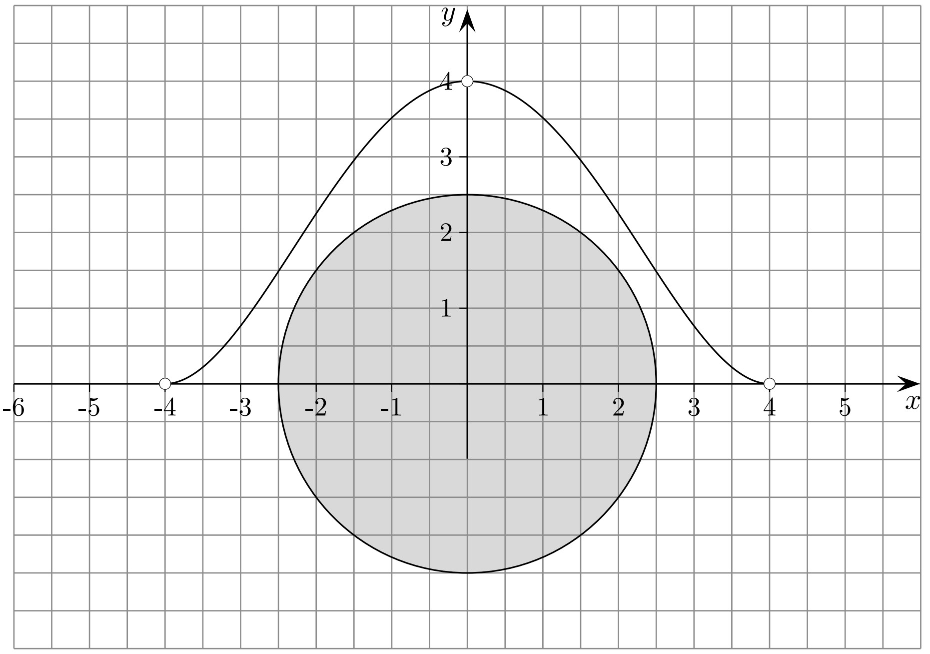
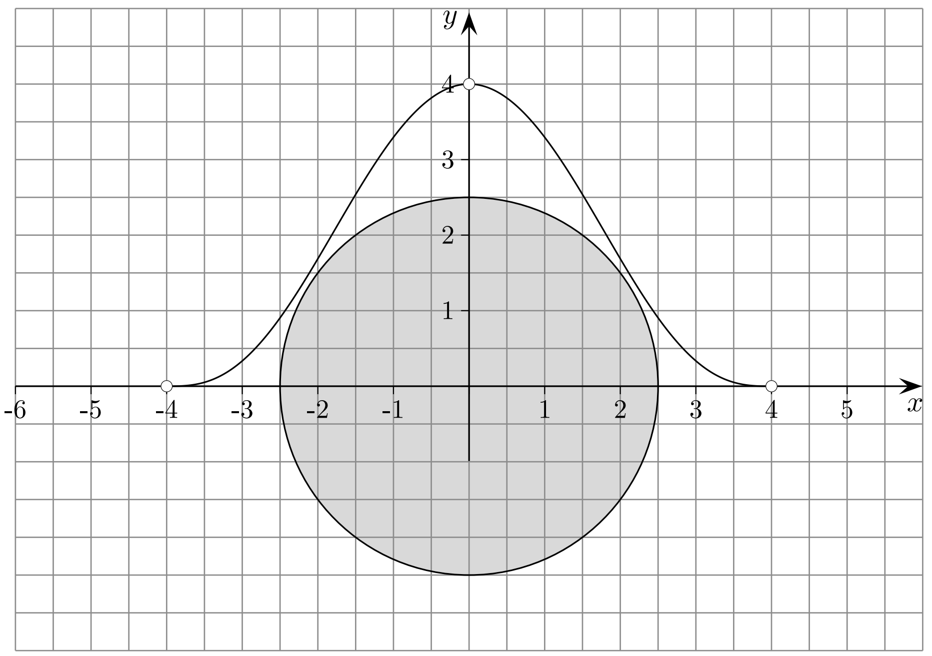
Trassierung



Modellieren Sie mit einem knickfreien Übergang den Verlauf einer Umgehungsstraße, die durch die eingezeichneten Punkte verlaufen soll (Angaben in km).
Ermitteln Sie den kürzesten Abstand zum Ortsrand.

Trassierung



Modellieren Sie mit einem krümmungsruckfreien Übergang den Verlauf einer Umgehungsstraße, die durch die eingezeichneten Punkte verlaufen soll (Angaben in km).
Ermitteln Sie den kürzesten Abstand zum Ortsrand.

Trassierung

Modellierung mit einem knickfreien Übergang:

1. $f(0) = 4$
2. $f(4) = 0$
3. $f'(4) = 0$

   Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

   Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c &= 4 \\ 256a + 16b + c &= 0 \\ 256a + 8b &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet:

$f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

$d_{\text{min}} = 0{,}405$

Modellierung mit einem krümmungsruckfreien Übergang:

zusätzliche Bedingung:

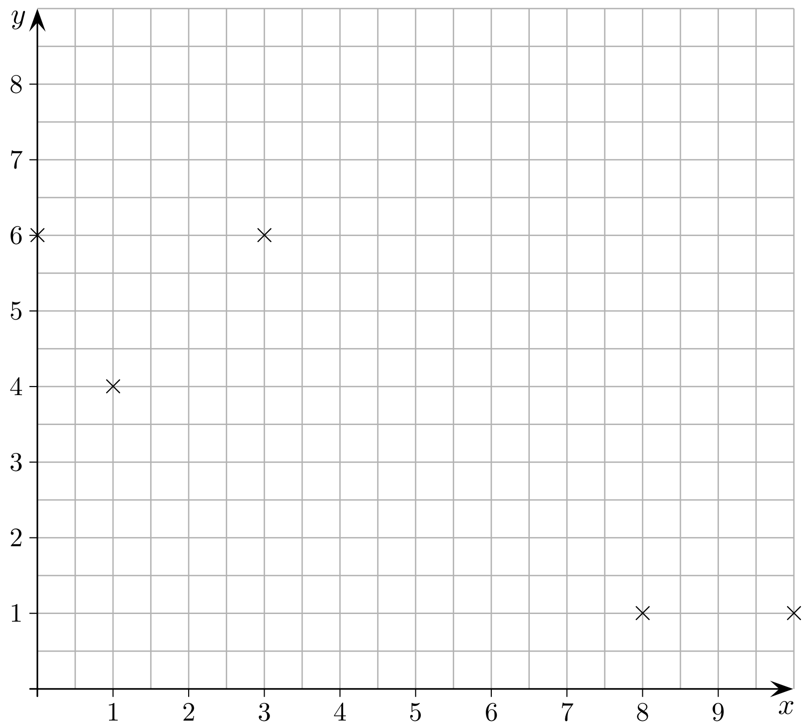
4. $f''(4) = 0$

Ansatz: $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$

$f(x) = -\frac{1}{1024}x^6 + \frac{3}{64}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 4$

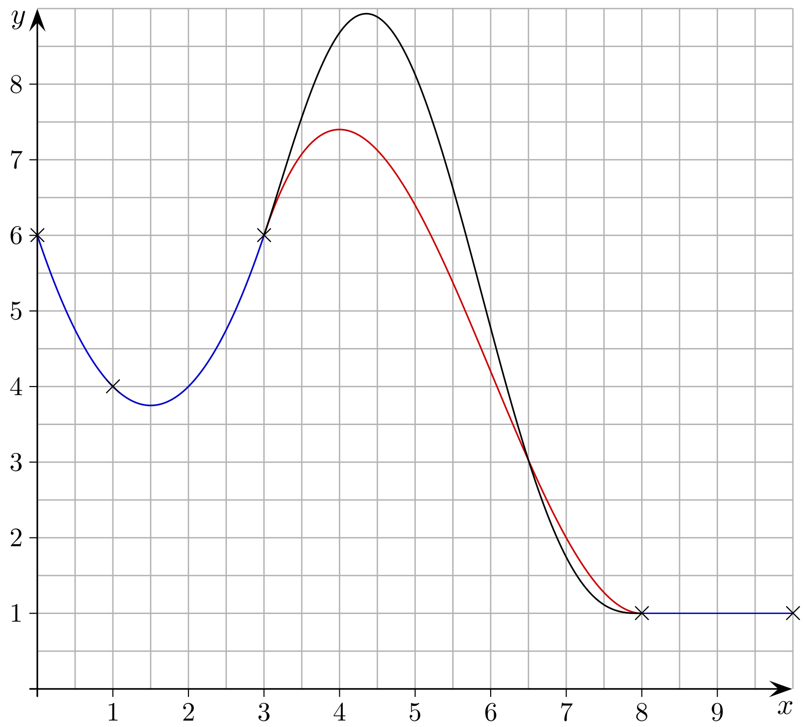
$d_{\text{min}} = 0{,}085$

Trassierung



Modellieren Sie mit knickfreien Übergängen den Verlauf einer Straße. Die ersten 3 Punkte sollen auf einer Parabel liegen, die letzten beiden auf einer Geraden. (Angaben in km).

Trassierung



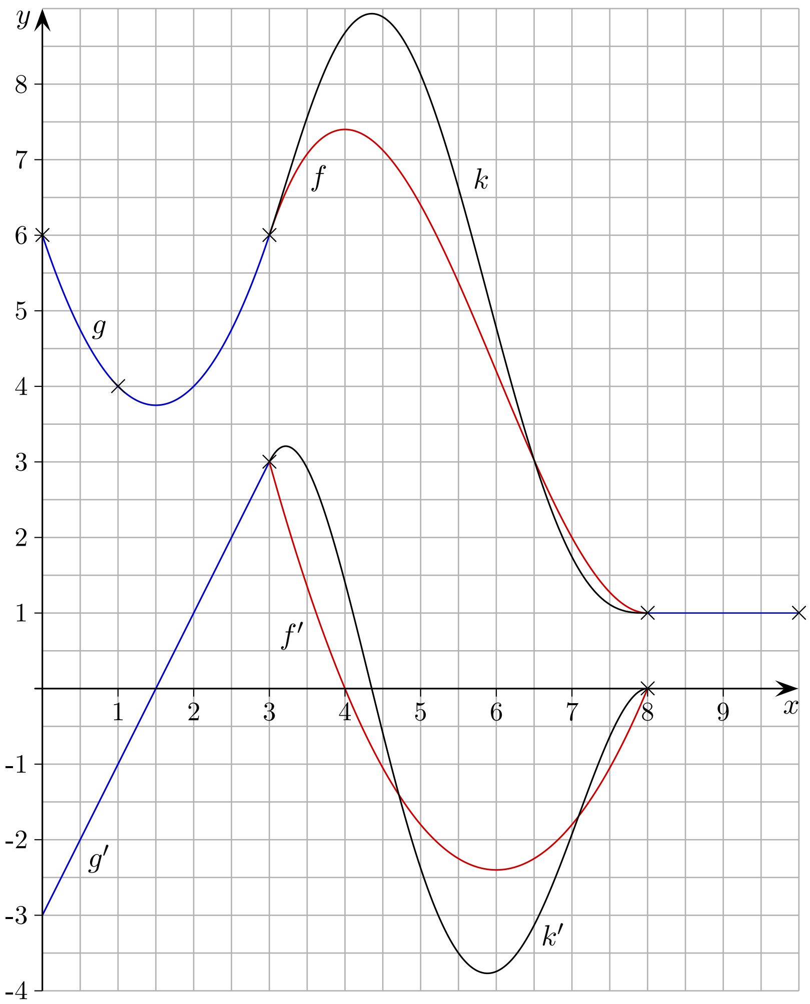
Modellierung mit knickfreien Übergängen:

Parabel $g(x) = x^2 - 3x + 6$

$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 18x^2 + 96x - 123x^2)$

Einer der beiden Graphen hat krümmungsruckfreie Übergänge. Welcher wird das wohl sein?

Trassierung



Modellierung mit knickfreien Übergängen:

Parabel $g(x) = x^2 - 3x + 6$

$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 18x^2 + 96x - 123x^2)$

Einer der beiden Graphen hat krümmungsruckfreie Übergänge. Welcher wird das wohl sein?

Trassierung

Zur Erinnerung:

Eine stetige Verbindung zweier stetiger Trassen f und g ist möglich,
wenn an der Verbindungsstelle x_0 die Bedingung

$f(x_0) = g(x_0)$ erfüllt ist (sprungfreier (nahtloser) Übergang).

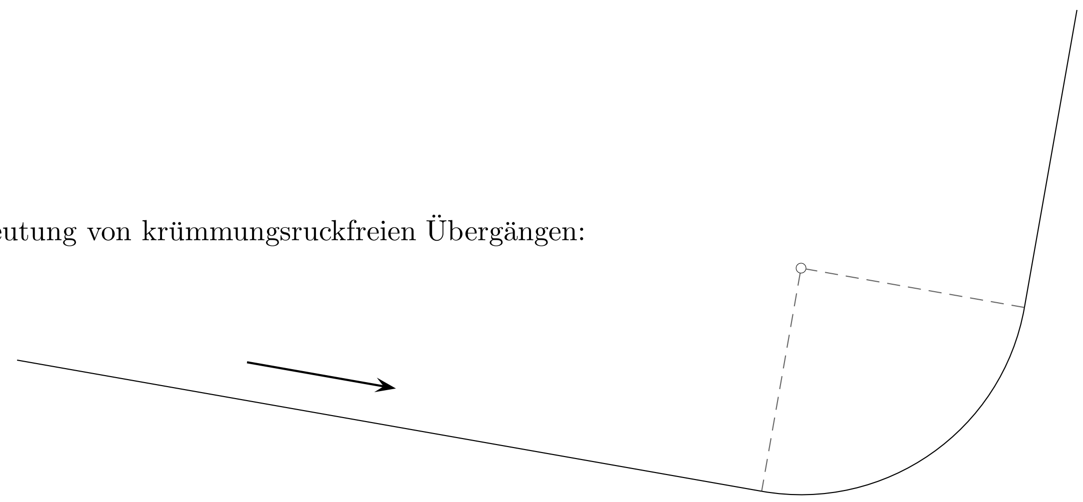
Für einen knickfreien (glatten) Übergang muss überdies gelten:

$f'(x_0) = g'(x_0)$

Für einen krümmungsruckfreien Übergang muss zudem gelten:

$f''(x_0) = g''(x_0)$

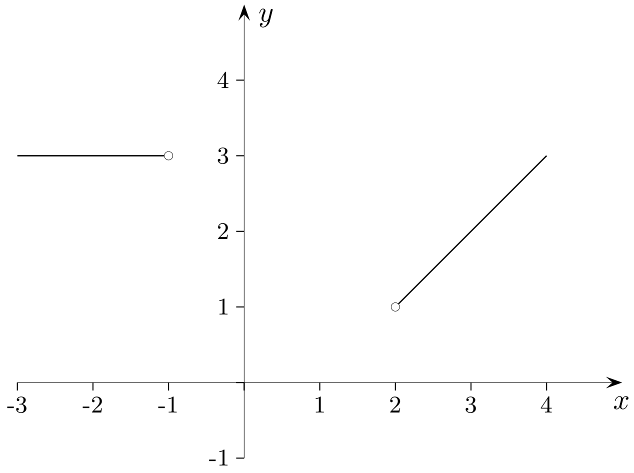
Zur Bedeutung von krümmungsruckfreien Übergängen:



Du fährst auf der Straße geradeaus mit der Geschwindigkeit v.
Vor dir befindet sich eine viertelkreisförmige Kurve mit dem Radius r.
Beim Übergang von der Geraden auf die Kreisbahn muss der notwendige Lenkradeinschlag innerhalb kürzester Zeit erfolgen. Es wirkt schlagartig eine Zentrifugalbeschleunigung $a = \frac{v^2}{r}$ auf das Fahrzeug und die Insassen. Da die Beschleunigung plötzlich kam, konnten die Insassen ihren Körper nicht darauf einstellen und hängen nun ziemlich schräg in den Gurten.
Das Fahrwerk beginnt zu schlingern und droht außer Kontrolle zu geraten.
Beim Übergang von der Kreisbahn zur Geraden passiert das Gleiche in umgekehrter Richtung.

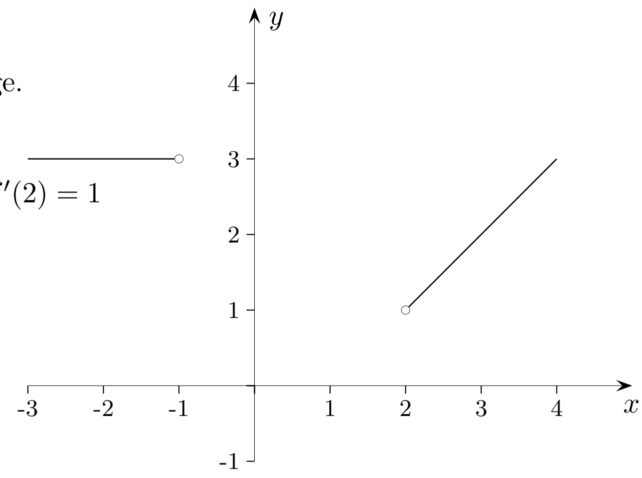
Trassierung Aufgabe

Die Strecke $A(-3 \mid 3)$ $B(-1 \mid 3)$ soll mit der Strecke
$B(2 \mid 1)$ $C(4 \mid 3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Trassierung   Aufgabe

Die Strecke $A(-3\,|\,3)$ $B(-1\,|\,3)$ soll mit der Strecke $B(2\,|\,1)$ $C(4\,|\,3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Die vier Bedingungen

$$f(-1) = 3,\ \ f(2) = 1,\ \ f'(-1) = 0,\ \ f'(2) = 1$$

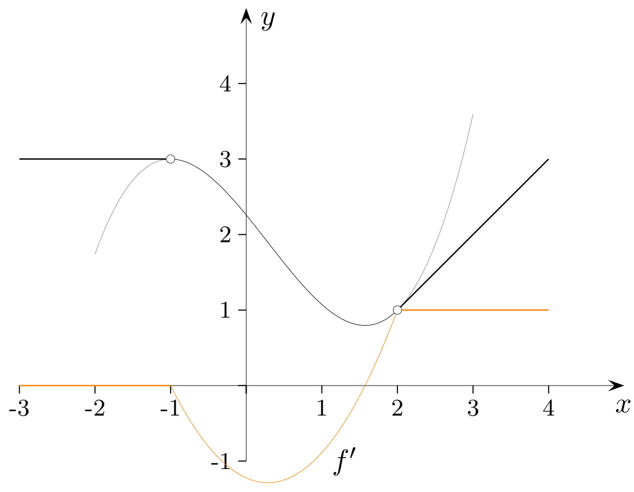
führen mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{27}\,(7x^3 - 6x^2 - 33x + 61)$$

An der eingezeichneten 1. Ableitung sind die Krümmungssprünge an den Nahtstellen ablesbar.



Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

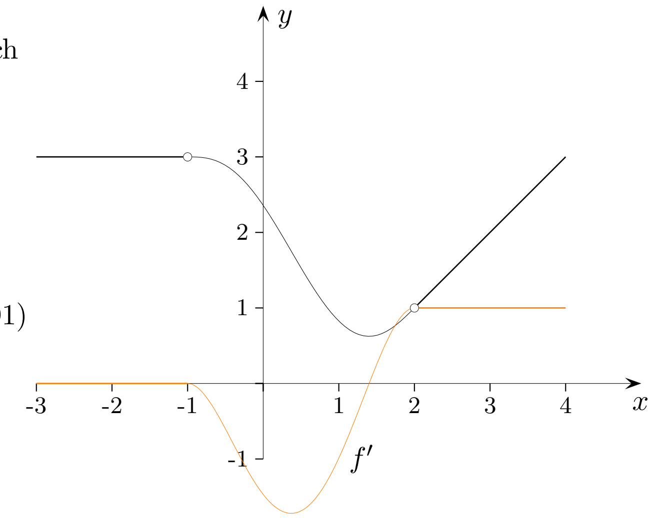
$$f''(-1) = 0,\ \ f''(2) = 0$$

gefordert werden.
Mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

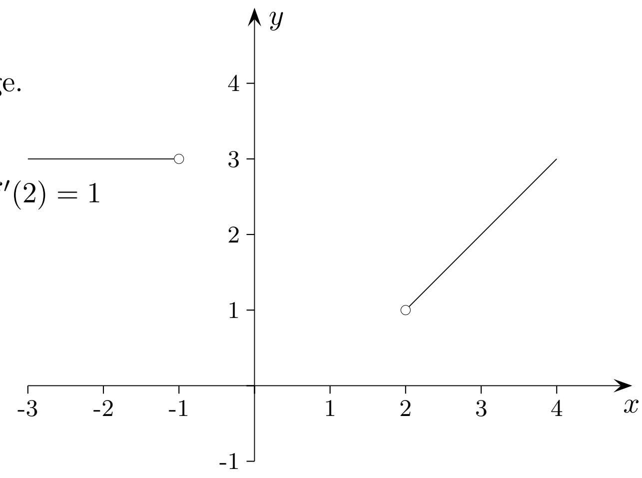
erhalten wir die Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{81}\,(7x^5 - 16x^4 - 38x^3 + 52x^2 + 119x - 191)$$



Trassierung Aufgabe

Die Strecke $A(-3\,|\,3)$ $B(-1\,|\,3)$ soll mit der Strecke $B(2\,|\,1)$ $C(4\,|\,3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Die vier Bedingungen

$$f(-1)=3,\;\; f(2)=1,\;\; f'(-1)=0,\;\; f'(2)=1$$

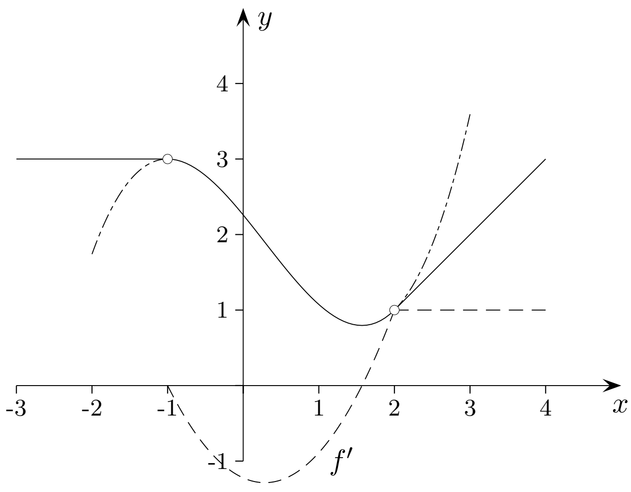
führen mit dem Ansatz:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x)=\frac{1}{27}\,(7x^3-6x^2-33x+61)$$

An der eingezeichneten 1. Ableitung sind die Krümmungssprünge an den Nahtstellen ablesbar.



Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

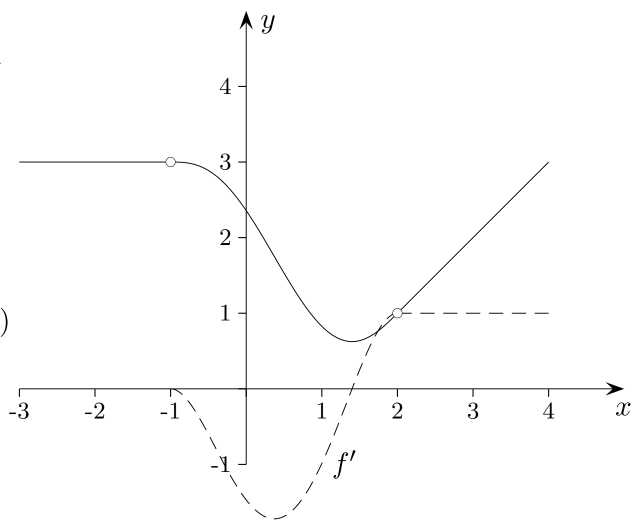
$$f''(-1)=0,\;\; f''(2)=0$$

gefordert werden.
Mit dem Ansatz:

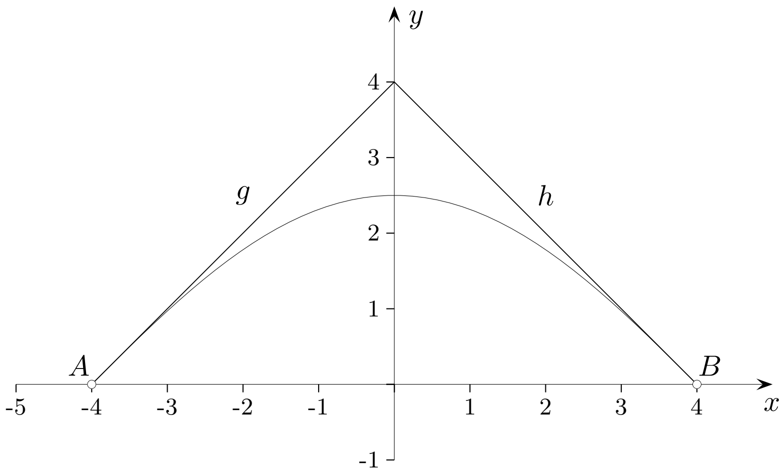
$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

erhalten wir die Lösung:

$$f(x)=-\frac{1}{81}\,(7x^5-16x^4-38x^3+52x^2+119x-191)$$



Trassierung



Das Verkehrsaufkommen auf der Kreuzung zweier Landstraßen g und h soll durch eine neue Trasse, die A und B krümmungsruckfrei verbindet, entlastet werden ($1LE = 100\,m$).

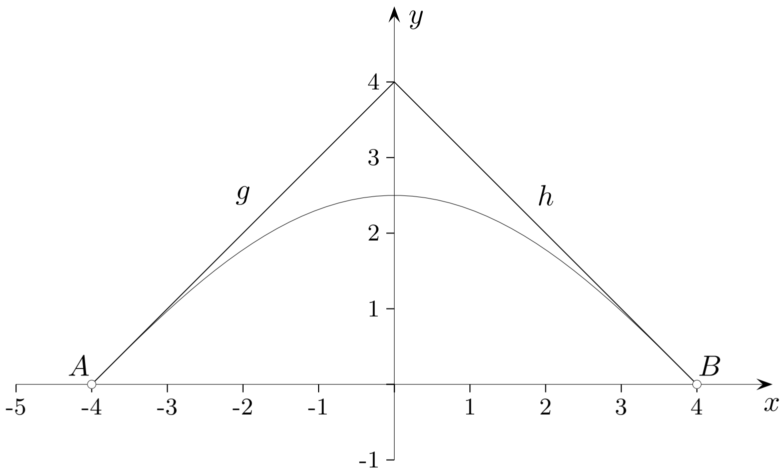
a) Entwickeln Sie eine Lösung mit einer ganzrationalen Funktion.

b) Bestimmen Sie a, b und c so, dass auch $f_1(x) = ae^{bx^2} + c$ den Anforderungen genügt.

c) Überprüfen Sie, ob auch $f_2(x) = -0{,}2757(e^{0{,}5x} + e^{-0{,}5x}) + 2{,}075$ für eine Modellierung in Frage kommt.

d) Ermitteln Sie die Inhalte der Flächen, die die Landstraßen jeweils mit den Trassen f_1 und f_2 einschließen.

Trassierung



Das Verkehrsaufkommen auf der Kreuzung zweier Landstraßen g und h soll durch eine neue Trasse, die A und B krümmungsruckfrei verbindet, entlastet werden ($1LE = 100\,m$).

a) Entwickeln Sie eine Lösung mit einer ganzrationalen Funktion. $f(x) = \frac{1}{512}x^4 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{5}{2}$

b) Bestimmen Sie a, b und c so, dass auch $f_1(x) = ae^{bx^2} + c$ den Anforderungen genügt.

$$f'(x) = 2abxe^{bx^2},\ f''(x) = 2abe^{bx^2}(1 + 2bx^2),\ f_1(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{32}x^2} - 4 = 6{,}595 \cdot e^{-\frac{1}{32}x^2} - 4$$

c) Überprüfen Sie, ob auch $f_2(x) = -0{,}2757(e^{0{,}5x} + e^{-0{,}5x}) + 2{,}075$ für eine Modellierung in Frage kommt.

Der Übergang ist stetig und knickfrei (differenzierbar), jedoch nicht völlig krümmungsruckfrei, $f_2''(4) = -0{,}519$.

d) Ermitteln Sie die Inhalte der Flächen, die die Landstraßen jeweils mit den Trassen f_1 und f_2 einschließen.

$f_1 \quad A = 28580\,m^2$

$f_2 \quad A = 73994\,m^2$

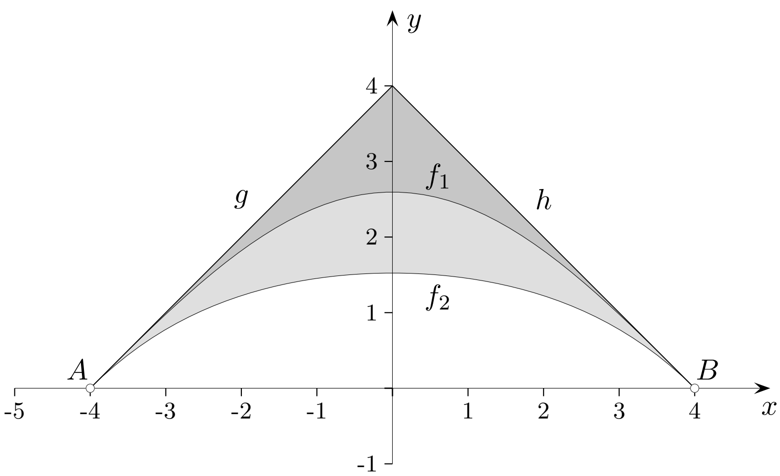
zu a)

1. $f(4) = 0$
2. $f'(4) = -1$
3. $f''(4) = 0$

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

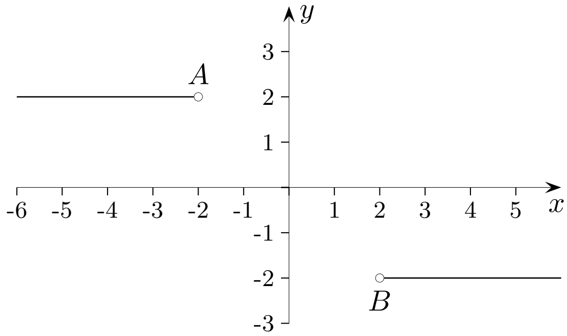
Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 256a + 16b + c &= 0 \\ 256a + 8b &= -1 \\ 192a + 2b &= 0 \end{aligned}$$



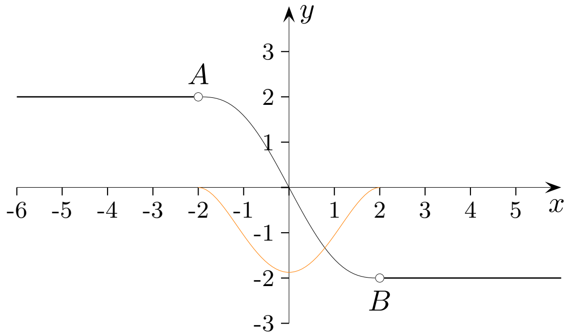
Trassierung

Gesucht ist ein Übergangsbogen zwischen den Punkten
$A(-2 \mid 2)$ und $B(2 \mid -2)$ ohne Krümmungssprünge.



Trassierung

Gesucht ist ein Übergangsbogen zwischen den Punkten
$A(-2 \mid 2)$ und $B(2 \mid -2)$ ohne Krümmungssprünge.



Unter Berücksichtigung der Punktsymmetrie führen die drei Bedingungen

$$f(2) = -2,\ \ f'(2) = 0,\ \ f''(2) = 0$$

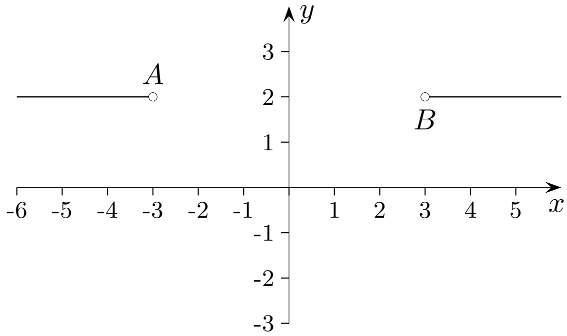
mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung: $\quad f(x) = -\frac{3}{128}x^5 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{8}x$

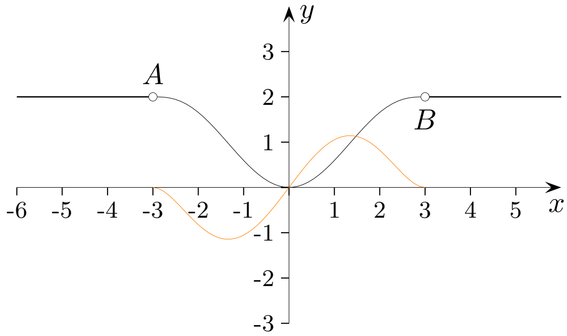
Trassierung

Gesucht ist ein Übergangsbogen zwischen den Punkten
$A(-3\,|\,2)$ und $B(3\,|\,2)$ ohne Krümmungssprünge.



Trassierung

Gesucht ist ein Übergangsbogen zwischen den Punkten
$A(-3\,|\,2)$ und $B(3\,|\,2)$ ohne Krümmungssprünge.



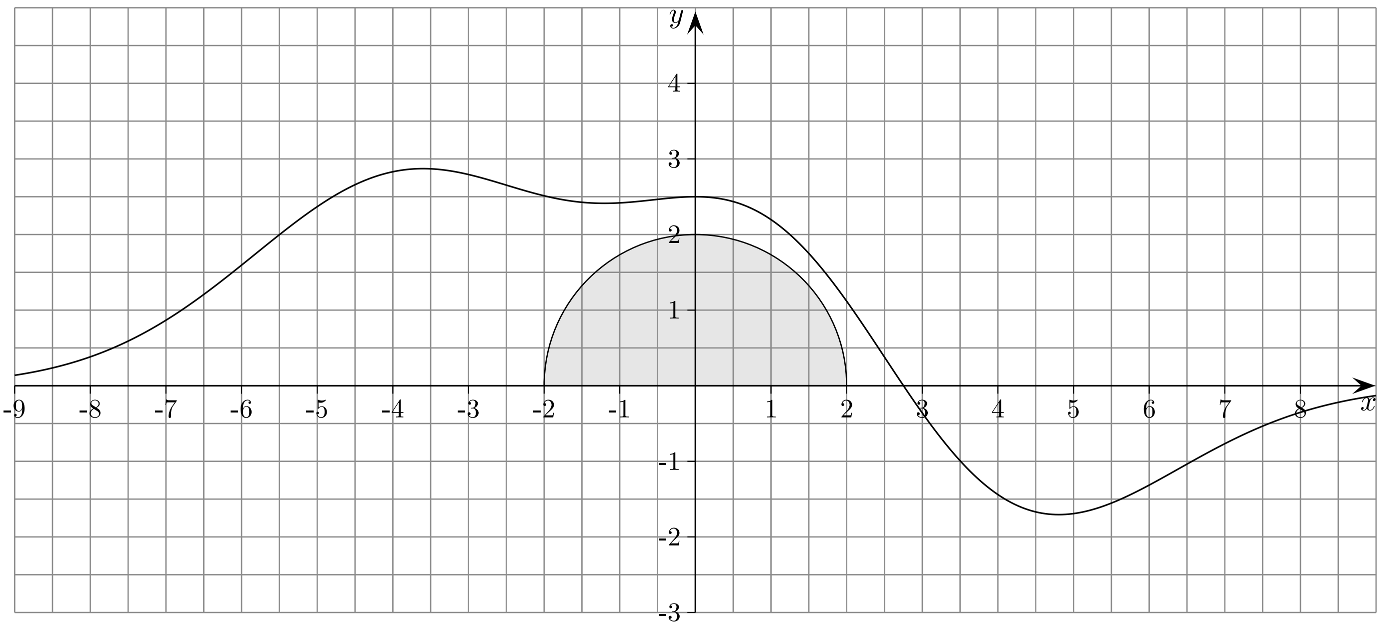
Unter Berücksichtigung der y-Achsensymmetrie führen die drei Bedingungen

$$f(3) = 2,\ \ f'(3) = 0,\ \ f''(3) = 0$$

mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 \quad (f(0) = 0 \text{ erfüllt})$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung: $\;f(x) = \frac{2}{729}x^6 - \frac{2}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2$



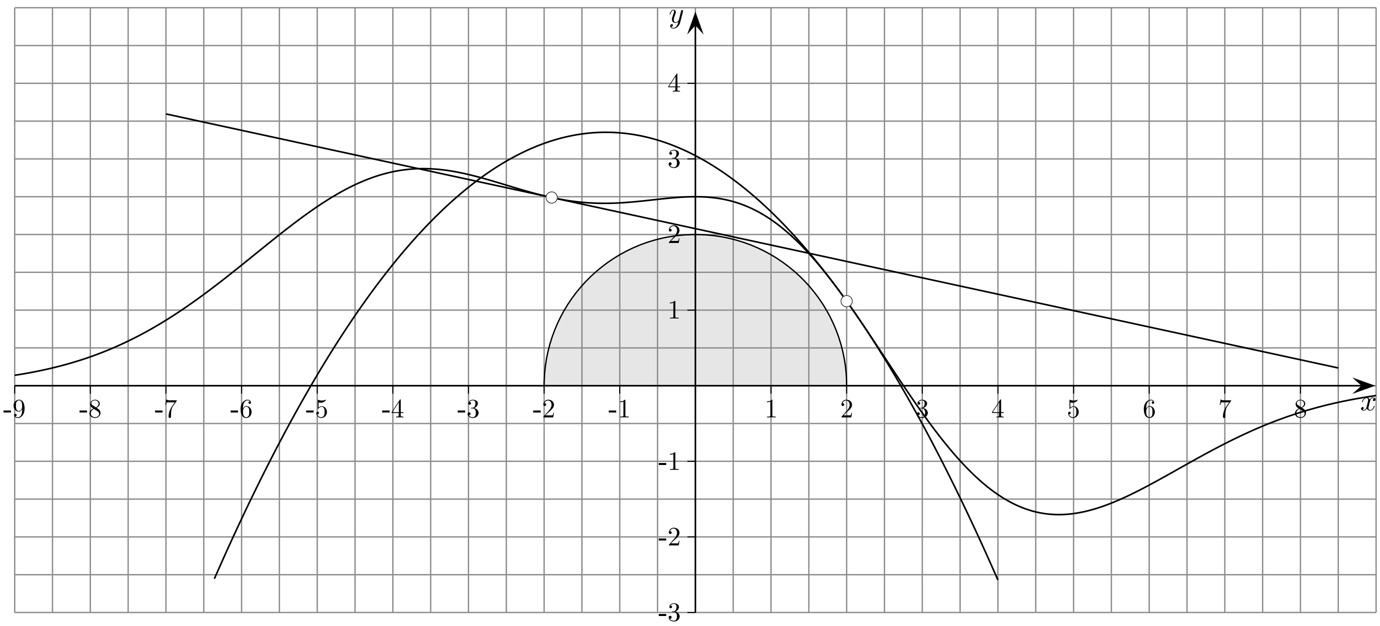
Um einen halbkreisförmigen Ort (Funktionsgleichung: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$) führt eine Straße, deren Verlauf durch $f(x) = (-0{,}12x^3 + 2{,}5) \cdot e^{-0{,}08x^2}$ beschrieben wird (Angaben in km).

Wie viele Krümmungsänderungen der Straße liegen im Bereich $[-9, 9]$ vor?

Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Straße vom Ortsrand.

Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1{,}9$ vom Ortsrand.

Ermitteln Sie eine parabelförmige Modellierungsfunktion, deren Graph an der Stelle $x = 2$ krümmungsruckfrei von der vorhandenen Straße abzweigt, sowie den Inhalt der Fläche, die der Graph dieser Funktion mit der x-Achse und dem Graphen von g einschließt.



Um einen halbkreisförmigen Ort (Funktionsgleichung: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$) führt eine Straße, deren Verlauf durch $f(x) = (-0{,}12x^3 + 2{,}5) \cdot e^{-0{,}08x^2}$ beschrieben wird (Angaben in km).

Wie viele Krümmungsänderungen der Straße liegen im Bereich $[-6, 9]$ vor? 5

Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Straße vom Ortsrand. $2{,}274 - 2$ (km)

Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1{,}9$ vom Ortsrand. $2{,}030 - 2$ (km)

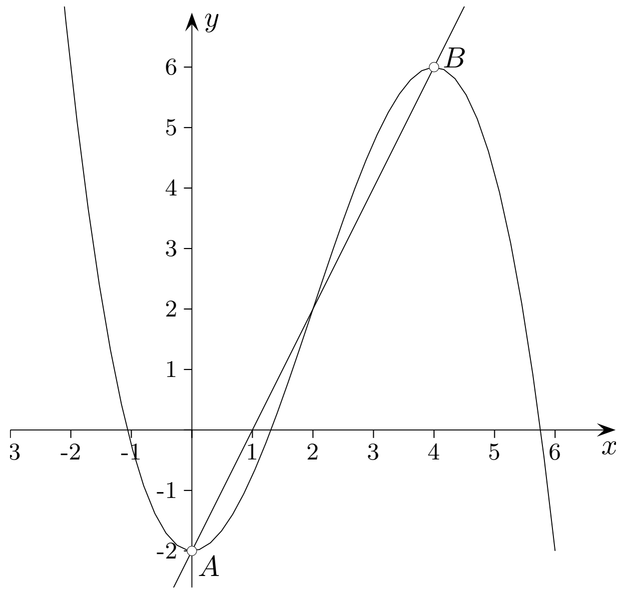
Ermitteln Sie eine parabelförmige Modellierungsfunktion, deren Graph an der Stelle $x = 2$ krümmungsruckfrei von der vorhandenen Straße abzweigt, sowie den Inhalt der Fläche, die der Graph dieser Funktion mit der x-Achse und dem Graphen von g einschließt.

$$h(x) = -0{,}220x^2 - 0{,}522x + 3{,}044$$

$$A = 17{,}432 - 2\pi = 11{,}149\ (FE)$$

Ergänzungen

1. Wie groß ist die Fläche, die der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2$ mit der geradlinigen Verbindung der Punkte $A(0\,|\,-2)$ und $B(4\,|\,6)$ umschließt?



2. Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2$
   soll an der Stelle $x = 3$ durch eine Gerade knickfrei fortgesetzt werden.
   Ermitteln Sie die Geradengleichung.
   Gibt es einen Punkt auf dem Graphen von f, so dass die lineare Fortsetzung auch ruckfrei wäre?

3. Wie kann für eine Modellierung mit der Funktion f überprüft werden, ob die Vorgaben

   a) Mindestneigung von 5°,

   b) senkrechter (parallel zur y-Achse) Mindestabstand zu einem gegebenen Graphen von $1\,m$ (Mindestabstand ist hier der minimale Abstand zweier Punkte auf den beiden Graphen),

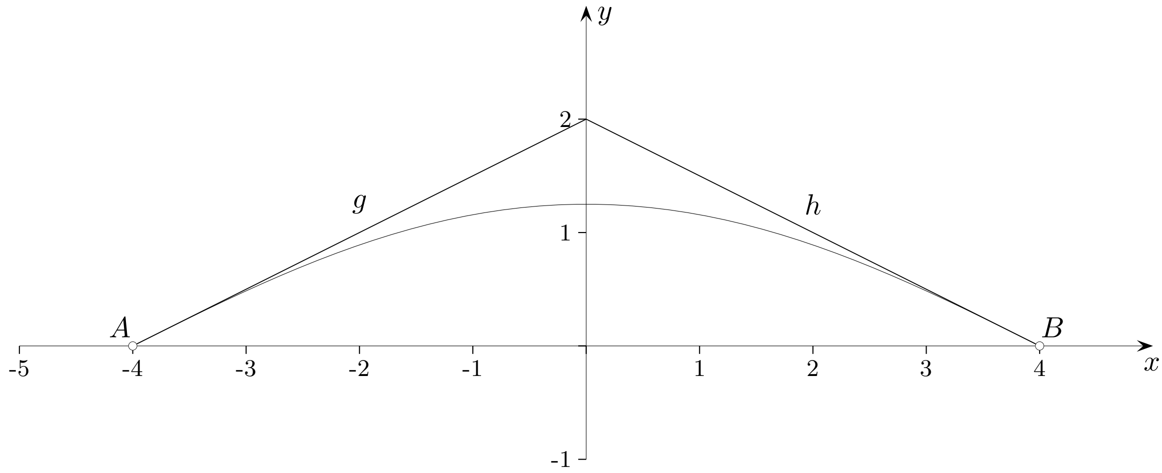
   c) Wendepunkt liegt auf der x-Achse,

   d) Schnittwinkel der Tangenten an den Stellen x_1 und x_2 größer als 15°,

   e) Mindestabstand zu einem gegebenen Punkt A von $2\,m$

   eingehalten werden?

Trassierung

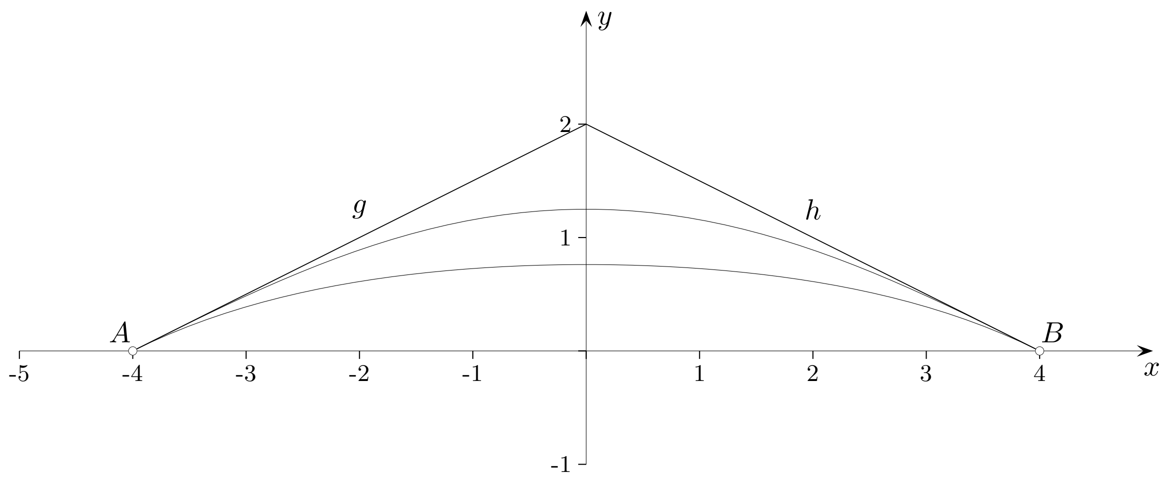


Das Verkehrsaufkommen auf der Kreuzung zweier Landstraßen g und h soll durch eine neue Trasse, die A und B krümmungsruckfrei verbindet, entlastet werden ($1LE = 100\,m$).

a) Entwickeln Sie eine Lösung mit einer ganzrationalen Funktion.

b) Bestimmen Sie a, b und c so, dass auch $f_1(x) = ae^{bx^2} + c$ den Anforderungen genügt.

Trassierung



Das Verkehrsaufkommen auf der Kreuzung zweier Landstraßen g und h soll durch eine neue Trasse, die A und B krümmungsruckfrei verbindet, entlastet werden $(1LE = 100\,m)$.

a) Entwickeln Sie eine Lösung mit einer ganzrationalen Funktion. $f(x) = \frac{1}{1024}x^4 - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{4}$

Modellierung mit einem krümmungsruckfreien Übergang:

1. $f(4) = 0$
2. $f'(4) = -\frac{1}{2}$
3. $f''(4) = 0$

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 256a + 16b + c &= 0 \\ 256a + 8b &= -\frac{1}{2} \\ 192a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

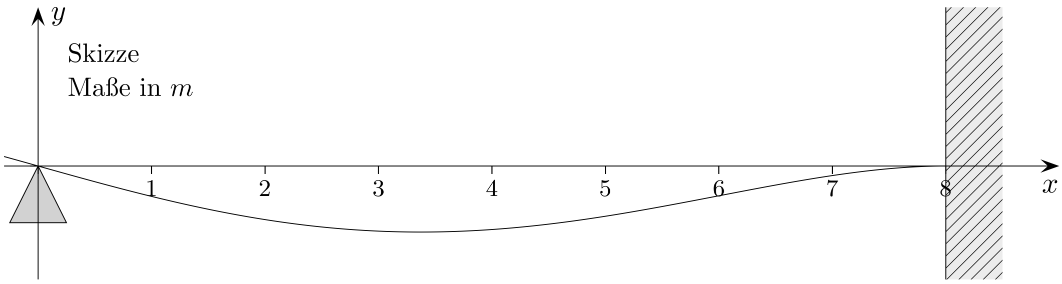
b) Bestimmen Sie a, b und c so, dass auch $f_1(x) = ae^{bx^2} + c$ den Anforderungen genügt.

$a = 2\sqrt{e}$, $b = -\frac{1}{32}$, $c = -2$, $f_1(x) = 2(e^{-\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}} - 1)$

$f_1''(x) = 2abe^{bx^2}(1 + 2bx^2)$

Biegelinie eines einseitig eingespannten Balkens

Ein Balken ist an einem Ende ($x = 8$) fest eingespannt und liegt am anderen Ende lose auf.
Infolge seines Eigengewichts biegt sich der Balken nach unten durch (siehe Skizze).
Die Lage der Mittellinie des Balkens kann durch $f(x) = k \cdot (ax^4 + bx^3 - x)$, $\;0 \leq x \leq 8$,
beschrieben werden. Dabei ist k eine positive Konstante, die von der Balkenart abhängt.
An der Einspannstelle ist die Steigung null.



a) Ermitteln Sie a und b.
Verwenden Sie die ermittelten Ergebnisse für die weiteren Fragestellungen.

b) Wie groß müsste k gewählt werden, damit die Tangente an der Wendestelle mit der x-Achse einen Winkel von $\alpha = 5{,}5°$ einschließt?

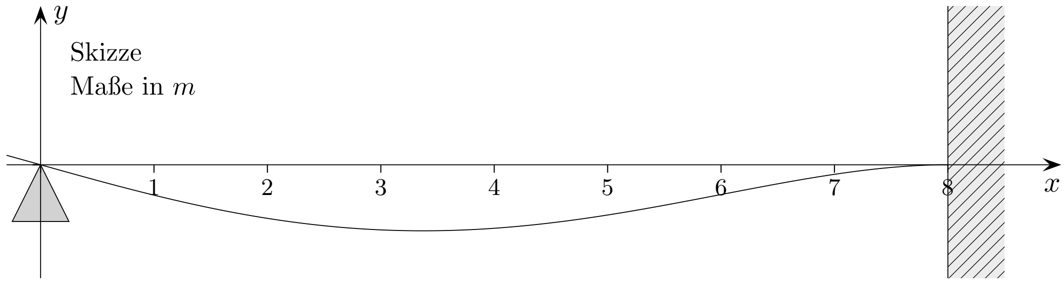
c) Welchen Winkel schließt der Graph von f mit der x-Achse im Auflagepunkt ein?

d) Wie groß ist der maximale Durchhang des Balkens?

e) Ermitteln Sie die 2. Ableitung an der Stelle $x = 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Biegelinie eines einseitig eingespannten Balkens

Ein Balken ist an einem Ende ($x = 8$) fest eingespannt und liegt am anderen Ende lose auf.
Infolge seines Eigengewichts biegt sich der Balken nach unten durch (siehe Skizze).
Die Lage der Mittellinie des Balkens kann durch $f(x) = k \cdot (ax^4 + bx^3 - x), \quad 0 \leq x \leq 8$,
beschrieben werden. Dabei ist k eine positive Konstante, die von der Balkenart abhängt.
An der Einspannstelle ist die Steigung null.



a) Ermitteln Sie a und b.
Verwenden Sie die ermittelten Ergebnisse für die weiteren Fragestellungen.

Ansatz $f(x) = k \cdot (ax^4 + bx^3 - x)$

Bedingungen: $f(0) = 0$ erfüllt

1. $f(8)=0$
2. $f'(8)=0$

1. $k \cdot (4096a + 512b - 8) = 0$
2. $k \cdot (2048a + 192b - 1) = 0$

$$a = -\frac{1}{256}, \ b = \frac{3}{64}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = k \cdot (-\frac{1}{256}x^4 + \frac{3}{64}x^3 - x)$

b) Wie groß müsste k gewählt werden, damit die Tangente an der Wendestelle mit der x-Achse einen Winkel von $\alpha = 5{,}5°$ einschließt? $x_w = 6, \ \ k = 0{,}14$

c) Welchen Winkel schließt der Graph von f mit der x-Achse im Auflagepunkt ein? $\beta = -8{,}0°$

d) Wie groß ist der maximale Durchhang des Balkens? $y_{\text{min}} = -0{,}291$

maximaler Durchhang $0{,}291\ m$

e) Ermitteln Sie die 2. Ableitung an der Stelle $x = 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Die Krümmung ist an der Stelle $x = 0$ null.