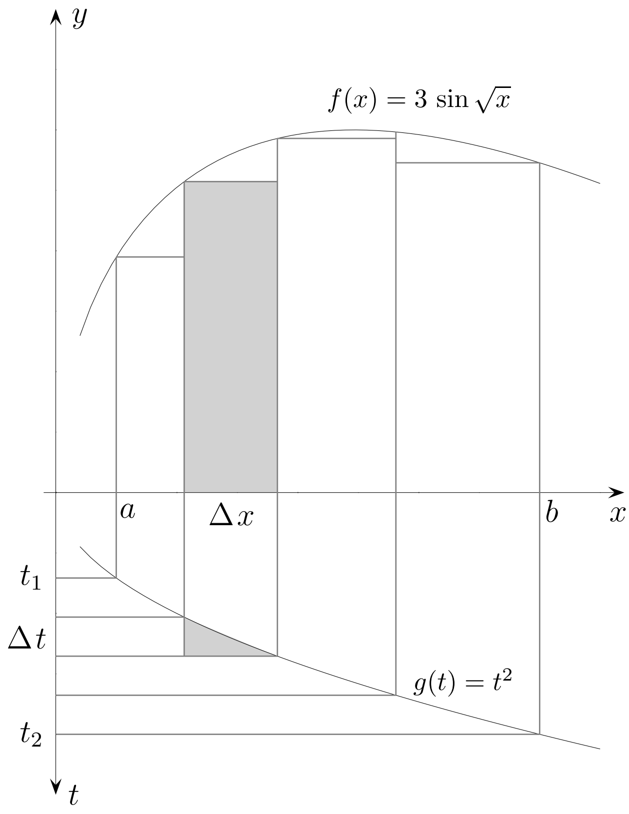
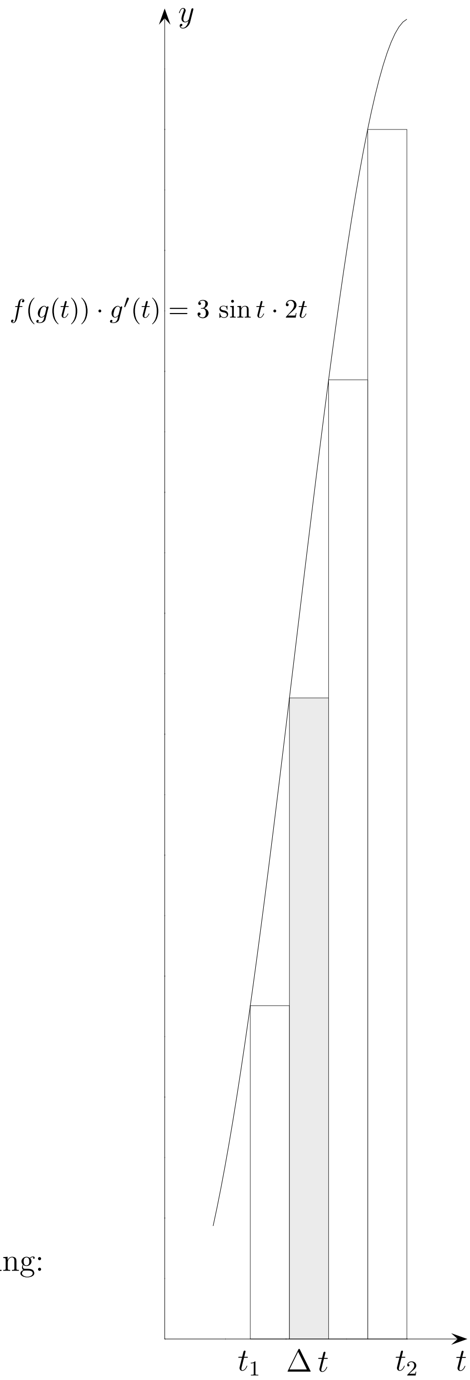
Integration von Funktionen in Parameterdarstellung





1. Begründe, dass gilt:

   a) $\Delta\,x \approx\; g'(t) \cdot \Delta\,t$

   b) Die Inhalte der schraffierten Flächen stimmen (fast) überein.

   c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

2. Gegeben ist von einer Funktion f eine Parameterdarstellung: $x(t),\;\; y(t)$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b y(x^{-1}(x))\,dx \;=\; \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

3. Die Integrationsregel unter 2. ist auch für geschlossene Kurven gültig. Erläutere dies.

4. Bestimme den Inhalt der Fläche, die die Kurve $x(t) = t^2,\;\; y(t) = \dfrac{t}{4}\,(4-t^2)$ (Parabola nodata) einschließt.

5. Gegeben sei eine Ellipse durch: $x(t) = a \cdot \cos t,\ y(t) = b \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

   $$A = \int_0^{2\pi} b \cdot \sin t \cdot (-a) \cdot \sin t \, dt \ = -ab \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \, dt \ = -\frac{1}{2}ab \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt \ = \ ... \ = -ab\pi$$

6. Liegt das Flächenstück, das von einer Kurve umschlossen wird, beim Umlaufen zur Rechten, so ergibt die Integration ein positives Ergebnis. (Erläuterung?)