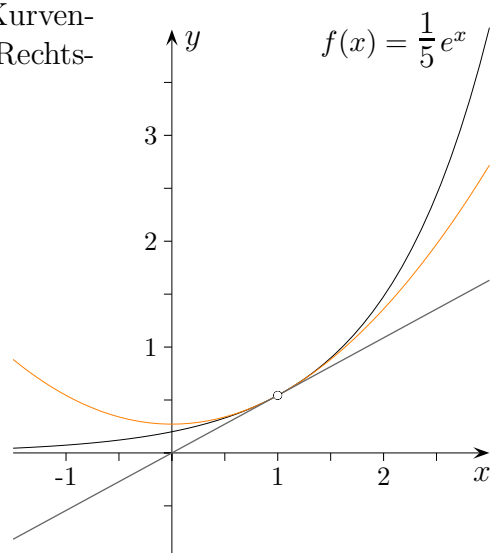


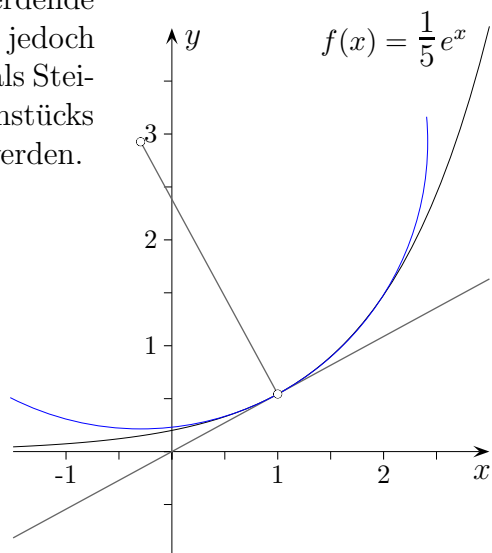
Krümmung

Die lineare Näherung von Funktionen durch Geraden (Tangenten) bildet die Grundlage der Differentialrechnung. Quadratische Näherungen durch Parabeln werden bei Reihenentwicklungen betrachtet. Durch die Approximation einer Funktion (genauer des Graphen) durch einen Kreis wird die Stärke der Krümmung in einem Kurvenpunkt erfasst und nicht nur die Art der Krümmung (Links-, Rechtskurve), wie es die 2. Ableitung ermöglicht.



Ein Kreis kann als Kurve mit konstanter Krümmung angesehen werden, da er mit einem gleichbleibenden Lenkradeinschlag befahren werden kann. Bei Trassierungsproblemen (Straßenbau) sind häufig stetige Krümmungsübergänge gefragt: Das Aneinanderfügen zweier Kreisbögen oder eines Kreisbogens und einer Geraden würde Autofahrer erschrecken.

Steigungsänderungen werden mit der 2. Ableitung erfasst. Jedoch können ihre Werte allein nicht die Stärke der Krümmung beschreiben: Für $f(x) = \frac{1}{5}e^x$ nimmt die Krümmung für größer werdende x -Werte offensichtlich ab, die Werte der 2. Ableitung nehmen jedoch zu. Beim Befahren der Kurve wird die Stärke der Krümmung als Steigungsänderung in Bezug auf die Länge des befahrenen Kurvenstücks empfunden. Die Bogenlänge muss daher mit berücksichtigt werden.



Krümmungsmaß

Die Krümmung von Kreisen wird umso kleiner, je mehr ihr Radius r zunimmt. Es erscheint daher sinnvoll, die Stärke der Krümmung mit $\kappa = \frac{1}{r}$ zu beschreiben, wobei der griechische Buchstabe κ an Krümmung erinnern soll. Diese Definition kann auf beliebige Kurven übertragen werden, wobei dann r der Radius des Krümmungskreises ist.

Der Quotient $\frac{1}{r}$ kann bei Kreisen anschaulich interpretiert werden.

Aufg.

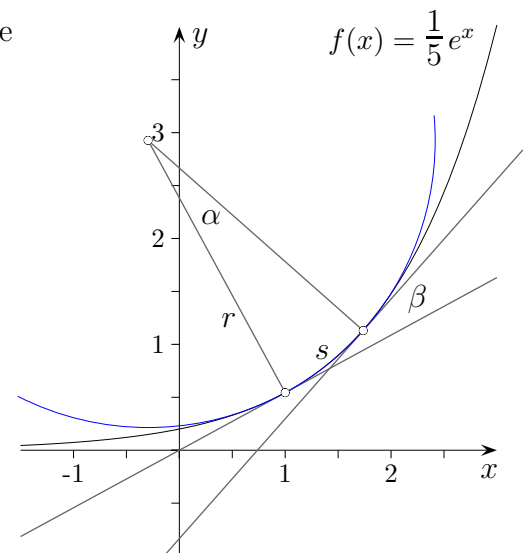
Zeige, dass gilt: $\alpha = \beta$.

Tipp: Die Schenkel der Winkel stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Bewegt man sich längs des Kreisbogens s , so nimmt der Winkel, den die Kreistangente mit der x -Achse einschließt, um β zu.

Nun gilt: $s = r \cdot \alpha \iff \alpha = \frac{1}{r} s$ (α im Bogenmaß)

Die Zunahme des Winkels ist daher proportional zur Länge des Kreisbogens.



Auf der nächsten Seite wird der Radius des Krümmungskreises bestimmt, es gilt:

$$r = \left| \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}{f''(x_0)} \right|$$

Für Extrema mit $f'(x_0) = 0$ ist die Formel besonders einfach. κ mit $f''(x_0) = 0$ schließt Geraden mit der Krümmung null ein.

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

Krümmungskreis

Um den Mittelpunkt und den Radius eines Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert. Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(x_0) = f(x_0), \quad k'(x_0) = f'(x_0), \quad k''(x_0) = f''(x_0) \quad (1)$$

Ist $M(x_m | y_m)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt:

$$(x - x_m)^2 + (k(x) - y_m)^2 = r^2 \quad (2)$$

Lösungsidee:

Zweimaliges implizites Differenzieren von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r .

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$(x - x_m) + (k(x) - y_m) \cdot k'(x) = 0 \quad (3)$$

und mit der Produktregel:

$$1 + (k'(x))^2 + (k(x) - y_m) \cdot k''(x) = 0 \quad (4)$$

Beachten wir nun (1), so erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen:

$$(x_0 - x_m) + (f(x_0) - y_m) \cdot f'(x_0) = 0 \quad (5)$$

$$1 + (f'(x_0))^2 + (f(x_0) - y_m) \cdot f''(x_0) = 0 \quad (6)$$

(6) umgestellt ergibt:

$$y_m = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \quad (7)$$

und (7) in (5) eingesetzt:

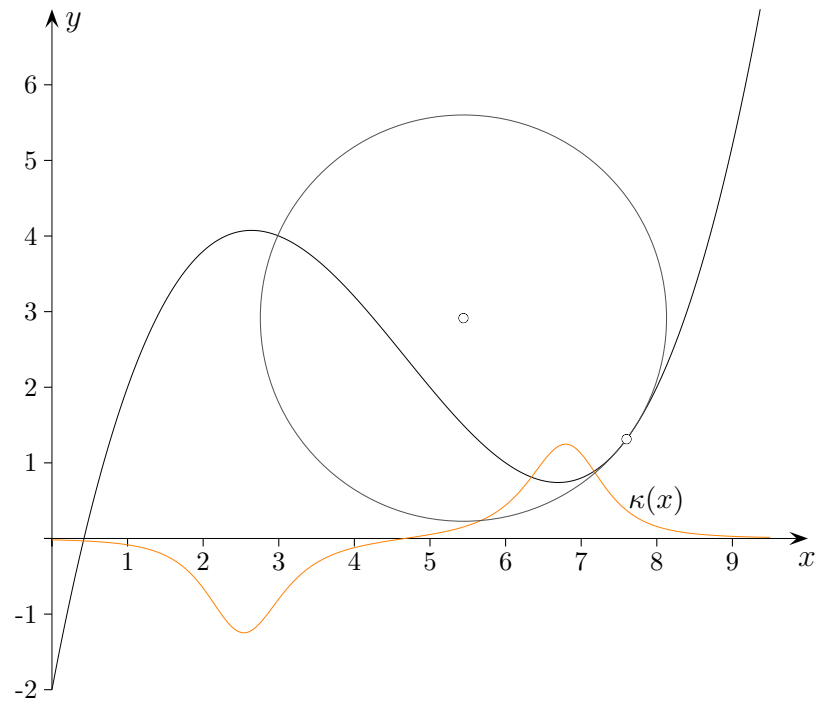
$$x_m = x_0 - \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \quad (8)$$

Für den Radius r gilt:

$$r^2 = (x_0 - x_m)^2 + (f(x_0) - y_m)^2 = \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \right)^2 + \left(\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \right)^2$$
$$r = \left| \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}{f''(x_0)} \right| \quad (9)$$

und damit für die Krümmung an der Stelle x_0 :

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}} \quad \text{kurz:} \quad \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{1,5}} \quad (10)$$



Krümmung und 2. Ableitung

Krümmung an der Stelle x_0 :

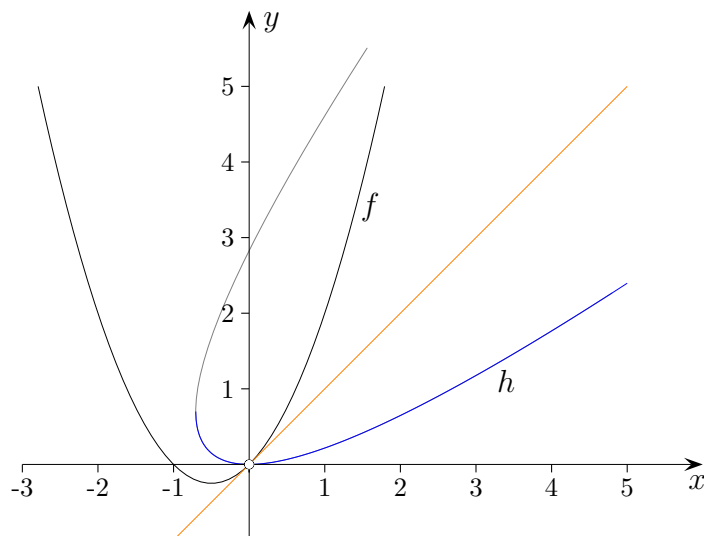
$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{1,5}}$$

Offensichtlich sind Krümmung und 2. Ableitung nicht dasselbe.

Übereinstimmung liegt jedoch vor, falls $f'(x_0) = 0$ ist, wie z.B. bei Parabeln $f(x) = ax^2$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Um die Krümmungen zweier Graphen mithilfe der 2. Ableitung in zwei Punkten zu vergleichen, müsste man die Graphen so drehen, dass die Tangenten in den Punkten waagerecht verlaufen. Dann würde die 2. Ableitung der gedrehten Graphen genau die Krümmung ergeben. Der Drehwinkel wird durch die 1. Ableitung festgelegt. Daher ist es plausibel, dass $f'(x_0)$ in der Formel auftaucht.

Zum Vergleich zweier Krümmungen müssen die 1. Ableitungen nicht unbedingt null sein, es reicht aus, wenn sie gleich sind. Stimmen daher Graphen an einer Stelle jeweils in den ersten beiden Ableitungen überein, so ist deren Krümmung an dieser Stelle gleich, auch wenn sie nicht direkt aus der zweiten Ableitung abgelesen werden kann.

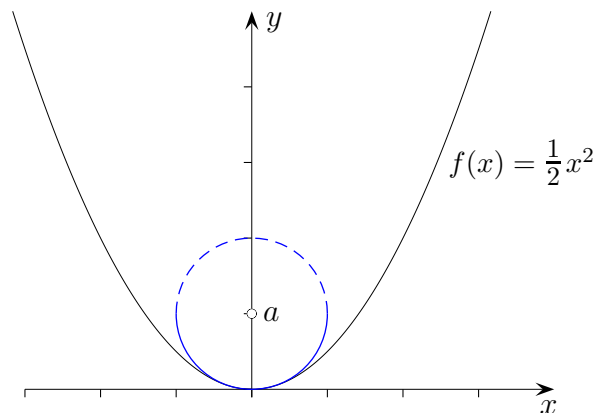


Die Krümmung von $f(x) = x^2 + x$ an der Stelle $x = 0$ ist die 2. Ableitung von $h(x) = \sqrt{2} + x - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}x}$ an dieser Stelle, nämlich $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2^{1,5}}$.

Die Grafik soll das Gesagte veranschaulichen.

Die Ermittlung von h liegt aber außerhalb des schulischen Bereichs.

Krümmungskreis im Scheitel einer Parabel



Um den Mittelpunkt und den Radius des Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P(0 | 0)$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert.

Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(0) = f(0) = 0, \quad k'(0) = f'(0) = 0, \quad k''(0) = f''(0) = 1 \quad (1)$$

Ist $M(0 | a)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt:

$$x^2 + (a - k(x))^2 = r^2 \quad (2)$$

Lösungsidee:

Zweimaliges Differenzieren beider Seiten von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r .

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$2x - 2(a - k(x)) \cdot k'(x) = 0 \quad (3)$$

und mit der Produktregel (vorher durch 2 geteilt):

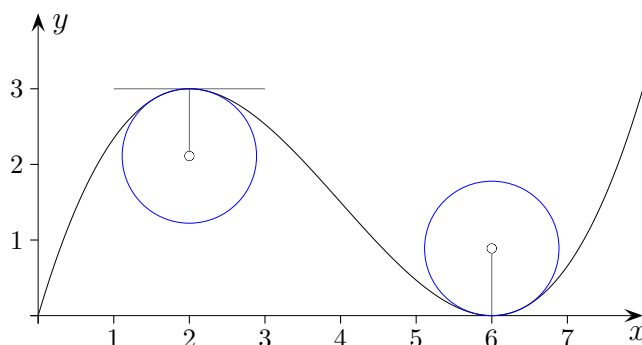
$$1 + (k'(x))^2 - (a - k(x)) \cdot k''(x) = 0 \quad (4)$$

Mit (1) erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$1 - a = 0, \quad r = 1, \quad M(0 | 1)$$

Für den Krümmungskreis der Parabel $f(x) = kx^2$, $k > 0$, gilt: $r = \frac{1}{2k}$ ($f''(0) = 2k$), $M(0 | r)$

Krümmungskreis an einer Stelle mit $f'(x_0) = 0$



Um den Mittelpunkt und den Radius eines Krümmungskreises zu bestimmen, betrachten wir einen Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ auf dem Graphen von f und suchen eine Funktion $k(x)$ des Halbkreises, der den Graphen von f bestmöglich approximiert. Hierbei reicht es wie sich zeigen wird aus, folgende Übereinstimmungen zu fordern:

$$k(x_0) = f(x_0), \quad k'(x_0) = f'(x_0) = 0, \quad k''(x_0) = f''(x_0) \quad (1)$$

Ist $M(x_m | y_m)$ der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so gilt ($x_m = x_0$):

$$(x - x_0)^2 + (k(x) - y_m)^2 = r^2 \quad (2)$$

Lösungsidee:

Zweimaliges Differenzieren beider Seiten von (2) und Ersetzen gemäß (1) liefert M und r .

Mit der Kettenregel erhalten wir zunächst:

$$(x - x_0) + (k(x) - y_m) \cdot k'(x) = 0 \quad (3)$$

und mit der Produktregel:

$$1 + (k'(x))^2 + (k(x) - y_m) \cdot k''(x) = 0 \quad (4)$$

Mit (1) erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$1 + (f(x_0) - y_m) \cdot f''(x_0) = 0 \quad (5)$$

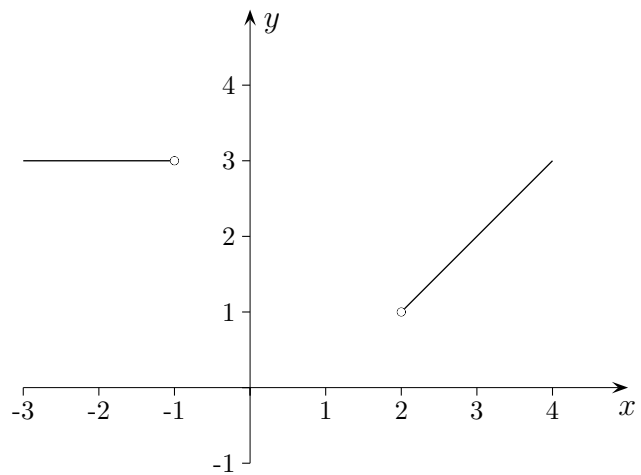
(5) umgestellt ergibt:

$$y_m = f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)} \quad (7)$$

Für den Radius r gilt: $r^2 = (f(x_0) - y_m)^2, \quad r = \left| \frac{1}{f''(x_0)} \right| \quad (9)$

Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A(-3 | 3) B(-1 | 3)$ soll mit der Strecke $B(2 | 1) C(4 | 3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Krümmung, Aufgabe

Die Strecke $A(-3 | 3) B(-1 | 3)$ soll mit der Strecke $B(2 | 1) C(4 | 3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.

Die vier Bedingungen

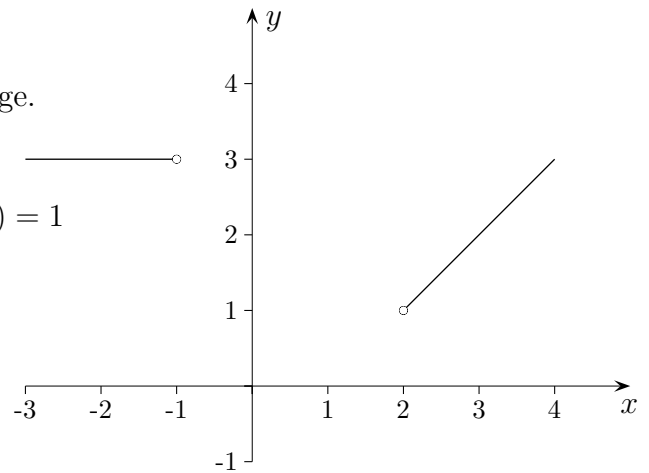
$$f(-1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(2) = 1$$

führen mit dem Ansatz:

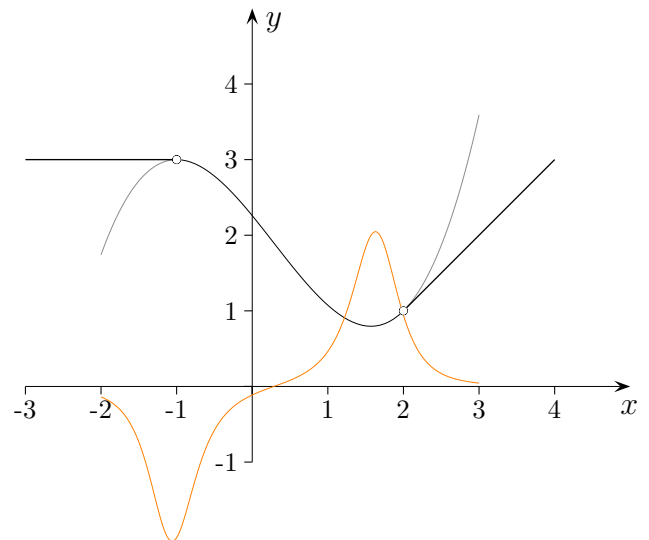
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{27} (7x^3 - 6x^2 - 33x + 61)$$



An der eingezeichneten Krümmungskurve sind die Krümmungssprünge an den Nahtstellen ablesbar.



Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

$$f''(-1) = 0, \quad f''(2) = 0$$

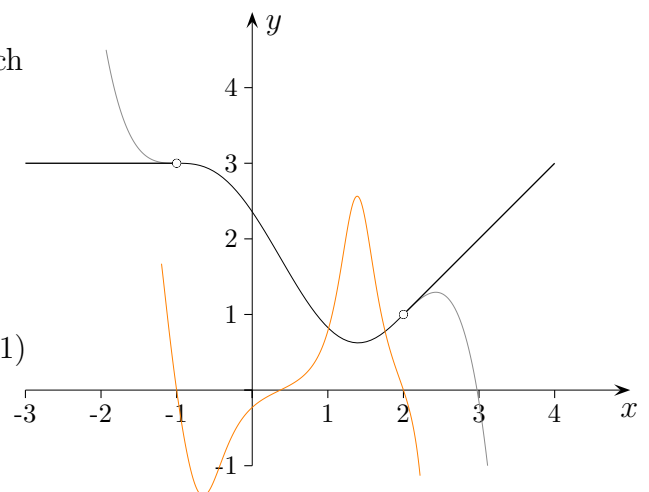
gefordert werden.

Mit dem Ansatz:

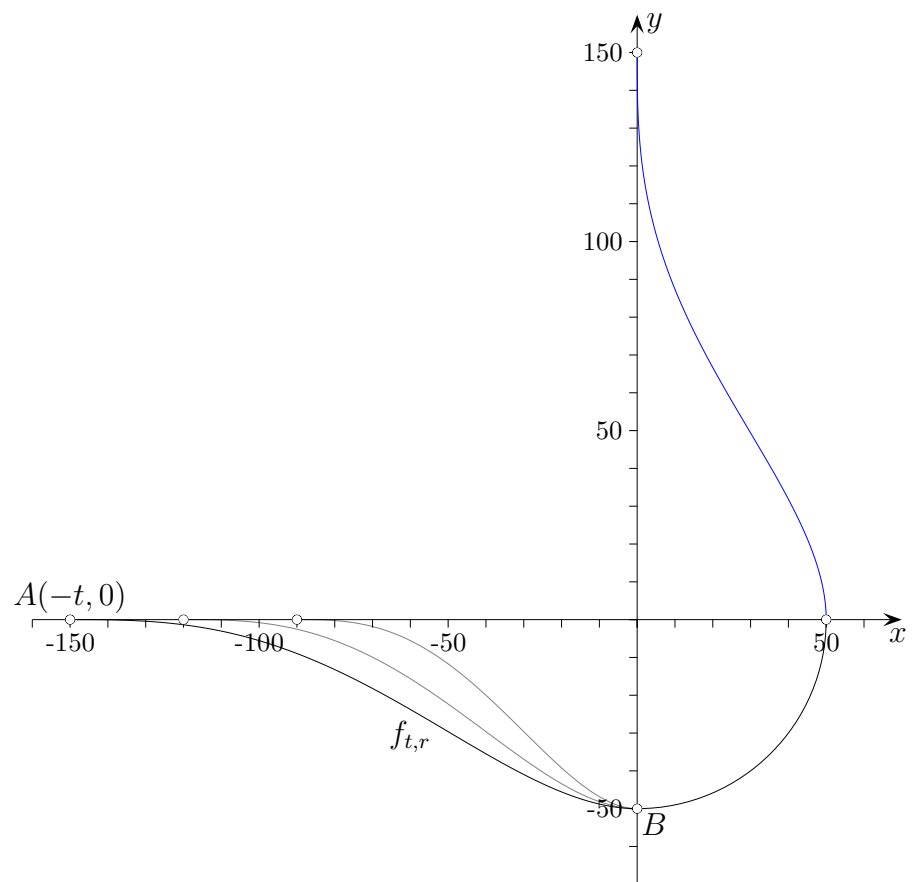
$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

erhalten wir die Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{81} (7x^5 - 16x^4 - 38x^3 + 52x^2 + 119x - 191)$$



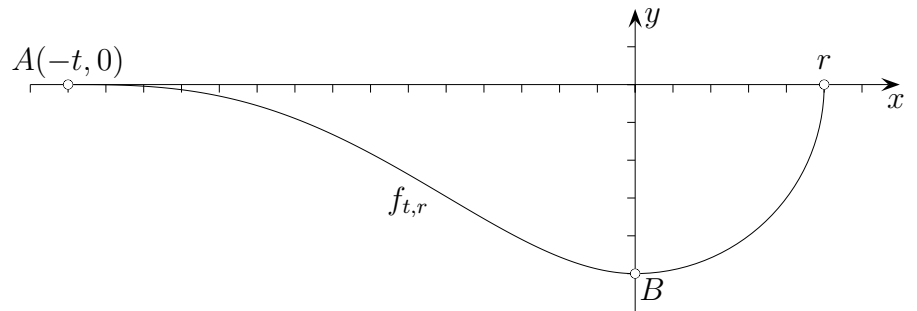
Trassierung eines Autobahnkreuzes



Die Grafik beschreibt die Linksabbiegung in einem Autobahn-Kreuz.
Der mittlere Teil der Trasse ist ein Viertelkreis mit Radius r ist.

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion $f_{t,r}$ auf dem Intervall $[-t, 0]$,
deren Übergang zur x -Achse in A knick- und krümmungssprungfrei ist
und in B knickfrei an den Viertelkreis anschließt.

Das Trassenstück im 1. Quadranten ergibt sich durch Spiegelung an der Geraden $y = -x$,
es wird nicht weiter betrachtet.



Modellierung: f statt $f_{t,r}$

1. $f(-t) = 0$
2. $f'(-t) = 0$
3. $f''(-t) = 0$
4. $f(0) = -r$
5. $f'(0) = 0$

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

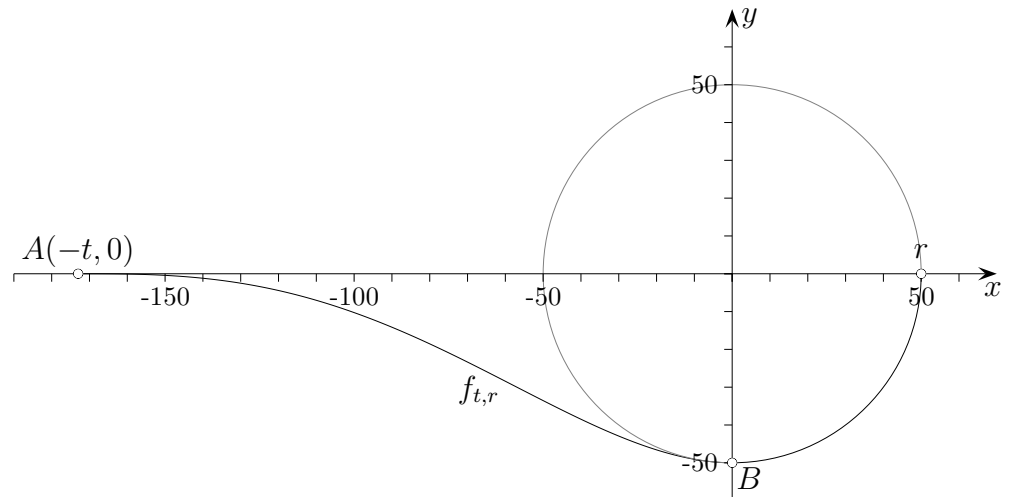
Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} at^4 - bt^3 + ct^2 - dt + e &= 0 \\ -4at^3 + 3bt^2 - 2ct + d &= 0 \\ 12at^2 - 6bt + 2c &= 0 \\ e &= -r \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet (CAS):

$$f(x) = \frac{3r}{t^4}x^4 + \frac{8r}{t^3}x^3 + \frac{6r}{t^2}x^2 - r, \quad -t \leq x \leq 0, \quad r, t > 0$$

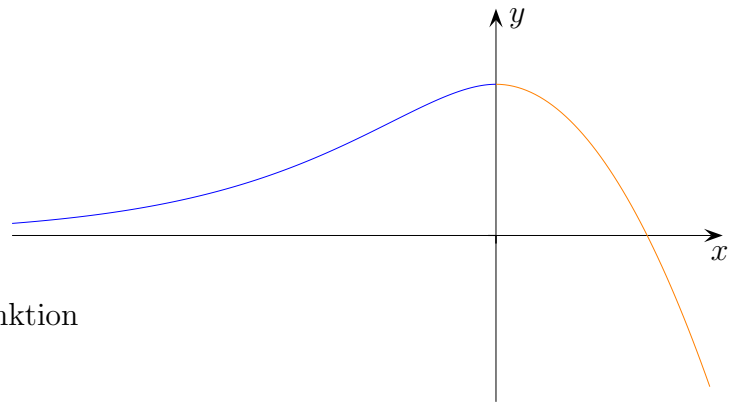
Gesucht ist eine Bedingung für r und t , so dass der Übergang in B krümmungsruckfrei ist.



Der Viertelkreis hat die Funktionsgleichung $k(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$.
 Die Krümmung beträgt $k''(0) = \frac{1}{r}$. Die Bedingung lautet:

$$f''(0) = \frac{1}{r} \iff \frac{12r}{t^2} = \frac{1}{r} \stackrel{r,t>0}{\iff} t = \sqrt{12} \cdot r$$

Für $r = 50$ erhalten wir $t \approx 173$.



Wie sind k und a zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - ke^{2x} & x \leq 0 \\ -ax^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

eine 2. Ableitung besitzt?

Wie sind k und a zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - ke^{2x} & x \leq 0 \\ -ax^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

eine 2. Ableitung besitzt?

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq 0 \\ f_2(x) & x > 0 \end{cases}$$

Stetigkeit muss an der Stelle $x = 0$ vorliegen.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0) \\ 2 - k &= 1 \quad \implies \quad k = 1 \end{aligned}$$

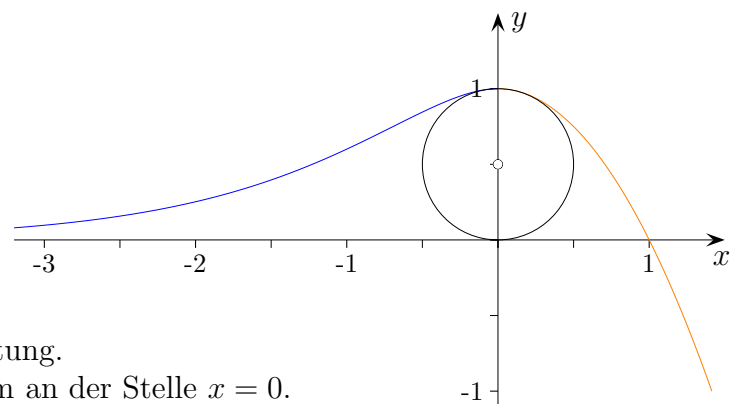
Differenzierbarkeit ($k = 1$)

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2e^x - 2e^{2x} \\ f_2'(x) &= -2ax \\ f_1'(0) &= f_2'(0) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

f ist für $k = 1$ differenzierbar.

2. Ableitung ($k = 1$)

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= 2e^x - 4e^{2x} \\ f_2''(x) &= -2a \\ f_1''(0) &= f_2''(0) \\ -2 &= -2a \quad \implies \quad a = 1 \end{aligned}$$



f besitzt für $k = 1$ und $a = 1$ eine 2. Ableitung.

Aus der Rechnung ergibt sich ein Maximum an der Stelle $x = 0$.

Der Krümmungskreis an dieser Stelle hat den Radius $r = \left| \frac{1}{f''(0)} \right| = \frac{1}{2}$.

Der Mittelpunkt muss $(0 \mid \frac{1}{2})$ sein.

