Quantoren

Mathematiker bedienen sich einer bedeutungsschweren Symbolik, um komplexe mathematische Sachverhalte übersichtlich erfassen zu können (und nicht nur um Erstsemestler zu verschrecken). An die Bedeutung des Integralzeichens sei hier erinnert. Aber auch einfachere Formulierungen werden symbolisch erfasst:
Es gibt (mindestens) ein n_0 aus $\mathbb{N}$ für das die Aussageform $A(n)$ mit eingesetztem n_0 wahr ist, kann mit einem sogenannten Existenzquantor abgekürzt geschrieben werden:

$$\underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} A(n) \qquad \text{oder} \qquad \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} A(n)$$

Für alle n aus $\mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr, wird mit dem Allquantor abgekürzt: $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} A(n)$

Die Negation kann leicht gebildet werden:

$$\neg \Big(\underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} A(n) \Big) \iff \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \neg A(n) \qquad \text{und} \qquad \neg \Big(\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} A(n) \Big) \iff \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \neg A(n)$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (strebt gegen) den Grenzwert a, geschrieben $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$, falls gilt

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq n_0}{\forall} \ |\, a_n - a \,| < \varepsilon \qquad \text{oder in anderer Schreibweise:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \Big(n \geq n_0 \implies |\, a_n - a \,| < \varepsilon \Big)$$

In Worten:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0 (ein Index), so dass für alle nachfolgenden Indizes gilt $|\, a_n - a \,| < \varepsilon$, d. h. die Glieder a_n unterscheiden sich für $n > n_0$ von a um weniger als ε.
Anschaulich: Bei der Berechnung der Folgenglieder einer konvergenten Folge (mit einem Computer) bleiben immer mehr Dezimalstellen stabil.

Die Negation, d. h. die Folge konvergiert nicht gegen den Wert a, lautet ($\neg$ bedeutet: $\neg \big(\ \ldots \ \big)$):

$$\neg \ \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq n_0}{\forall} \ |\, a_n - a \,| < \varepsilon \iff$$

$$\underset{\varepsilon_0 > 0}{\exists} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \ \underset{m \geq n}{\exists} \ |\, a_m - a \,| \geq \varepsilon_0$$

Das Negationszeichen wandert von links nach rechts und kehrt die Quantoren um.
Es sollen noch zwei weitere exakte Definitionen folgen:

Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Hiermit gleichwertig ist (der Definitionsbereich sei $\mathbb{R}$):

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta > 0}{\exists} \ \underset{|\, x - x_0 \,| < \delta}{\forall} \ |\, f(x) - f(x_0) \,| < \varepsilon$$

Aufg. Was sagt das Folgende über eine Funktion f und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus?

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq n_0}{\forall} \ \underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \ |\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$$

Negation

Formuliere die negierte Aussage.

a) Heute morgen erschienen alle Lehrer pünktlich zum Unterricht.

b) Alle Schüler der 8a kennen alle englischen Vokabeln der 5. Lektion.

c) Ein Schüler der 10c hat alle gestellten Mathematik-Aufgaben gelöst.

d) Alle Engländer sind Royalisten.

e) Auf jeden Topf passt ein Deckel.

Die konträre Aussage zu a) lautet:
Heute morgen erschien kein Lehrer pünktlich zum Unterricht.
Beides, a) und konträre Aussage, kann falsch sein.
Daher ist die konträre Aussage keine Negation.
Die Negation einer wahren Aussage ist falsch, und umgekehrt.

Bei Aussagen wie:

Alle Deutschen ... .

Alle Engländer ... .

Alle Türken ... .

handelt es sich meistens um statistische Aussagen (oder Vorurteile).

Die Negation ist dann nicht:

Es gibt einen Deutschen ... .

Es gibt einen Engländer ... .

Es gibt einen Türken ... .

Statistische Aussagen sollten einen (prozentualen) Anteilswert enthalten,
damit eine Negation möglich ist.

Höchstens 15 % der Deutschen ... .

Mindestens 90 % der Engländer ... .

Mindestens 60 % der Türken ... .

Widerlege oder beweise:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,\big(\,n \text{ ist gerade und } \sqrt{n} \in \mathbb{N}\big) \implies \sqrt{n} \text{ ist gerade}$$

Beweise:

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n \text{ ist gerade und } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \right) \implies \sqrt{n} \;\text{ ist gerade}$$

Tipps:

a ist gerade $\iff$ a^2 ist gerade

Um $A \Rightarrow B$ nachzuweisen, kann die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen werden.