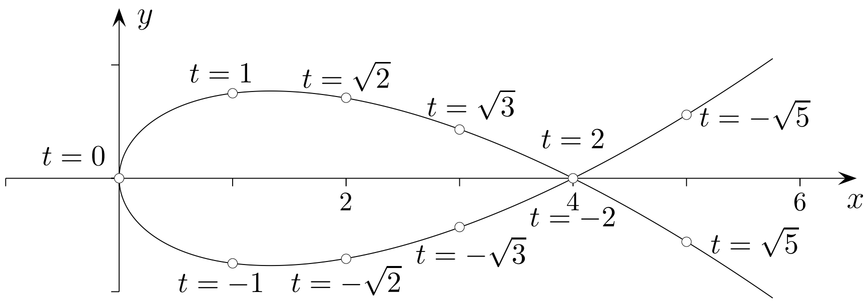
Kurven in Parameterdarstellung

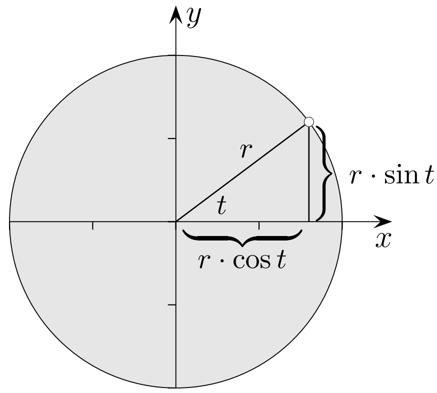
1. Gegeben ist die Kurve $x(t) = t^2,\ \ y(t) = \dfrac{t}{4}\,(4 - t^2),\ \ -\infty < t < \infty$ (Parabola nodata)



2. Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius r:

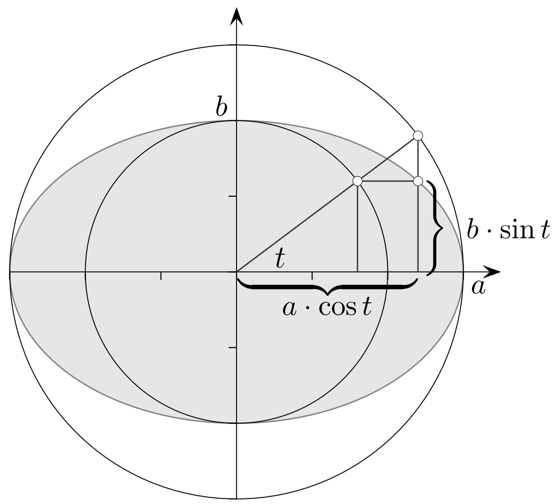
   $x(t) = r \cdot \cos t,\ \ y(t) = r \cdot \sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

   Durch Quadrieren kann der Parameter t eliminiert werden, wir erhalten die Relation: $x^2 + y^2 = r^2$



3. Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b: $x(t) = a \cdot \cos t,\ \ y(t) = b \cdot \sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

   Durch Quadrieren kann der Parameter t eliminiert werden, wir erhalten die Relation: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



   Maple: plot([3*sin(t), 2*cos(t), t = 0 .. 6]);

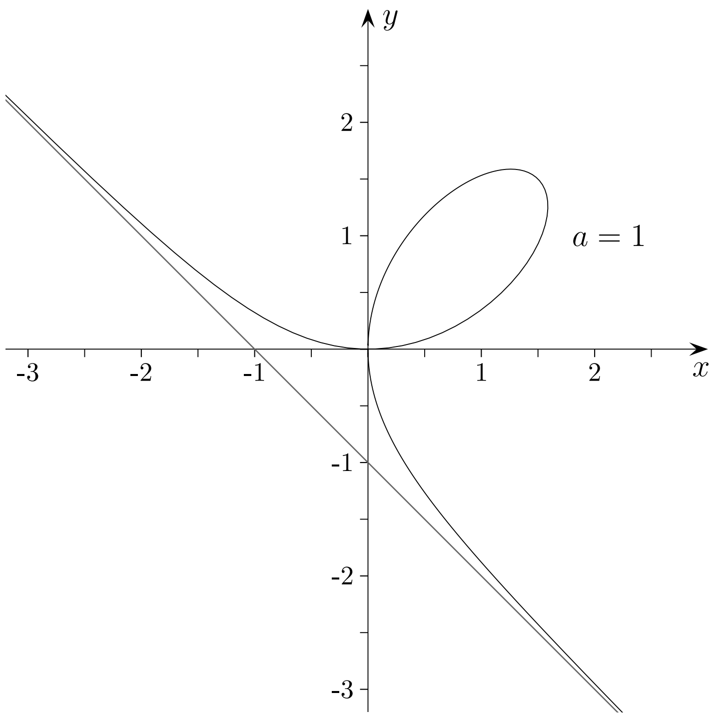
   dreidimensional:
   with(plots):
   spacecurve([sin(3*t), cos(5*t), t], t = 0 .. 10, numpoints = 500, axes = boxed);
   (Siehe dir diese Kurve auch von oben an.)

4. Suche eine Parameterdarstellung für eine Spirale, auch in Schneckenform, und einer dreidimensionalen Schraubenlinie.

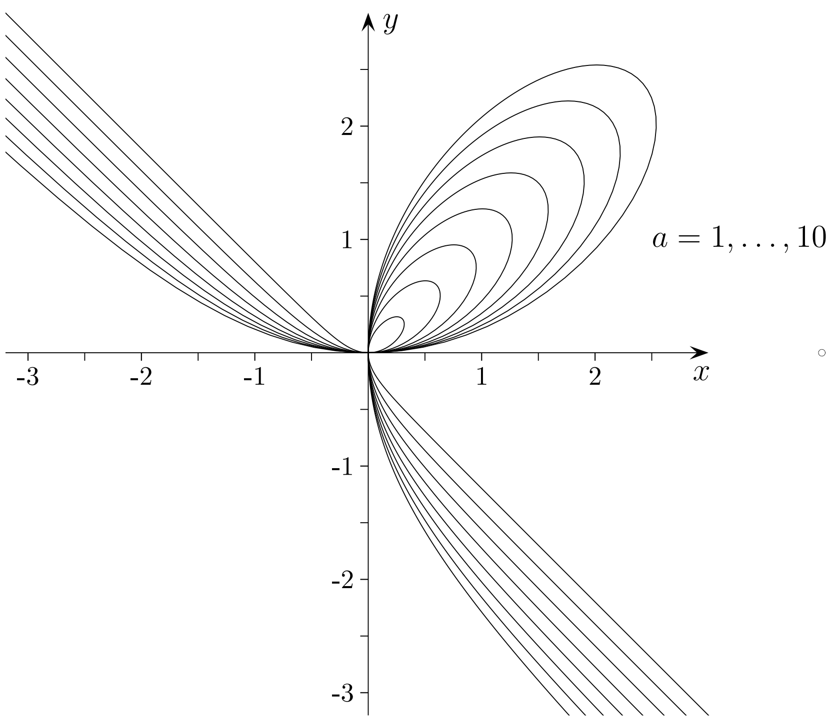
Kartesisches Blatt

$x^3 + y^3 = 3axy$ beschreibt für $a > 0$ die Gleichung einer Kurve.

Eine Parameterdarstellung lautet (überprüfe dies): $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

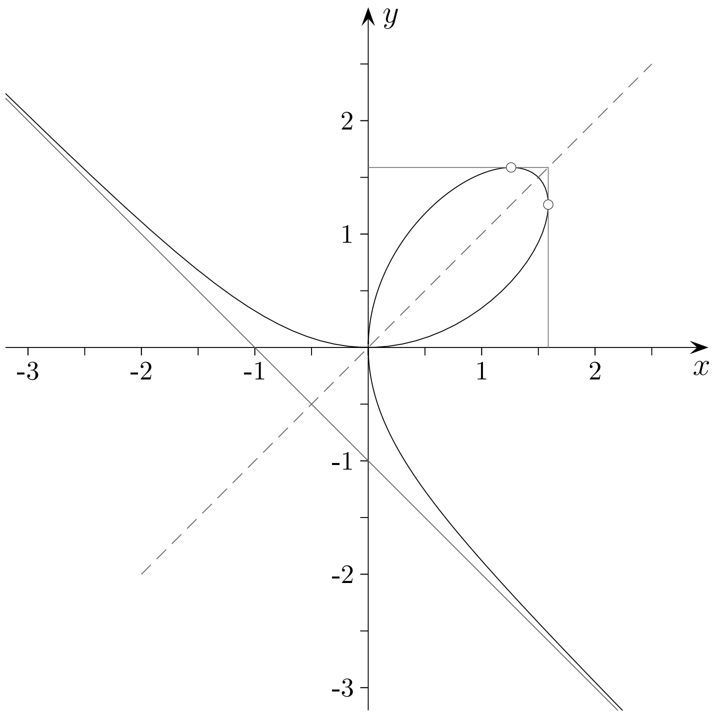


$-100 \le t \le 100$



Blatt des Descartes

Wenn die Variablen x und y miteinander vertauscht werden, geht die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ in sich über. Die Kurve ist daher zur Geraden $y = x$ symmetrisch.



Um den Kurvenpunkt mit waagerechte Tangente zu ermitteln, stellen wir uns vor, wir hätten eine Auflösung der Form $y = f(x)$, also $x^3 + (f(x))^3 = 3x\,f(x)$.
Der Punkt mit senkrechter Tangente ergibt sich aus der Symmetrie.
Alternativ wäre von $x = g(y)$ auszugehen.
Beide Seiten können nach der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden:
$3x^2 + 3(f(x))^2(f(x))' = 3f(x) + 3x(f(x))'$, kürzer: $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$

Daraus folgt: $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$

Wir setzen $y = x^2$ in die Kurvengleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ ein und erhalten $x^3(x^3 - 2) = 0$.
Unter Berücksichtigung von $y^2 - x \neq 0$ (dies wäre für $O(0 \mid 0)$ nicht erfüllt) ergibt das den Punkt $P\big(\sqrt[3]{2} \mid \sqrt[3]{4}\big)$.

Mit der Parameterdarstellung kann die Asymptote $y = -x - 1$ bestätigt werden.
Zu zeigen ist hierzu (l´Hospital):

$$\lim_{t\to-1} \Big(\frac{3t^2}{1+t^3} - \big[-\frac{3t}{1+t^3} - 1 \big] \Big) = 0$$

Blatt des Descartes

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$