Kugel}} = ?$$

6. Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = ?$$

Pyramide

$$V_{\text{Pyramide}} = ?$$

Zylinder

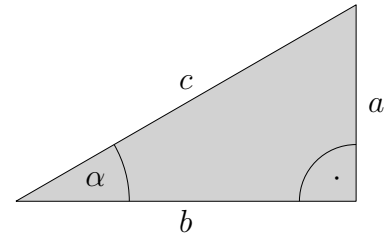
$$V_{\text{Zylinder}} = ?$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = ?$$

7. Satz vom Nullprodukt

8. $\sin \alpha = ?$
 $\cos \alpha = ?$
 $\tan \alpha = ?$



9. Winkel-/Bogenmaß

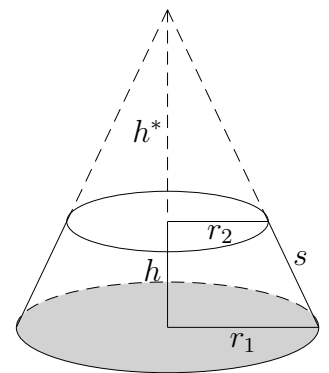
10. Gleichungssystem mit
 2 Variablen
 3 Variablen
 Beispiele

11. Pythagoras
 Umkehrung

12. Eigenschaften der zentrischen Streckung

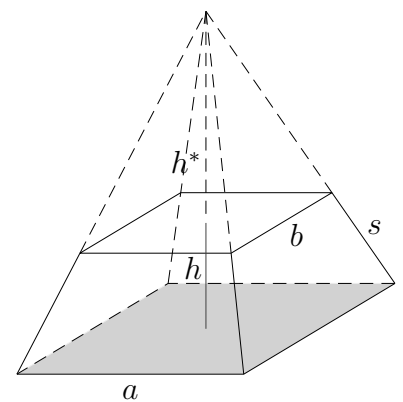
13. Höhe des Ergänzungskegels

$$h^* = ?$$



14. Höhe der Ergänzungspyramide

$$h^* = ?$$



15. Geradengleichung, $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ gegeben
GTR

16. Gleichung einer Parabel

a) achsensymmetrisch

b) Nullstellen x_1, x_2 gegeben

c) GTR, $A(x_1 | y_1), B(x_2 | y_2), C(x_3 | y_3)$ gegeben

17. Scheitelform einer Parabel

$f(x) = ?$

18. Umkehrfunktion

19. Ellipsengleichung

20. $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$ Substitution

$x_{1/2} = ?$

Ende der Merkhilfe Grundwissen

[zum Anfang](#)

zur Merkhilfe

[Differenzialrechnung](#)

[Integralrechnung](#)

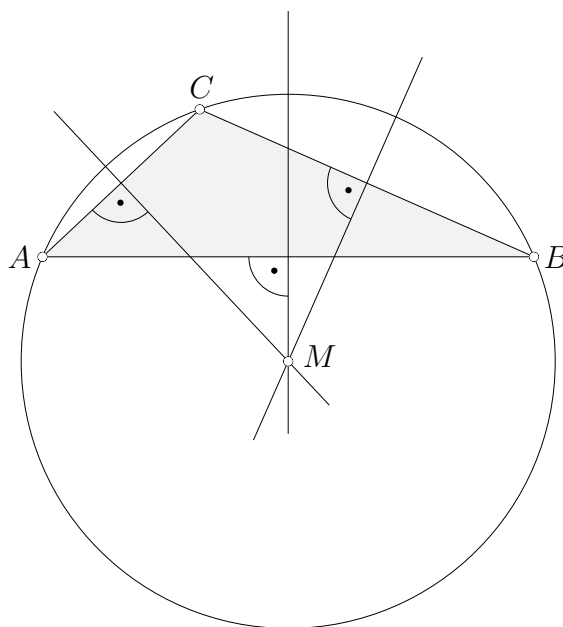
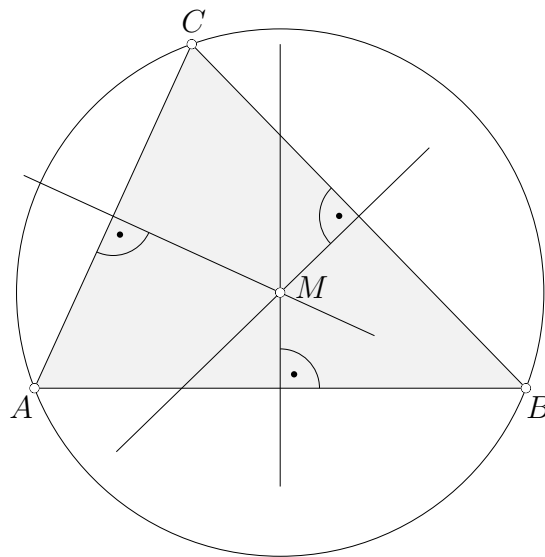
[Vektorrechnung](#)

[Stochastik](#)

[Homepage](#)

Umkreis eines Dreiecks

Inkreis

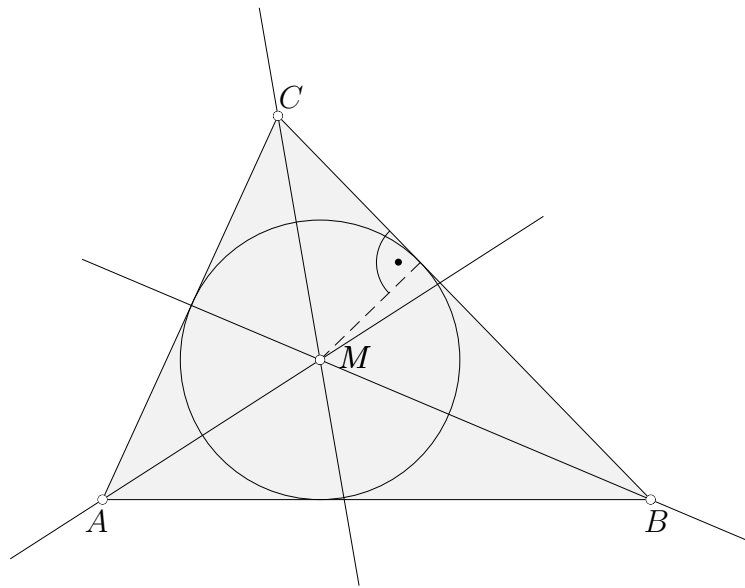


Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
Bei einem rechtwinkligen Dreieck liegt M auf der Hypotenuse.



Umkreis eines Dreiecks

Inkreis



Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

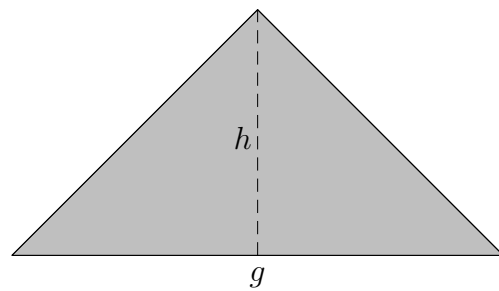
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.



←

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h$$

gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

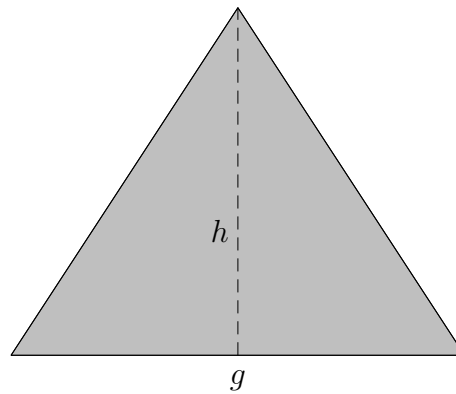
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Alle drei Seiten sind gleich lang.



←

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h$$

gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

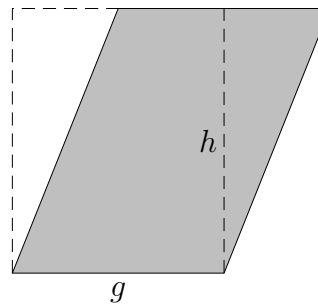
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.



←

$$A = g \cdot h$$

gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

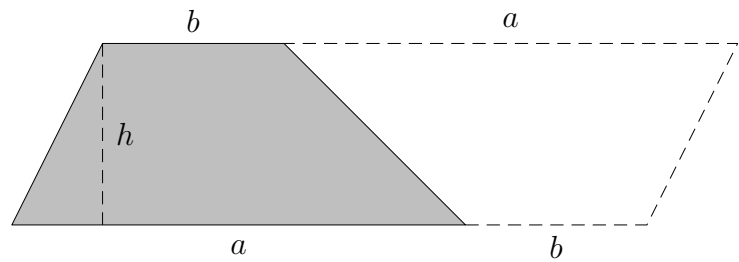
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.



←

$$A = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

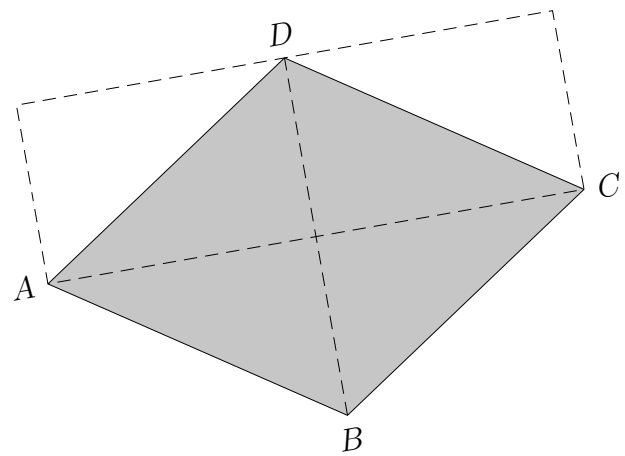
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Alle vier Seiten sind gleich lang.



$$A_{\text{Raute}} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

←

gleichschenkliges Dreieck

gleichseitiges Dreieck

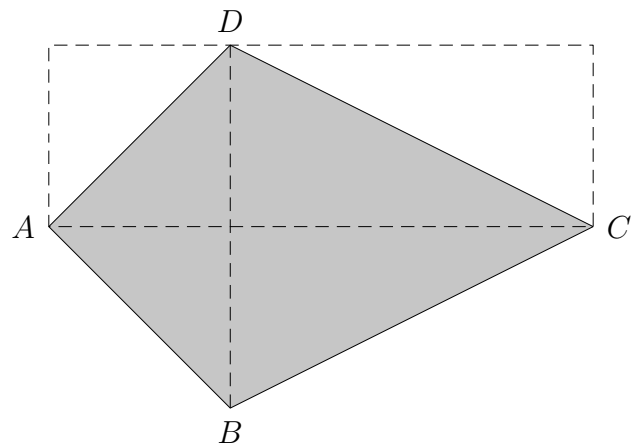
Parallelogramm

Trapez

Raute

Drachenviereck

Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse.



$$A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

←

$$x^2 + px + q = 0 \quad pq\text{-Formel} \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

←

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= 0 \\ x_{1/2} &= -3 \pm \sqrt{9 + 7} \\ &= -3 \pm 4 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Typ 1

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= 0 & \text{Zwischenschritt: Gleichung nach } x^2 \text{ umstellen.} \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{5} & x^2 + 5 = 0 \text{ hat keine Lösung} \end{aligned}$$

Typ 2

$$\begin{aligned} x(x - 3) &= 0 & \text{Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.} \\ & & \text{Die Gleichung könnte auch in der Form } x^2 - 3x = 0 \text{ vorliegen.} \\ x_1 &= 0; & x_2 = 3 \end{aligned}$$

Typ 3

$$\begin{aligned} x(x - 2) &= 3 & \text{Nur hier ist die } pq\text{-Formel erforderlich.} \\ & & \text{Zwischenschritt: } x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x_1 &= -1; & x_2 = 3 \end{aligned}$$

Typ 4

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 &= 9 & \text{Ratsam ist, die Klammern nicht aufzulösen,} \\ & & \text{die } pq\text{-Formel ist nicht erforderlich.} \\ & & \text{Zwischenschritt: } x - 5 = \pm 3 \\ x_1 &= 8; & x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\text{Aufzinsungsfaktor } q = 1 + \frac{p}{100}$$



Kreisumfang

-fläche

Kugelvolumen

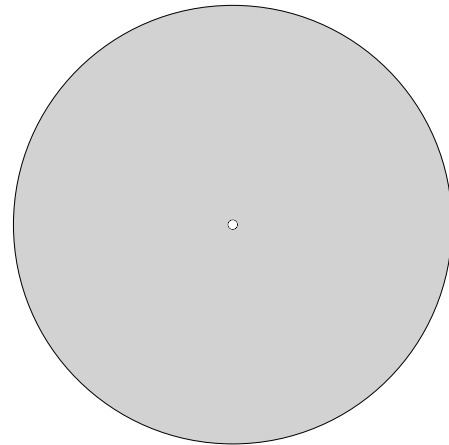
-oberfläche

$$U = 2\pi r$$

$$A = ?$$

$$V_{\text{Kugel}} = ?$$

$$O_{\text{Kugel}} = ?$$



Kreisumfang

-fläche

Kugelvolumen

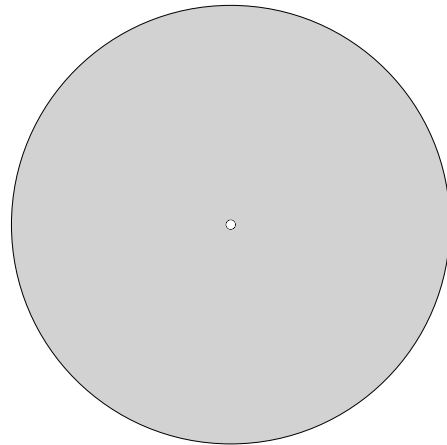
-oberfläche

$$U = ?$$

$$A = \pi r^2$$

$$V_{\text{Kugel}} = ?$$

$$O_{\text{Kugel}} = ?$$



Kreisumfang
-fläche

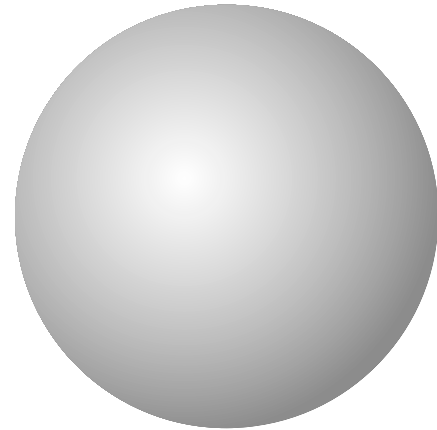
$$U = ?$$

$$A = ?$$

Kugelvolumen
-oberfläche

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$O_{\text{Kugel}} = ?$$



Kreisumfang

-fläche

Kugelvolumen

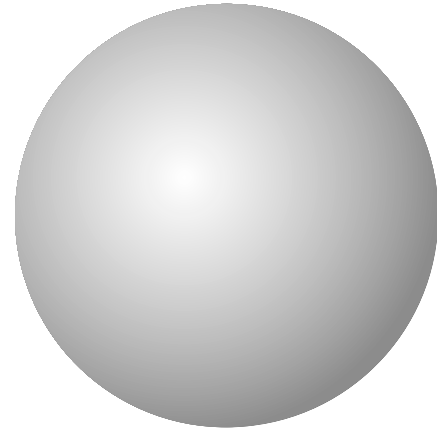
-oberfläche

$$U = ?$$

$$A = ?$$

$$V_{\text{Kugel}} = ?$$

$$O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$



Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$$

Pyramide

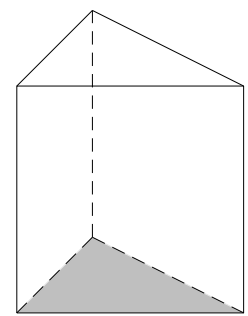
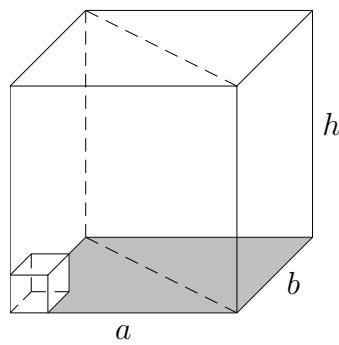
$$V_{\text{Pyramide}} = ?$$

Zylinder

$$V_{\text{Zylinder}} = ?$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = ?$$



Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = ?$$

Pyramide

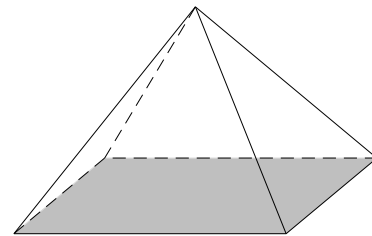
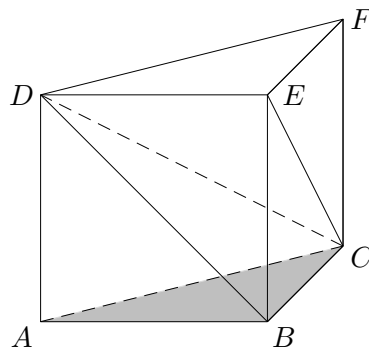
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Zylinder

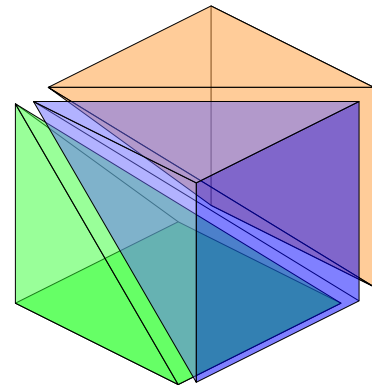
$$V_{\text{Zylinder}} = ?$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = ?$$



←



Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = ?$$

Pyramide

$$V_{\text{Pyramide}} = ?$$

Zylinder

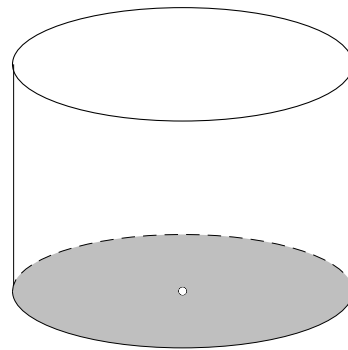
$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 \cdot h$$

Mantelfläche

$$M_{\text{Zylinder}} = ?$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = ?$$



Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = ?$$

Pyramide

$$V_{\text{Pyramide}} = ?$$

Zylinder

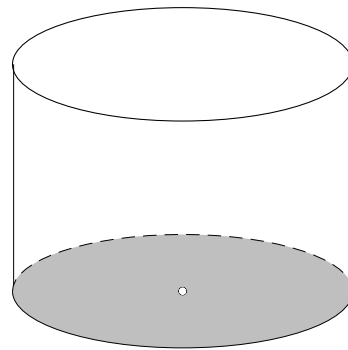
$$V_{\text{Zylinder}} = ?$$

Mantelfläche

$$M_{\text{Zylinder}} = 2\pi r \cdot h$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = ?$$



Prisma

$$V_{\text{Prisma}} = ?$$

Pyramide

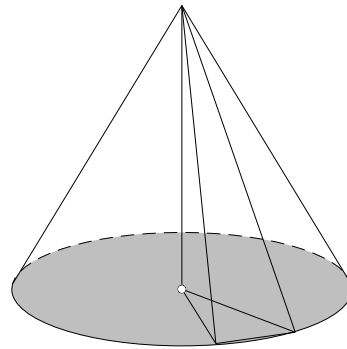
$$V_{\text{Pyramide}} = ?$$

Zylinder

$$V_{\text{Zylinder}} = ?$$

Kegel

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$



Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann null,
wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

$$\begin{aligned}x^2 + 3x &= 0 \\x(x + 3) &= 0 \\x_1 = 0; \quad x_2 &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^3 - 5x^2 &= 0 \\x^2(2x - 5) &= 0 \\x_1 = 0; \quad x_2 &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}x^4 + x^3 &= 0 \\x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) &= 0 \\x_1 = 0; \quad x_2 &= 4\end{aligned}$$

So nicht lösbar wäre:

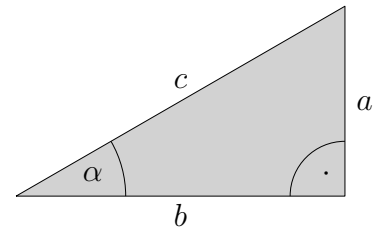
$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= 7 \\x_1 = 1; \quad x_2 &= -7 \quad (pq\text{-Formel})\end{aligned}$$

←

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = ?$$

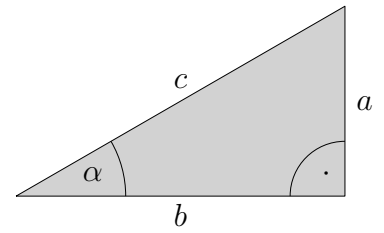
$$\tan \alpha = ?$$



$$\sin \alpha = ?$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

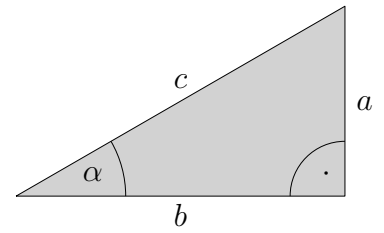
$$\tan \alpha = ?$$



$$\sin \alpha = ?$$

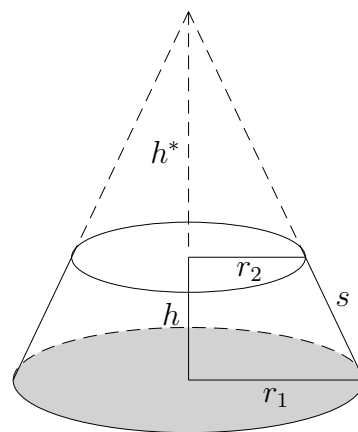
$$\cos \alpha = ?$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Höhe des Ergänzungskegels

$$h^* = \frac{hr_2}{r_1 - r_2}$$



$$\frac{h^*}{r_2} = \frac{h^* + h}{r_1} \quad | \cdot r_2 r_1$$

$$h^* r_1 = h^* r_2 + h r_2$$

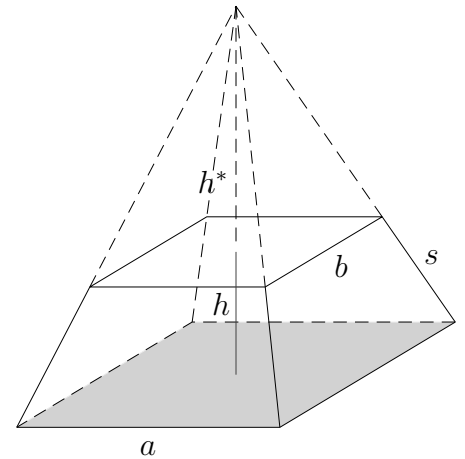
$$h^*(r_1 - r_2) = h r_2$$

$$h^* = \frac{h r_2}{r_1 - r_2}$$

←

Höhe der Ergänzungspyramide

$$h^* = \frac{hb}{a-b}$$



$$\frac{h^*}{b} = \frac{h^* + h}{a} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{h^*}{b} = \frac{h^* + h}{a} \quad | \cdot ba$$

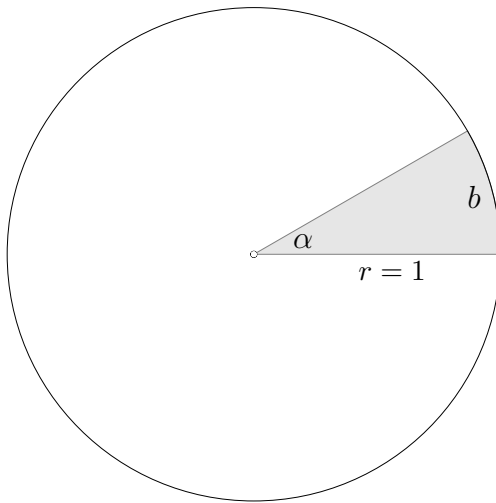
$$h^*a = h^*b + hb$$

$$h^*(a-b) = hb$$

$$h^* = \frac{hb}{a-b}$$

←

Winkel-/Bogenmaß



Umrechnungsformel:

$$\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Die Größe des Winkels α kann eindeutig durch die Länge des Bogens b erfasst werden.

Gleichungssystem mit
 2 Variablen
 3 Variablen
 Beispiele

Die Idee:

Die Gleichungen werden geeignet multipliziert, damit beim Addieren der rechten und linken Seiten eine Variable herausfällt (eliminiert wird) und eine Gleichung mit nur noch einer Variablen entsteht.

$$\begin{array}{r}
 3x + 7y = 26 \quad | \cdot (-5) \\
 5x - 6y = 8 \quad | \cdot 3 \\
 \hline
 -15x - 35y = -130 \\
 15x - 18y = 24 \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l} -15x - 35y = -130 \\ 15x - 18y = 24 \end{array} \right\} + \\
 \hline
 -53y = -106 \\
 y = 2; \quad x = 4
 \end{array}$$

←

$$\begin{array}{r}
 2x - 5y = -12 \\
 3x + 4y = 5 \\
 \hline
 x = -1; \quad y = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x + y = -2 \\
 x - 3y = -6 \\
 \hline
 x = -3; \quad y = 1
 \end{array}$$

GTR

Mit 2nd MATRIX | EDIT werden die Matrix-Koeffizienten eingegeben.

2 × 3 bedeutet: 2 Zeilen (waagrecht), 3 Spalten (senkrecht).

Editor mit 2nd Quit verlassen.

Mit 2nd MATRIX | MATH | B: rref([A]) wird das LGS gelöst.

2nd MATRIX | NAMES 1: liefert z.B. [A],

MATH | 1:Frac versucht Brüche zu erzeugen.

Gleichungssystem mit
 2 Variablen
 3 Variablen
 Beispiele

Die Idee:

Aus dem Gleichungssystem mit 3 Variablen wird ein Gleichungssystem mit 2 Variablen erstellt.

Hierzu betrachte man (z.B.) die erste und zweite Gleichung.

Die beiden Gleichungen werden geeignet multipliziert, damit beim Addieren der rechten und linken Seiten eine Variable herausfällt (eliminiert wird) und eine Gleichung mit nur noch zwei Variablen entsteht.

Dann nehme man die erste (oder zweite) und die noch nicht verwendete dritte Gleichung.

Diese beiden Gleichungen werden wieder geeignet multipliziert, damit beim Addieren dieselbe

Variable wie vorher eliminiert wird und erneut eine Gleichung mit nur noch zwei Variablen entsteht.

Mit den beiden Gleichungen mit zwei Variablen verfährt man wie oben beschrieben.

$$\begin{array}{l} I \quad 2x + 3y + 4z = 20 \quad | \cdot 3 \quad | \cdot 4 \\ II \quad 3x + 2y + 5z = 22 \quad | \cdot (-2) \\ \hline III \quad 4x + 5y + z = 17 \quad | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I \cdot 3 \quad 6x + 9y + 12z = 60 \\ II \cdot (-2) \quad -6x - 4y - 10z = -44 \end{array} \right\} +$$

$$IV \quad 5y + 2z = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} I \cdot 4 \quad 8x + 12y + 16z = 80 \\ III \cdot (-2) \quad -8x - 10y - 2z = -34 \end{array} \right\} +$$

$$V \quad 2y + 14z = 46$$

$$IV \quad 5y + 2z = 16$$

$$\dots z = 3; y = 2; x = 1$$

←

GTR

Mit 2nd MATRIX | EDIT werden die Matrix-Koeffizienten eingegeben.

3 × 4 bedeutet: 3 Zeilen (waagrecht), 4 Spalten (senkrecht).

Editor mit 2nd Quit verlassen.

Mit 2nd MATRIX | MATH | B: rref([A]) wird das LGS gelöst.

2nd MATRIX | NAMES 1: liefert z.B. [A],

MATH | 1:Frac versucht Brüche zu erzeugen.

Gleichungssystem mit

2 Variablen

3 Variablen

Beispiele

$$3x + 2y + z = -2$$

$$x - y + 3z = 0$$

$$3x + 2y - 2z = 1$$

$$x = 1; y = -2; z = -1$$

$$6x + y - 2z = -7$$

$$2x - y + z = -3$$

$$4x + y - 2z = -5$$

$$x = -1; y = 3; z = 2$$

$$x + y - 2z = -8$$

$$x + z = 6$$

$$2x - y - z = 2$$

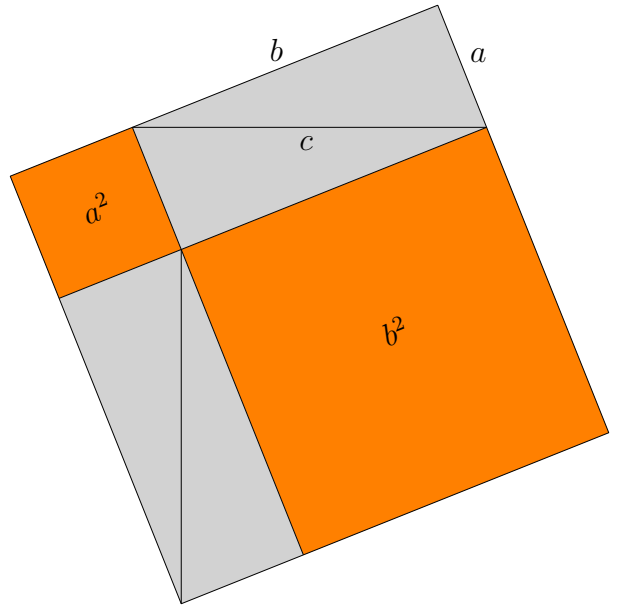
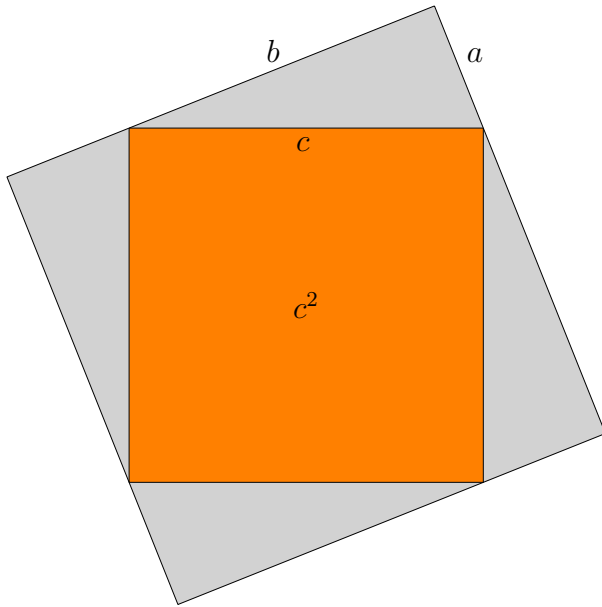
$$x = 2; y = -2; z = 4$$

←

Pythagoras

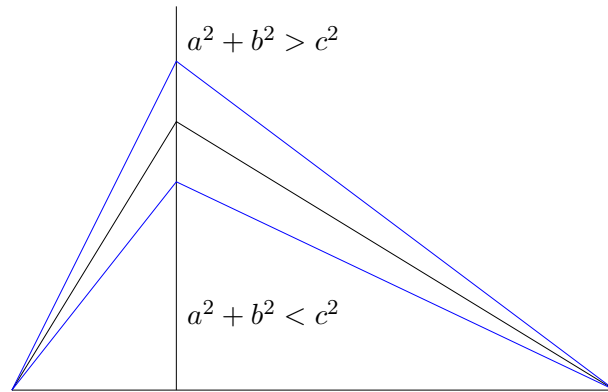
Im rechtwinkligen Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Umkehrung

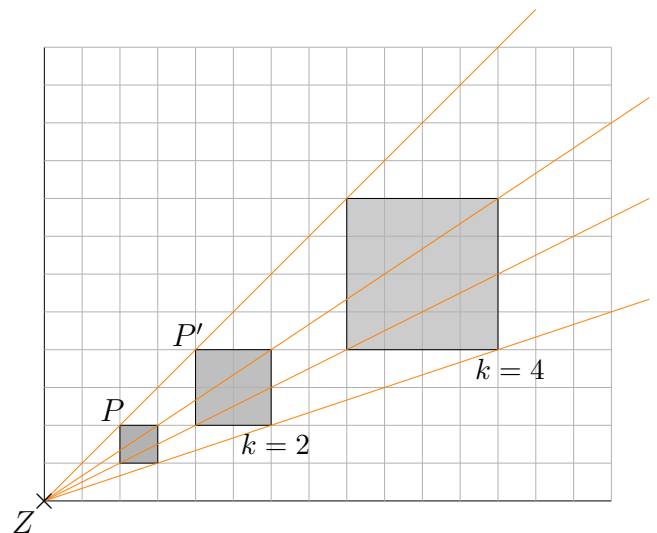


Pythagoras

Umkehrung Falls $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.



Eigenschaften der zentrischen Streckung



Z heißt Streckzentrum.

Für den Streckfaktor k ($k > 0$) gilt: $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$.

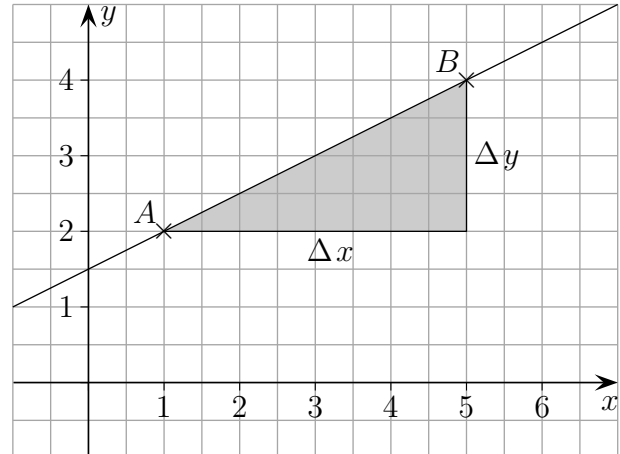
Figur und Bild sind ähnlich mit dem Maßstab k .

1. Bei einer zentrischen Streckung wird jede Strecke auf eine Strecke der k -fachen Länge abgebildet.
2. Die Längenverhältnisse und die Winkelgrößen verändern sich nicht.
3. Der Umfang eines Vielecks multipliziert sich mit k , der Flächeninhalt mit k^2 , das Volumen mit k^3 .
Für negatives k sind die Beträge zu nehmen.

←

Geradengleichung, $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ gegeben
GTR

Gerade verläuft durch A und B.



1. Schritt Steigung ermitteln

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Auf die Reihenfolge der Punkte und auf ihre Lage kommt es nicht an,
Koordinaten können auch negativ sein. Möglich wäre auch:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (\text{Erweitere den Bruch mit } -1)$$

2. Schritt Gleichung aufstellen

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$A(1 | 2), \quad B(5 | 4) \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$A(-3 | 1), \quad B(5 | 3) \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

←

Geradengleichung, $A(x_1 | y_1)$ und $B(x_2 | y_2)$ gegeben
GTR

Mit STAT | EDIT x -Werte in L1 und y -Werte in L2 eingeben,
STAT | CALC 4: LinReg(ax+b) aufrufen.

L1	L2
x_1	y_1
x_2	y_2

Mit LinReg(ax+b) Y1 wird das Ergebnis in Y1 für die Grafik gespeichert.
Y1 (oder Y2, ...) mit VARS | Y-VARS | 1: Function | wählen.

Für x - und y -Werte in L2 und L3 lautet die Anweisung:
LinReg(ax+b) L2, L3, Y1

Möglich wäre

a, b, \dots als Bruch: VARS 5: Statistics | EQ a ENTER Math 1: Frac

$$A(4 | -3), B(-4 | 2) \quad y = -\frac{5}{8}x - \frac{1}{2}$$

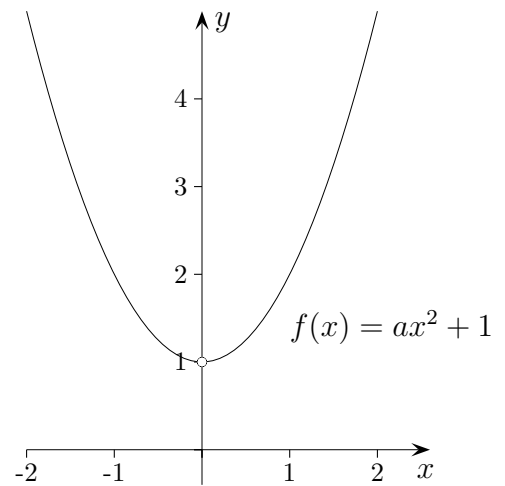
←

Gleichung einer Parabel

- a) achsensymmetrisch
- b) Nullstellen x_1, x_2 gegeben
- c) GTR, $A(x_1 | y_1), B(x_2 | y_2), C(x_3 | y_3)$ gegeben

Ansatz $f(x) = ax^2 + b$

2 Punkte $A(x_1 | y_1), B(x_2 | y_2)$ müssen gegeben sein.



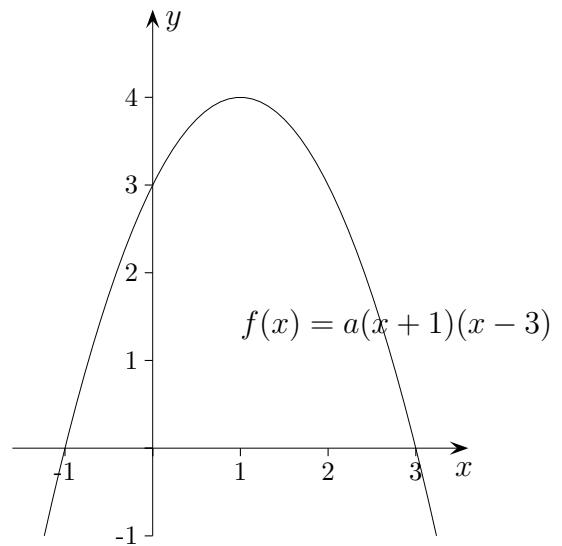
←

Gleichung einer Parabel

- a) achsensymmetrisch
- b) Nullstellen x_1, x_2 gegeben
- c) GTR, $A(x_1 | y_1), B(x_2 | y_2), C(x_3 | y_3)$ gegeben

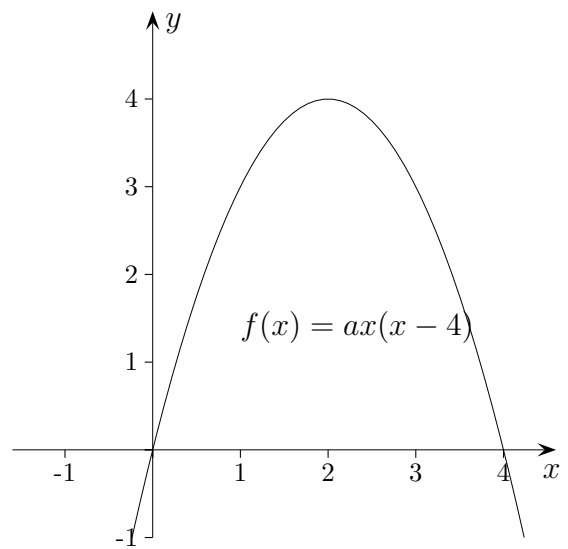
Ansatz $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

1 Punkt $A(x_1 | y_1)$ muss gegeben sein.



Hier ist a negativ.

←



Hier ist a negativ.

Gleichung einer Parabel

- a) achsensymmetrisch
- b) Nullstellen x_1, x_2 gegeben
- c) GTR, $A(x_1 | y_1), B(x_2 | y_2), C(x_3 | y_3)$ gegeben

Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen:

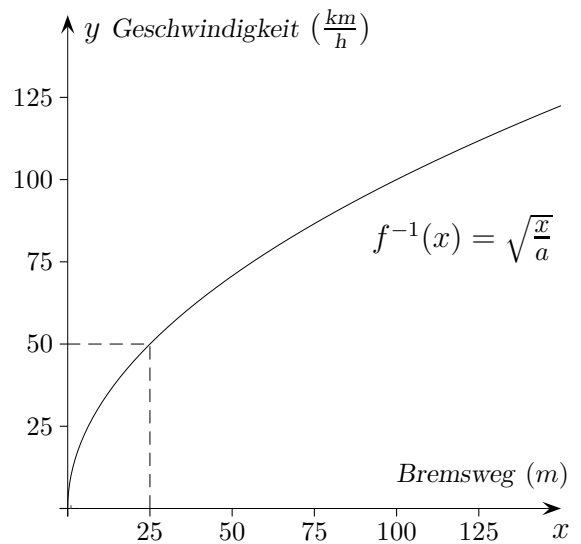
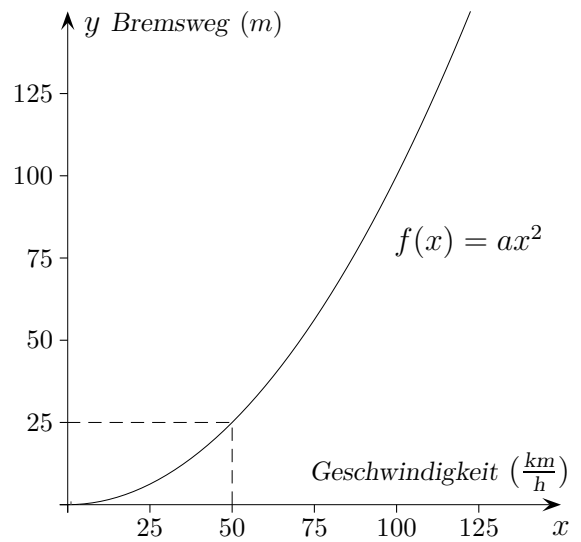
- 1. $f(x_1) = y_1$
- 2. $f(x_2) = y_2$
- 3. $f(x_3) = y_3$

Gleichungssystem mit GTR lösen oder quadratische Regression verwenden:

Mit STAT | EDIT x -Werte in L1 und y -Werte in L2 eingeben,
STAT | CALC 4:QuadReg aufrufen.

L1	L2
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

←



←

$f(x) = ax^2$, $x \geq 0$ Bei Parabeln muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden.

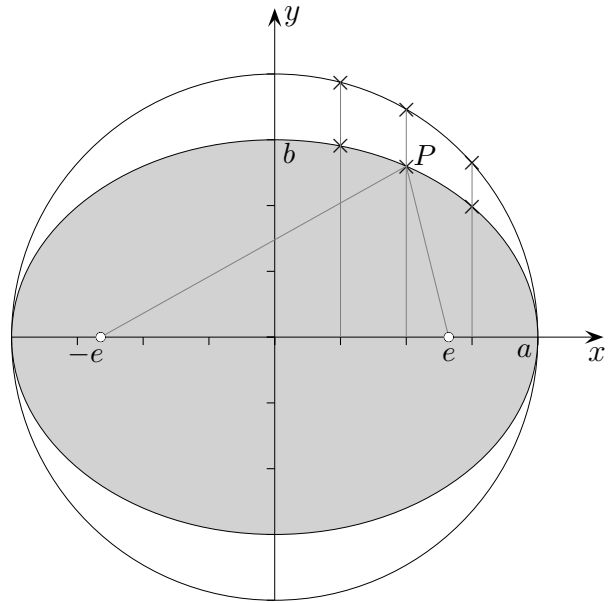
$$y = ax^2$$

$$x = ay^2 \quad \text{nach } y \text{ auflösen}$$

$$\frac{x}{a} = y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}}$$

Der Wertebereich von f wird zum Definitionsbereich von f^{-1}



Die Ellipse ist ein gestauchter Kreis.

Die Längen der Halbachsen sind a und b .

Aus der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

erhalten wir die Funktionsgleichung für den oberen/unteren Halbkreis:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Die y -Werte werden nun mit $\frac{b}{a}$ multipliziert.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir die Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für jeden Ellipsenpunkt $P(x | y)$ ist die Summe der Abstände zu den Brennpunkten $F_1(-e | 0)$ und $F_2(e | 0)$ konstant $2a$, $e^2 = a^2 - b^2$.

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a$$

Nach zweimaligem Isolieren der Wurzel, Quadrieren und

Abkürzen mit $b^2 = a^2 - e^2$ erhalten wir die Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

←

$$\begin{aligned}
3 - e^x &= \frac{2}{e^x} & | \cdot e^x \\
3e^x - e^{2x} &= 2 \\
u &= e^x \\
&\dots \\
u^2 - 3u + 2 &= 0 \\
&\dots \\
u_1 &= 1 \\
u_2 &= 2 \\
e^x = 1 &\implies x_1 = 0 \\
e^x = 2 &\implies x_2 = \ln(2)
\end{aligned}$$

←

$$\begin{aligned}
e^x - \frac{15}{e^x} &= 2 & | \cdot e^x \\
e^{2x} - 15 &= 2e^x \\
u &= e^x \\
&\dots \\
u^2 - 2u - 15 &= 0 \\
&\dots \\
u_1 &= 5 \\
u_2 &= -3 \\
e^x = 5 &\implies x_1 = \ln(5) \\
e^x = -3 &\implies \text{nicht lösbar}
\end{aligned}$$

$$f(x) = a(x - d)^2 + e$$
$$S(d | e)$$

$$f(x) = (x + 4)^2$$
$$\text{Min}(-4 | 0)$$

$$f(x) = (x - 3)^2 + 5$$
$$\text{Min}(3 | 5)$$

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 2$$
$$\text{Max}(-1 | 2)$$

Parabel ist nach unten geöffnet.

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$$
$$\text{Min}(1 | 3)$$

Parabel ist nach oben geöffnet.

←

